This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

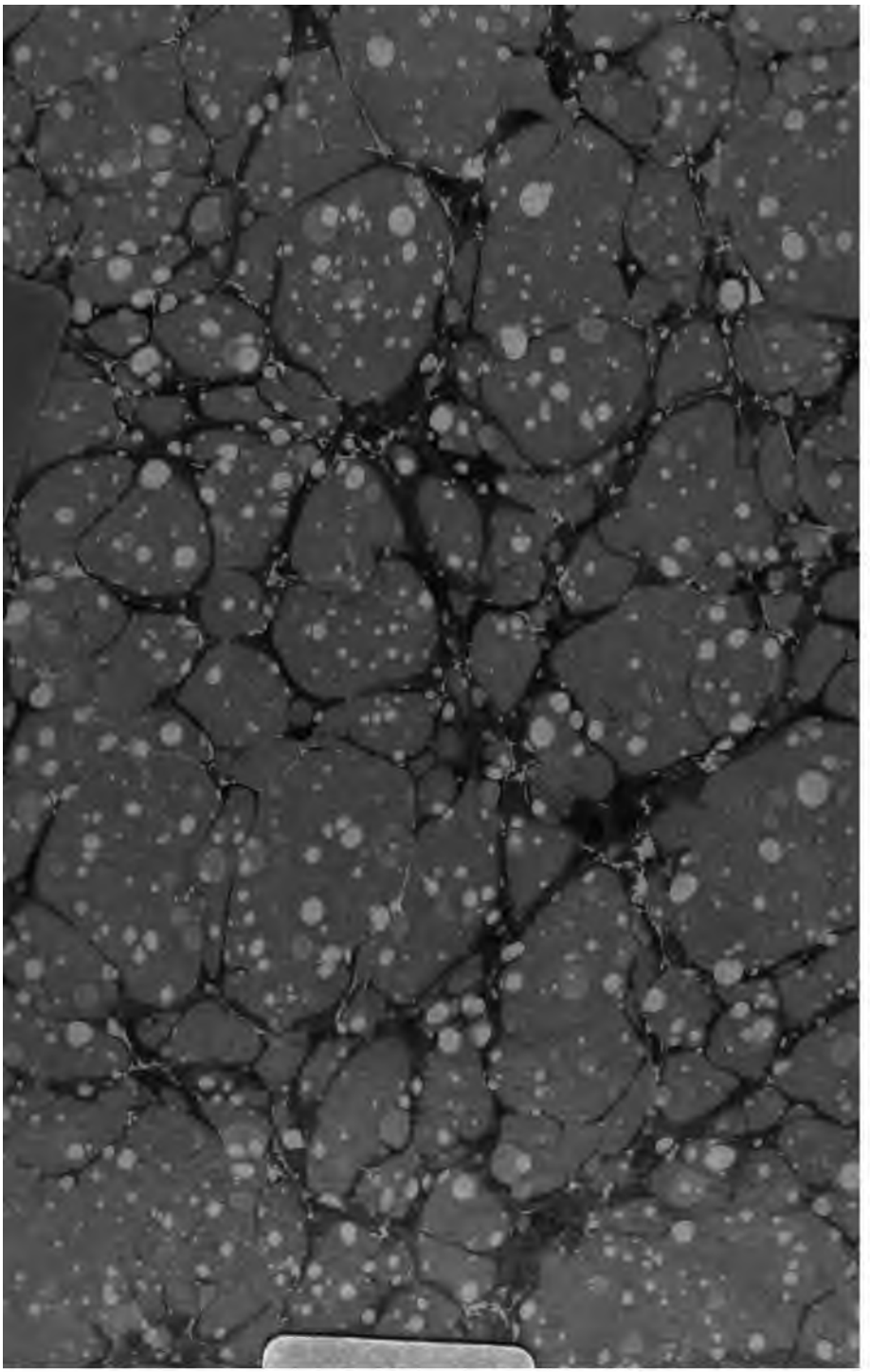
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

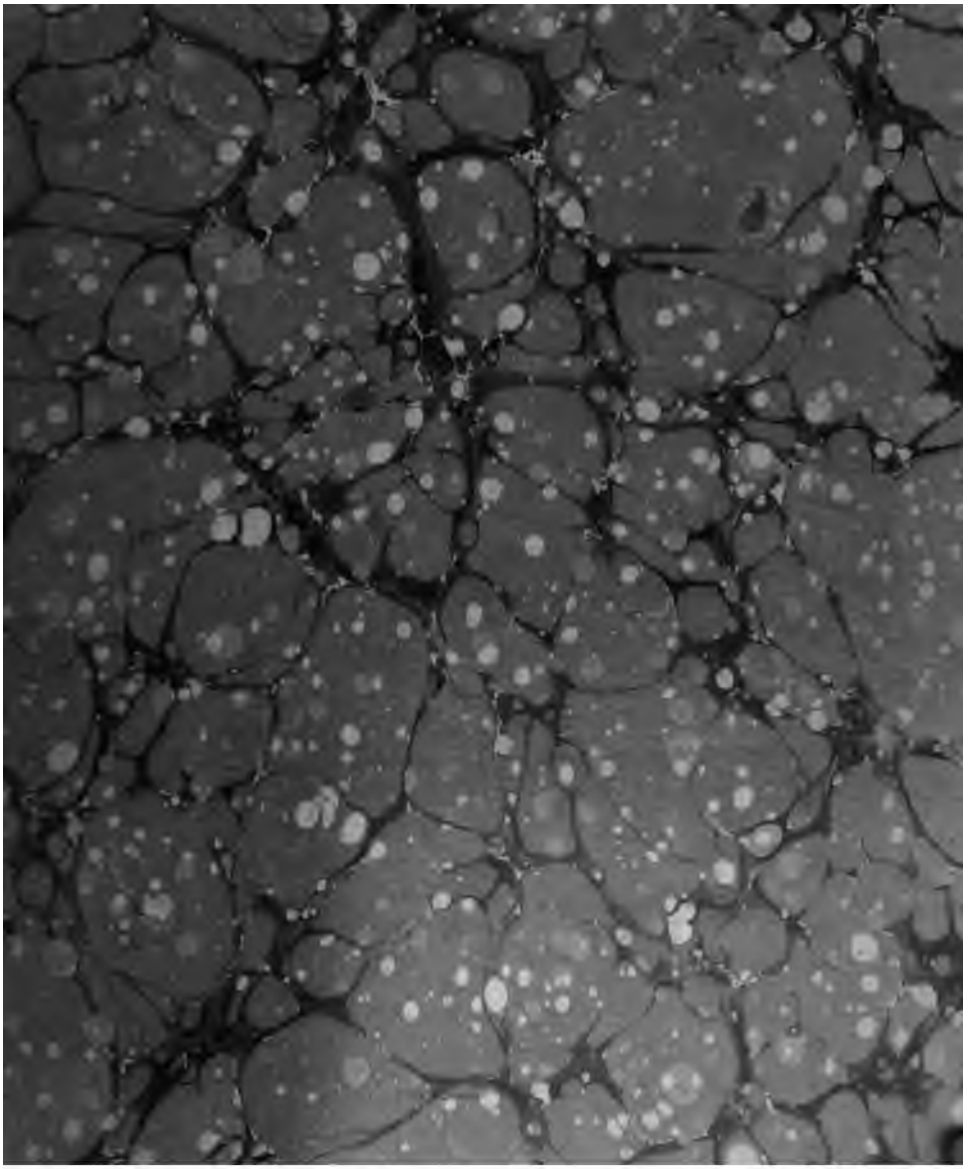
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 898 945





1324-13.7/5

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 23.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

A. C. CREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 23.

DER GANZEN REIHE 328. BAND.

KURATORIUM:
F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
UND INSBESONDERE VON
M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON
W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT VIER FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1907.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

10[illegible]14

Inhalt.

Vierte Folge. Band 23.

Sechstes Heft.

		Seite
1.	M. Laue. Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln	1
2.	F. Harms. Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender zylindrischer Hülle	44
3.	Rudolf Laemmel. Bemerkungen über die spezifischen Wärmen fester Grundstoffe. (Hierzu Taf. I.)	61
4.	Arthur Szarvassi. Über die unipolare Induktion	78
5.	H. Baerwald. Über die Adsorption von Gasen durch Holzkohle bei tiefen Temperaturen	84
6.	W. Wilson. Lichtelektrische Entladung und durch Bestrahlung erzeugtes Leitvermögen	107
7.	H. Zahn. Über adiabatischen und isothermen Halleffekt in Wismut	131
8.	Max Laugwitz. Über den Durchgang elektrischer Wellen durch nicht-metallische Gitter	148
9.	Clemens Schaefer. Über die Wirkung dielektrischer Zylinder auf elektrische Wellen	163
10.	Leo Arons. Eine Amalgamlampe mit reichem Linienspektrum. (Hierzu Taf. II, Nr. I u. II.)	176
11.	K. Uller. Über den Verdrängungswiderstand fester Körper in Gasen und Flüssigkeiten. Erste Mitteilung	179
12.	A. Einstein. Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips	197
13.	A. van den Broek. Das α-Teilchen und das periodische System der Elemente	199
14.	Paul Ehrenfest. Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz	204
15.	A. Einstein. Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. Paul Ehrenfest: „Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz“	206

Ausgegeben am 28. Mai 1907.

Siebentes Heft.

Seite

1. E. Warburg und G. Leithäuser. Über die Oxydation des Stickstoffs bei der Wirkung der stillen Entladung auf atmosphärische Luft 209
2. Günther Schulze. Über das Verhalten von Tantalelektroden 226
3. F. Paschen. Über den Dopplereffekt im Spektrum der Kanalstrahlen des Wasserstoffs. (Hierzu Taf. III.) 247
4. F. Paschen. Über den Dopplereffekt im Spektrum der Kanalstrahlen des Sauerstoffs 261
5. W. Altberg. Über kurze akustische Wellen bei Funkenentladungen von Kondensatoren 267
6. D. van Gulik. Über das Absorptionsspektrum des Chlorophylls 277
7. J. Laub. Über sekundäre Kathodenstrahlen 285
8. Christian Füchtbauer. Über Sekundärstrahlen 301
9. C. Déguisne. Die Aufzeichnung von akustischen Schwebungen. (Hierzu Taf. IV, Figg. 1, 2, 3a, 3b, 5, 6, 8, 10a, 10b, 11 u. 13.) 308
10. Erich Barkow. Versuche über Entstehung von Nebel bei Wasserdampf und einigen anderen Dämpfen 317
11. Max von Wogau. Die Diffusion von Metallen in Quecksilber 345
12. A. Einstein. Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie 371
13. K. Fuchs. Über die van der Waalssche Formel 385
14. G. Athanasiadis. Bestimmung des Widerstandes und der Kapazität mit Gleichstrom und Telephon 392
15. J. D. van der Waals jr. Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen. II 395
16. T. Argyropoulos. Sprechender Kondensator 397
17. R. Gans. Berichtigung zu der Arbeit: „Über die Theorie des Ferromagnetismus“ 399

Ausgegeben am 13. Juni 1907.

Achtes Heft.

1. Martin Gildemeister. Über das Verschwinden der Magnetisierung 401
2. W. Wien. Über die absolute, von positiven Ionen ausgestrahlte Energie und die Entropie der Spektrallinien 415
3. H. Haga. Über die Polarisation der Röntgenstrahlen und der Sekundärstrahlen 439
4. H. Haga. Über einen merkwürdigen Fall von selektiver Absorption bei Röntgenstrahlen 445
5. Rudolf Ladenburg. Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit . . . 447
6. W. Hallwachs. Über die lichtelektrische Ermüdung . . . 459
7. Bernhard Löffler. Wann und auf welchem Wege beeinflussen suspendierte Teilchen Gewicht und Auftrieb einer Flüssigkeit? 517

Seite
8. G. Bakker. Theorie der gekrümmten Kapillarschicht . . . 532
9. Karl Tangl. Über die Dielektrizitätskonstante der Luft bei hohem Druck 559
10. O. Grotrian. Die magnetische Induktion in Rotationskörpern bei homogenem Felde, behandelt nach einem Näherungsverfahren auf experimentell-geometrischer Grundlage 575
11. Rudolf Laemmel. Der Inhalt der Gleichung $p.v = R.T$. 591
12. H. Erfle. Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel 594
13. Clemens Schaefer und Max Laugwitz. Zur Lambschen Gittertheorie 599

Ausgegeben am 5. Juli 1907.

Neuntes Heft.

1. H. Wommelsdorf. Über die Abhängigkeit von Polarisatorwiderstand, Scheibendicke und Scheibenabstand der Influenzmaschinen 601
2. H. Wommelsdorf. Eine neue Art von Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren . . 609
3. L. Mandelstam. Über optisch homogene und trübe Medien 626
4. H. J. L. Struycken. Die Schwingungsart einer Stimmgabel und ihr Dekrement 643
5. Joh. Koenigsberger und Joh. Disch. Bestimmung der Veränderlichkeit des Koeffizienten der Differentialgleichung von Fourier und experimentelle Anwendung auf Wärmeleitung von Isolatoren 655
6. Heinrich Willy Schmidt. Über Reflexion und Absorption von β-Strahlen 671
7. Franz Koláček. Zur Theorie der elektromagnetischen Gleichungen in bewegten Medien 698
8. Alexander Jollos. Über Hochfrequenzladung 719
9. J. Laub. Zur Optik der bewegten Körper 738
10. E. Gehrcke und O. Reichenheim. Interferenzen planparalleler Platten im kontinuierlichen Spektrum 745
11. Ludwig Geiger. Über die Begleiterscheinung des inversen longitudinalen Zeemaneffektes 758
12. M. Laue. Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln. Nachtrag 795
13. J. Stark. Bemerkung zu Hrn. Paschens Mitteilung über den Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen 798
14. Georg W. Berndt. Über Stromschwankungen an Gleichstromdynamos 805
15. K. Fuchs. Zur Mechanik der Kapillarschicht 807

Ausgegeben am 22. August 1907.

Zehntes Heft.

Seite

1. L. Holborn und F. Henning. Über die spezifische Wärme von Stickstoff, Kohlensäure und Wasserdampf bis 1400°. . . 809
2. J. Zenneck. Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie 846
3. Max Toepler. Gleitfunken auf sehr dünnen (Glimmer-)Platten 867
4. W. v. Ignatowsky. Diffraktion und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen 875
5. W. v. Ignatowsky. Berechnung des Widerstandes eines Drahtes bei der Reflexion von elektromagnetischen Wellen . . 905
6. E. Pauli. Über die Abhängigkeit der Wärmeleitung einiger Gase und Dämpfe von der Temperatur 907
7. G. Berndt. Über den Einfluß des Magnetfeldes auf den Widerstand von Elektrolyten 932
8. Clemens Schaefer und Max Laugwitz. Abhängigkeit des Verhaltens Hertzscher Gitter vom Leitvermögen 951
9. H. Dember. Versuche über das lichtelektrische Verhalten von Metallen beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand 957
10. Guido Szivessy. Über die Widerstandsänderung von Metalldrähten durch Sauerstoffokklusion 968
11. F. W. Adler. Bemerkung zur Abhandlung: „Der Inhalt der Gleichung $p v = R T$“ 975
12. Erich Herrmann-Goldap. Über die Klangfarbe einiger Orchesterinstrumente 979
13. L. Baumgardt. Über die Möglichkeit einer Nutzanwendung des Wilsoneffektes 986
14. M. Laue. Die Mitführung des Lichtes durch bewegte Körper nach dem Relativitätsprinzip 989
15. M. Laue. Zur Cohnschen Elektrodynamik 991
16. G. Lippmann. Über die Analogie zwischen absoluter Temperatur und elektrischem Potential (Erwiderung an F. W. Adler) 994
17. F. Paschen. Erwiderung auf Bemerkungen des Hrn. Stark zu meinen Arbeiten über den Dopplereffekt 997

Ausgegeben am 24. September 1907.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. Laemmel.
„ II. Arons, Nr. I u. II.
„ III. Paschen.
„ IV. Déguisne, Figg. 1, 2, 3a, 3b, 5, 6, 8, 10a, 10b, 11 u. 18.

1907. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 23.

1. *Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln; von M. Laue.*

Einleitung.

In einer im Vorjahr erschienenen Abhandlung „Zur Thermodynamik der Interferenzerscheinungen“[1]) wurde gezeigt, daß sich bei kohärenten Strahlenbündeln das Additionstheorem der Entropie: „Die Entropie eines Systems ist die Summe der Entropien seiner (räumlich getrennten) Teile“ nicht mit dem Prinzip der Zunahme der Entropie verträgt. Aus dem Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit wurde gefolgert, daß es das Additionstheorem ist, welches man aufgeben muß. Es wurde auch die Formel für die Entropie eines Systems monochromatischer Strahlenbündel gegeben, welche alle durch reguläre Reflexion und Brechung an selbst nicht strahlenden Körpern aus einem einzigen entstanden sind. Dort war demnach nur von vollständig kohärenten Strahlenbündeln die Rede. Entsendet aber einer dieser Körper selbst Strahlung von derselben Schwingungszahl wie das einfallende Licht, so vermischen sich mit dem reflektierten und dem gebrochenen Strahlenbündel zwei zu ihnen inkohärente, so daß die auf diese Weise entstehenden weder untereinander noch mit etwaigen dem einfallenden Licht kohärenten Strahlenbündeln vollkommen kohärent bleiben. Es wäre unmöglich, bei Interferenzerscheinungen zwischen Strahlenbündeln dieser Art absolut dunkele Minimalstellen zu erhalten, wie sie bei der Superposition gleich starker, vollkommen kohärenter Strahlen auftreten; andererseits addieren sich dabei die Energiegrößen nicht, wie bei vollständig in-

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906.

kohärenten Strahlen. Vielmehr bilden solche partiell kohärente Strahlenbündel den stetigen Übergang zwischen diesen beiden Extremen. Die Formel für ihre Entropie muß dementsprechend zwischen der sich aus dem Additionstheorem ergebenden, für absolut inkohärente Strahlenbündel und der für vollständig kohärente gültigen den stetigen Übergang vermitteln.

Um sie abzuleiten, bedürfen wir zunächst eines quantitativen Maßes für die Interferenzfähigkeit zweier Strahlenbündel. Dies, die „Kohärenz", wie wir es nennen wollen, muß eine von den Intensitäten unabhängige, zudem meßbare, d. h. nur durch die zeitlichen Mittelwerte gewisser Energiequanten bestimmte Größe sein. Wir werden sie so wählen, daß sie stets ein positiver echter Bruch ist, dessen Grenzwerte 0 und 1 absolute Inkohärenz und vollständige Kohärenz bedeuten. Es ist jedoch bemerkenswert, daß nicht die Kohärenz selbst, sondern die sie zu 1 ergänzende Größe, die „Inkohärenz", in den Formeln für die Entropie sowie in den die Kohärenzverhältnisse von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln beherrschenden Relationen auftritt.

Von seiten der Thermodynamik brauchen wir nur den Satz zu Hilfe zu ziehen, daß die Reflexion und Brechung an der Grenze nicht absorbierender Körper ein umkehrbarer Vorgang ist; da sich zwei inkohärente Strahlenbündel, deren Entropie bekannt ist, durch gemeinsame Reflexion und Brechung in zwei partiell kohärente verwandeln lassen, läßt sich auch die Entropie der letzteren berechnen (vgl. § 5). Nun wurde dieser Satz in der früheren Abhandlung zwar sehr wahrscheinlich gemacht, indem das ihm entgegenstehende Additionstheorem der Entropie beseitigt und die Umkehrbarkeit der Reflexion und Brechung an einer planparallelen Platte für monochromatisches Licht und der Wert $^1/_2$ des Reflexionsvermögens unmittelbar gezeigt wurde. Doch blieb die Beweiskraft des letzteren Grundes für die Thermodynamik deswegen zweifelhaft, weil es fraglich schien, ob man aus einem kontinuierlichen Spektrum — nur von solchen wissen wir bestimmt, daß sie Entropie besitzen — hinreichend homogene Strahlung spektralanalytisch aussondern und dabei noch merkliche Energiemengen in der Hand behalten könnte — ganz abgesehen von der Beschränkung anf einen bestimmten Wert des Reflexionsver-

mögens. Deshalb wollen wir zuerst die letztere Frage entscheiden (§ 1) und dann die Umkehrbarkeit der Spiegelung und Brechung sowohl für die planparallele Platte, als die Grenze zweier Medien beweisen.

Erster Teil.

Die Umkehrbarkeit der Reflexion und Brechung.

§ 1. Die relative Breite der schmalsten aus einem kontinuierlichen Spektrum auszusondernden Bereiche.

Daß sich aus einem kontinuierlichen Spektrum von hoher Temperatur Bereiche isolieren lassen, die nicht wesentlich breiter als manche schmale Spektrallinien sind, zeigt der Rowlandsche Atlas des Sonnenspektrums, in welchem[1]) noch Fraunhofersche Linien getrennt erscheinen, deren Differenz der Wellenlängen $\Delta\lambda$ zwischen $^1/_{10}$ und $^1/_{100}$ Å.-Einh., d. h. zwischen 10^{-9} und 10^{-10} cm, liegt. Die relative Breite des zwischen zwei solchen Linien befindlichen Spektralbereiches ist $\Delta\lambda/\lambda$, also etwa 10^{-5}. Andererseits geht aus den neuerdings von Hrn. Schönrock[2]) übersichtlich zusammengestellten Resultaten Michelsons über die Sichtbarkeit der Interferenzen als Funktion des Gangunterschiedes hervor, daß die relative Breite bei manchen Spektrallinien von derselben Größenordnung ist. Denn mag man an der dort behaupteten Intensitätsverteilung, welche aus der (übrigens nur auf 10 Proz. genau bestimmten) Sichtbarkeitskurve keineswegs eindeutig hervorgeht[3]), zweifeln, so ist doch diese Größenordnung sichergestellt; eine Änderung an ihr würde den Betrag des größten Gangunterschiedes, bei welchem die Interferenzen gerade noch sichtbar sind, wesentlich verändern. Nun liegt nach den Tabellen der Schönrockschen Arbeit die beobachtete relative Halbweite δ/λ_0 stets zwischen 10^{-5} und 10^{-6}, mit Ausnahme der dort genannten Linien des Quecksilbers ($\delta/\lambda_0 = 7{,}8 \cdot 10^{-7}$), des Thalliums ($\delta/\lambda_0 = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$) und des Wismuts ($\delta/\lambda_0 = 7{,}5 \cdot 10^{-7}$). Um zur relativen Breite zu gelangen, hat man aber δ/λ_0 noch mit einem zwischen 4

1) Vgl. H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 1. p. 123.
2) O. Schönrock, Ann. d. Phys. 20. p. 995, 1906.
3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5.) 31. p. 407. 1892.

und 5 liegenden Faktor zu multiplizieren[1]), so daß man dafür stets die Größenordnung 10^{-5} findet.

Natürlich soll hiermit nicht gesagt sein, daß auch das Licht der Spektrallinien Entropie besitzen müßte. Nur daß man in der Strahlungsthermodynamik von fast ebenso homogenem Licht reden darf, wie in den anderen Teilen der Optik, geht aus unserer Betrachtung hervor.

Häufig wird es aber gar nicht nötig sein, die vorausgesetzte Homogenität als so extrem hoch aufzufassen. In den Betrachtungen des dritten Paragraphen wird z. B. ein Prisma die Hauptrolle spielen, dessen Dispersion ohne Einfluß sein soll. Bei einem Flintglasprisma, das die beiden *D*-Linien eben noch trennt, muß[2]) die ausgenutzte Dicke aber mindestens 1 cm betragen. Es wäre nun ein Leichtes, sie wesentlich unter diese Grenze herunterzusetzen. Dann können wir das ganze Intervall zwischen den *D*-Linien als homogen betrachten, obwohl seine relative Breite ziemlich genau gleich 10^{-3} ist.

§ 2. Die Umkehrbarkeit der Spiegelung und Brechung an einer planparallelen Platte.

Nach § 2 der früheren Arbeit läßt sich die Veränderlichkeit des Reflexionsvermögens r einer planparallelen Platte durch Verminderung ihrer Dicke so herabsetzen, daß es selbst für so breite Spektralbereiche, wie der soeben erwähnte, einen konstanten Wert hat. Wird nun ein in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes, hinreichend homogenes Strahlenbündel von der spezifischen Intensität $\mathfrak{K}$ (vgl. Fig. 1) durch Spiegelung und Brechung an der Platte P in zwei neue zerlegt, deren Intensitäten $r\mathfrak{K}$ und $(1-r)\mathfrak{K}$ sind, und werden diese darauf von den vollkommen reflektierenden, ebenen, zur Platte P symmetrisch

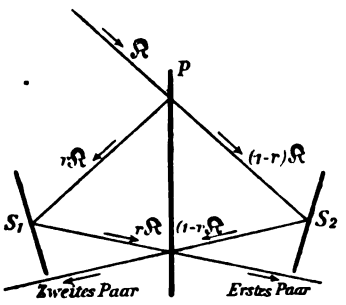


Fig. 1.

1) Vgl. § 6 der Schönrockschen Arbeit.

2) Vgl. P. Drude, Lehrbuch der Optik, II. Aufl., Leipzig, Hirzel, 1906. p. 220.

liegenden Spiegeln S_1 und S_2 so auf die Platte zurückgeworfen, daß sie das zweite Mal unter anderem Einfallswinkel zu ihr gelangen, so entstehen vier Strahlenbündel von den spezifischen Intensitäten $r(1-r')\mathfrak{R}$, $r'(1-r)\mathfrak{R}$ und $rr'\mathfrak{R}$, $(1-r)(1-r')\mathfrak{R}$. Von diesen überlagern sich die beiden ersteren sowie die beiden letzteren und interferieren miteinander; der Gangunterschied beträgt beim ersten Paar 0, beim zweiten π, ganz unabhängig von der Größe des Öffnungswinkels (vgl. § 2 der ersten Abhandlung). Wählen wir nun, was stets möglich ist,

$$r' = 1 - r,$$

so werden die Strahlenbündel des letzteren Paares an Intensität einander gleich, heben sich also auf. Die ganze Energie des einfallenden Strahlenbündels muß sich dann in dem aus der Interferenz des ersten Paares hervorgehenden Strahlenbündel wiederfinden; dies hat also, wie man auch auf rechnerischem Wege leicht bestätigt, wieder die volle Intensität $\mathfrak{R}$. Damit ist die Umkehrung der ersten Reflexion und Brechung vollzogen.

Durch diese Überlegung ist aber die Umkehrbarkeit *jeder* regulären, absorptionsfreien Spiegelung und Brechung bewiesen. Im allgemeinen befinden sich zwar der gespiegelte und gebrochene Strahl in verschiedenen Mitteln; doch ist das unwesentlich, da man ein Strahlenbündel unter Benutzung des Polarisationswinkels ohne Verlust an Energie und Kohärenz aus jedem beliebigen Mittel in jedes andere austreten lassen kann. Auch die Spiegelung und Brechung an der Grenze kristallinischer Körper ist hier einbegriffen; denn die dabei auftretende Zerspaltung eines Strahlenbündels in mehr als zwei läßt sich immer durch eine Reihe von gewöhnlichen Spiegelungen und Brechungen ersetzen. Eine etwaige Krümmung der spiegelnden Flächen ändert hieran nichts.

Trotzdem wollen wir im folgenden Paragraphen die Umkehrbarkeit dieses Vorganges für die Grenze zweier isotropen Medien noch besonders beweisen. Bei der Neuheit des Gegenstandes kann eine doppelte Sicherung der Grundlagen nützlich scheinen.

§ 3. Die Umkehrbarkeit der Spiegelung und Brechung an der Grenze von zwei verschiedenen nicht absorbierenden Körpern.

Nehmen wir an, daß auf das bei A (Fig. 2) gelegene Flächenstück f der ebenen Grenze eines für Strahlung der betrachteten Wellenlänge durchsichtigen Körpers gegen das Vakuum ein hinreichend homogenes, in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Strahlenbündel aus dem letzteren kommend auffällt. Dann gehen von f zwei Strahlenbündel aus; das reflektierte schreitet in das Vakuum hinein fort, das gebrochene dringt in den genannten Körper ein. Da nun aber selbst der durchsichtigste ponderabele Stoff die Strahlung auf längeren Strecken durch Absorption und Zerstreuung erheblich schwächt, wollen wir das letztere sogleich wieder in das Vakuum austreten lassen. Dies gelingt ohne nochmalige Zerlegung, wenn wir die Lage der zweiten Grenzfläche so wählen, daß das Strahlenbündel sie unter dem Polarisationswinkel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiert erreicht; dies soll in Fig. 2 bei B der Fall sein. Die Substanz bildet dann ein Prisma, doch liegt der Strahlengang im allgemeinen nicht, wie in der Figur angenommen ist, in einer Ebene.

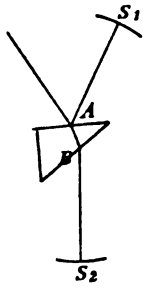


Fig. 2.

Das reflektierte Strahlenbündel lassen wir nun auf einen vollkommen spiegelnden Kugelspiegel S_1 auftreffen, welcher einen Punkt A der Fläche f zum Mittelpunkt hat; sein Radius sei R, seine Brennweite φ; bekanntlich ist

$$\varphi = \frac{R}{2}.$$

Es entwirft ein Bild von der Fläche f, dessen Lage und Form wir untersuchen wollen.

Beziehen wir die Koordinaten x, y, z und x', y', z' eines Punktes und seines Bildes auf ein Achsenkreuz, dessen x-Achse mit der Richtung des Strahlenbündels nach der Spiegelung an S_1 zusammenfällt, und dessen Anfang im Brennpunkt des Spiegels liegt, so lauten die Gesetze der geometrischen Optik

$$xx' = \varphi^2, \quad \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = -\frac{\varphi}{x}.$$

Für den Punkt A ist $x = x'$, da er offenbar in sich selbst abgebildet wird; also $x = x' = \varphi$. Für die seitliche und die Tiefenvergrößerung, die das ihn umgebende Flächenstück f bei der Abbildung erfährt, gilt demnach

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = -1,$$

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{\varphi^2}{x^2} = -1.$$

Ein Punkt C von f wird in denjenigen Punkt C' der Ebene von f abgebildet, welcher zu ihm in bezug auf A symmetrisch liegt (Fig. 3). Das Bild von f liegt in derselben Ebene wie f und unterscheidet sich von ihm nur durch eine Drehung vom Betrage π um den Punkt A. Wir fragen nun nach der optischen Weglänge W von C über einen Punkt des Spiegels S_1 nach C'.

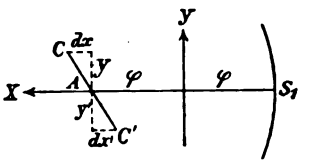


Fig. 3.

Zunächst ist unmittelbar einzusehen, daß W für alle Punkte von S_1 denselben Betrag hat. Führen wir sodann in der Ebene von f ein Koordinatensystem ξ, η ein, dessen Anfang in A liegt, so folgt aus der Reziprozität zwischen Objekt- und Bildpunkt, daß W sich bei Vertauschung von C und C', d. h. wenn man die Vorzeichen von ξ und η umkehrt, nicht ändert. Es gilt demnach in erster Näherung die Reihenentwickelung:

$$W = W_0 + \frac{1}{R}(a\xi^2 + b\eta^2 + c\xi\eta).$$

Nun ist W eine Länge; die einzigen ihm an Dimension gleichen unter seinen Bestimmungsstücken sind ξ, η und R. Die Koeffizienten a, b, c sind aber von ξ und η, daher auch von R unabhängig. Das Verhältnis der Differenz $W - W_0$ zur Wellenlänge λ,

$$\frac{W - W_0}{\lambda} = \frac{1}{R\lambda}(a\xi^2 + b\eta^2 + c\xi\eta),$$

läßt sich also durch Vergrößerung von R so klein machen, als man nur will, so groß die Dimensionen von f auch gegen λ sein mögen. Eine gegen die Wellenlänge kleine Strecke darf in der Optik stets gleich Null gesetzt werden. Wir werden daher W als längs der ganzen Fläche f konstant betrachten.

Auch das bei A gebrochene, bei B das Prisma verlassende

Strahlenbündel soll nun auf einen absolut reflektierenden Hohlspiegel S_2 auftreffen. Im Gegensatz zu S_1 darf dieser aber nicht Kugelform haben, da durch die Brechung bei B das Strahlenbündel astigmatisch geworden ist; er muß vielmehr so beschaffen sein, daß er jede Brennlinie des letzteren in sich selbst abbildet. Dann kehrt das von ihm zurückgeworfene Strahlenbündel nach B zurück, tritt dort wiederum ohne Spiegelung in das Prisma ein, wird gleichzeitig homozentrisch und entwirft bei A ein Bild von f. Da die Gesetze der Abbildung unabhängig von der Art sind, wie wir sie verwirklichen, so gilt für die Abbildung durch S_2 alles, was wir für die durch S_1 bewirkte gesagt haben. Wählen wir als den in sich selbst abgebildeten Punkt wiederum A, so fallen die beiden Bilder von f genau zusammen und die beiden Strahlenbündel interferieren bei ihrer Rückkehr in jedem Punkt der Bildfläche mit ein- und demselben Phasenunterschied.

Bei A entstehen durch abermalige Spiegelung und Brechung im allgemeinen zwei neue Strahlenbündel, von denen das eine in die Prismensubstanz eindringt. In ihm superponieren sich zwei Strahlenbündel von gleicher Intensität; denn jedes von ihnen ist durch eine Reflexion und eine Brechung bei A geschwächt. Wählen wir aber die optischen Weglängen von A nach S_1 und S_2 einander gleich, so ist ihr Phasenunterschied gleich π; denn einen Phasensprung von diesem Betrage hat das eine bei der Reflexion in A erfahren. Sie heben sich also auf. Die ganze Energie des einfallenden Strahlenbündels muß sich demnach in dem zweiten, von A aus in das Vakuum hinein fortschreitenden Strahlenbündel finden. Dies besitzt daher außer derselben Brennfläche f, der gleichen Öffnung und dem gleichen Einfallswinkel wie das einfallende auch die gleiche spezifische Intensität. Die erste Reflexion und Brechung bei A ist damit vollkommen rückgängig gemacht.

Zweiter Teil.

Die Entropie von zwei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

§ 4. Das Maß der Interferenzfähigkeit.

Es mögen zwei monochromatische, in den geometrischen Bestimmungsstücken, d. h. in der Größe der Brennfläche und des Öffnungswinkels, sowie in der Neigung gegen die Normale

der Brennfläche, übereinstimmende Strahlenbündel unbekannten Ursprungs gegeben sein. Wir sollen die Frage nach ihrer Interferenzfähigkeit beantworten. Nun ist diese im allgemeinen gerade so, wie die Intensitäten, langsam veränderlich; um die Vorstellung ein wenig zu vereinfachen, wollen wir den beiden Strahlenbündeln die geringste Länge zuschreiben, welche sie haben können, wenn sie in der Thermodynamik überhaupt noch eine selbständige Rolle spielen sollen. Sie müssen dann immer noch so lang sein, daß sie ihre Brennfläche während der kürzesten möglichen Dauer einer optischen Energiemessung beleuchten. Dann hat ihre Kohärenz ebenso wie die Intensitäten einen einzigen, bestimmten Wert.

Um sie zu ermitteln, müssen wir sie, da ihr Ursprung uns nach Voraussetzung unbekannt ist, durch Spiegelungen an vollkommenen Spiegeln so leiten, daß sie sich einmal kreuzen. Aber mangels jeden Urteils über ihren Gangunterschied dürfen wir keineswegs sogleich beim ersten Mal erwarten, die etwa vorhandene Interferenzfähigkeit zu entdecken. Vielmehr wird der Gangunterschied im allgemeinen oberhalb der Grenze liegen, bei welcher infolge der Inhomogenität der Strahlung die Interferenzfähigkeit selbst vollkommen kohärenter Strahlen aufhört. Wir müssen deshalb den Versuch oft wiederholen, indem wir den Gangunterschied jedesmal um einen unterhalb dieser Grenze liegenden Betrag verändern. Dabei muß dann einmal die Kohärenz zutage treten, wenn sie überhaupt vorhanden ist. Freilich wäre die Zahl der notwendigen Wiederholungen meist außerordentlich groß; denn selbst bei den feinsten Spektrallinien liegt die genannte Grenze des Gangunterschiedes unterhalb von 10^{-3} cm, während die Länge unserer Strahlenbündel sehr viel größer ist. Immerhin ist die Zahl der möglichen Wiederholungen eine ganz bestimmte, endliche, so daß mir gegen die prinzipielle Möglichkeit des Verfahrens nichts einzuwenden zu sein scheint.

Dem sich zunächst vielleicht erhebenden Einwurf, daß man die fraglichen Interferenzen wie die Strahlung überhaupt nur wahrnehmen könnte, wenn man sie absorbieren läßt, ist entgegenzuhalten, daß wir im Druck auf vollkommene Spiegel eine von Absorption unabhängige Wirkung der Strahlung auf die Materie kennen.

Haben wir dann das Vorhandensein von Kohärenz nachgewiesen, so müssen wir zur Feststellung ihres Maßes den Gangunterschied innerhalb engerer Grenzen variieren, bis wir die größte mögliche Deutlichkeit der Interferenzen erreichen; dann, wissen wir, ist der Gangunterschied so klein, daß die Inhomogenität der Strahlung keine Rolle mehr spielt. Solche Gangunterschiede wollen wir im folgenden allein in Betracht ziehen.

Der praktisch einzig in Betracht kommende Fall ist natürlich der, daß man Ursprung und Geschichte beider Strahlenbündel kennt; dann läßt sich, wie wir an mehreren Beispielen sehen werden, ihre Kohärenz leicht berechnen. Es mußte nur erst einmal festgestellt werden, daß sie, wie die Intensitäten, eine der Messung wenigstens prinzipiell stets zugängliche Größe ist. Anderenfalls dürfte sie in den Formeln der Thermodynamik nicht auftreten.

Statt von Strahlenbündeln, die aus vielen Wellen bestehen, sprechen wir in diesem Paragraphen nur von einzelnen Wellen; der Übergang zu Strahlenbündeln erfolgt dann so, daß wir zwischen je zwei einander entsprechenden Wellen beider Strahlenbündel dieselben Kohärenzverhältnisse voraussetzen. Dies ist gerechtfertigt; denn erlitten bei den Änderungen, denen das Strahlenbündel unterworfen wird, nicht alle ihm angehörenden Wellen das gleiche Schicksal, so müßten wir das Strahlenbündel in mehrere Teile zerlegt denken, für welche dies zutrifft.

Diese Wellen setzen wir nun als physikalisch homogen, die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$, welche die in ihnen stattfindenden Schwingungen darstellen, also als nahezu periodisch voraus. Nun ist es in der Optik zwar üblich geworden, in solchen Fällen mit einzelnen Sinusfunktionen zu rechnen; doch läßt sich dann der Unterschied zwischen kohärenten und inkohärenten Wellen nur nachträglich und etwas gewaltsam einführen. Wir ziehen deswegen die exaktere Darstellung durch Fouriersche Integrale vor:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(t) = \int d\nu\, F_\nu \cos(2\pi\nu t - \varphi_\nu), \\ g(t) = \int d\nu\, G_\nu \cos(2\pi\nu t - \gamma_\nu). \end{cases}$$

Die Integrationsbereiche, in welchen F_ν und G_ν merkliche

Werte besitzen, sind nach Maßgabe der spektralen Reinheit der Schwingungen schmal; doch brauchen wir diese Voraussetzung erst später einzuführen.

Bei der Superposition beider Wellen werden alle Energiegrößen proportional zu dem Mittelwerte

$$\overline{(f+g)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2} + \overline{2fg},$$

der für eine mit der Dauer der kürzesten optischen Messungen vergleichbare Zeit τ zu bilden ist. Wir berechnen $\overline{fg}$, indem wir die von Hrn. Planck[1]) gegebene Ableitung des Wertes von $\overline{f^2}$ ein wenig verallgemeinern.

Aus (1) folgt unmittelbar:

$$\overline{fg} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt \iint d\nu\, d\nu'\, F_\nu\, G_{\nu'} \cos(2\pi\nu t - \varphi_\nu)\cos(2\pi\nu' t - \gamma_{\nu'})$$

$$= \frac{1}{2\tau}\int_t^{t+\tau} dt \iint d\nu\, d\nu'\, F_\nu\, G_{\nu'} \Big\{\cos\big(2\pi(\nu'-\nu)t - (\gamma_{\nu'} - \varphi_\nu)\big) + \cos\big(2\pi(\nu'+\nu)t - (\gamma_{\nu'} + \varphi_\nu)\big)\Big\}.$$

Führen wir die Integration nach der Zeit aus, so folgt hieraus:

$$\overline{fg} = \tfrac{1}{2}\iint d\nu\, d\nu'\, F_\nu\, G_{\nu'} \Big\{\frac{\sin\pi(\nu'-\nu)\tau}{\pi(\nu'-\nu)\tau}\cos\big(\pi(\nu'-\nu)(2t+\tau) - (\gamma_{\nu'} - \varphi_\nu)\big) + \frac{\sin\pi(\nu'+\nu)\tau}{\pi(\nu'+\nu)\tau}\cos\big(\pi(\nu'+\nu)(2t+\tau) - (\gamma_{\nu'} + \varphi_\nu)\big)\Big\}.$$

Soll ein von der Zeit τ unabhängiger Mittelwert $\overline{fg}$ existieren, was erfahrungsgemäß der Fall ist, so muß die zweite, $\nu' + \nu$ enthaltende Hälfte dieses Integrals verschwindend klein sein; denn da τ gegen die Lichtperiode $1/\nu$ sehr groß ist, ist $(\nu+\nu')\tau$ eine große Zahl, der in Rede stehende Teil also sicher Funktion von τ. Das gleiche gilt für die erste Hälfte in den Bereichen des Integrationsintervalls, in welchen nicht $\nu' - \nu$ klein gegen ν und ν' ist; auch diese Bereiche dürfen nicht in Betracht kommen. Führen wir

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\nu' + \nu),$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}(\nu' - \nu)$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 69. 1900 oder M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 190. J. A. Barth, Leipzig 1906.

als neue Integrationsvariable ein, so können wir dies dahin ausdrücken, daß nur ein schmaler Streifen in der Umgebung der Gerade $\mu = 0$ für die Integration in Betracht kommen darf. Da in ihm

$$\frac{\sin 2\pi\mu\tau}{2\pi\mu\tau} = 1,$$

so finden wir die Gleichung:

$$(2)\quad \overline{fg} = \tfrac{1}{4}\iint d\lambda\, d\mu\, F_{\lambda-\mu}\, G_{\lambda+\mu} \cos\left(4\pi\mu t - (\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu})\right).$$

Alle diese Annahmen sind in der Hypothese der natürlichen Strahlung enthalten.

Schließen sich die Spektralbereiche der Schwingungen f und g, d. h. die Integrationsintervalle in den Gleichungen (1) gegenseitig aus, so folgte hieraus

$$\overline{fg} = 0$$

als Ersatz für die sonst häufig angewandte Formel:

$$\overline{\cos(2\pi\nu t - \varphi_\nu)\cos(2\pi\nu' t + \varphi_{\nu'})} = 0,$$

wenn ν und ν' voneinander verschieden sind. Ebenso ist $\overline{fg} = 0$ bei inkohärenten Schwingungen, auch wenn sie dem gleichen Spektralbereich angehören. Die Differenz der Phasen,

$$\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu},$$

schwankt dann ebenso schnell und unregelmäßig hin und her, wie jede dieser Phasenfunktionen selbst, so daß sich die in unregelmäßigster Weise bald positiven, bald negativen Werte der in (2) zu integrierenden Funktion bei der Integration gegenseitig aufheben.

Anders aber, wenn es sich um vollständig kohärente, homogene Wellen von gleicher Schwingungszahl handelt. Da die betrachteten Gangunterschiede nach Voraussetzung so klein sind, daß die Inhomogenität ohne Einfluß ist, besteht zwischen ihnen eine Beziehung

$$(3)\quad \gamma_\nu - \varphi_\nu = a,$$

wo a als Konstante betrachtet werden darf. Ebenso ist, wenn ϱ eine andere Konstante ist, G_ν mit F_ν durch eine Relation

$$(3a)\quad G_\nu = \varrho F_\nu$$

verbunden; denn wäre ϱ noch innerhalb so schmaler Inte-

grationsbereiche, wie sie in (1) homogener Strahlung entsprechen, veränderlich, so könnte man im Widerspruch zur Erfahrung aus der Geschichte der Strahlenbündel nicht auf ihre relative Stärke schließen; man müßte vielmehr noch die Funktionen F_ν und G_ν selbst kennen. Definiert man nun die Funktion $f^*(t)$ dahin, daß sie aus $f(t)$ hervorgeht, wenn man in (1) statt der Kosinusfunktion den Sinus setzt, also:

$$f^*(t) = \int d\nu\, F_\nu \sin(2\pi\nu t - \varphi_\nu), \tag{4}$$

so lassen sich die Gleichungen (3) und (3a) zusammenfassen in die Beziehung

$$g = \varrho\,(f\cos\alpha + f^*\sin\alpha), \tag{5}$$

so daß

$$\overline{fg} = \varrho\,(\overline{f^2}\cos\alpha + \overline{ff^*}\sin\alpha) \tag{6}$$

wird.

Setzen wir jetzt in (2) $g = f^*$, d. h.

$$\varrho = 1, \quad \alpha = \gamma_\nu - \varphi_\nu = \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu} = \frac{\pi}{2} + (\varphi_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu}),$$

so finden wir:

$$\overline{ff^*} = \tfrac{1}{4}\iint d\lambda\, d\mu\, F_{\lambda+\mu} F_{\lambda-\mu} \sin\left(4\pi\mu t - (\varphi_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu})\right).$$

Hier wechselt die zu integrierende Funktion mit μ ihr Zeichen. Der Integrationsbereich ist aber zur Geraden $\mu = 0$ symmetrisch. Also ist

$$\overline{ff^*} = 0; \tag{7}$$

diese Gleichung ist das Analogon zu

$$\overline{\cos 2\pi\nu t \sin 2\pi\nu t} = 0.$$

Bevor wir (7) anwenden, leiten wir noch einige Rechnungsregeln ab. Der Übergang von f zu f^* setzt $\varphi_\nu + \pi/2$ an die Stelle von φ_ν; die Wiederholung dieser Operation an f^* macht daraus $\varphi_\nu + \pi$, so daß in (1) alle Kosinusfunktionen ihr Zeichen wechseln; daraus folgt

$$(f^*)^* = -f. \tag{7a}$$

Ist ferner

$$f(t) + g(t) = k(t) = \int d\nu\, K_\nu \cos(2\pi\nu t - \varkappa_\nu),$$

so bestimmen sich nach (1) K_ν und $\varkappa_\nu$ aus der komplexen Gleichung

$$K_\nu e^{-i\varkappa_\nu} = F_\nu e^{-i\varphi_\nu} + G_\nu e^{-i\gamma_\nu}.$$

Aus ihr schließen wir, daß

$$\int d\nu\, K_\nu \sin(2\pi\nu t - \varkappa_\nu) = \int d\nu\, F_\nu \sin(2\pi\nu t - \varphi_\nu) + \int d\nu\, G_\nu \sin(2\pi\nu t - \gamma_\nu),$$

$$(f+g)^* = f^* + g^* \tag{7b}$$

ist.

Aus (6) und (7) folgt unmittelbar

$$\overline{fg} = \varrho \cos a\, \overline{f^2}, \tag{8}$$

und aus (5), (7a) und (7b) geht hervor

$$g^* = \varrho(-f \sin a + f^* \cos a),$$

$$\overline{fg^*} = -\varrho \sin a\, \overline{f^2}. \tag{9}$$

Der gleichzeitige Übergang von f zu f^* und von g zu g^*, welcher sowohl γ_ν als φ_ν um $\pi/2$ vergrößert, läßt aber die Phasendifferenz

$$\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu}$$

in (2) ungeändert; es ist deshalb

$$\overline{f^* g^*} = \overline{fg}, \tag{10}$$

speziell

$$\overline{f^{*2}} = \overline{f^2}. \tag{11}$$

Aus (5) und (9) können wir daher schließen:

$$\overline{f^* g} = -\overline{f g^*}. \tag{12}$$

In den Gleichungen (8), (9) und (12) waren f und g als vollkommen kohärent gedacht. Jetzt soll sich aber dem zu f vollständig kohärenten Anteil

$$g_f = \varrho(f \cos a + f^* \sin a) \tag{13}$$

an g die dazu vollkommen inkohärente Schwingung g_f' gemäß der Gleichung

$$g = g_f + g_f' \tag{14}$$

überlagern, so daß

$$\overline{g^2} = \overline{g_f^2} + \overline{g_f'^2} \tag{15}$$

wird. Dann sind f und g nur noch partiell kohärent. Trotzdem bleiben die Gleichungen (8), (9) und (12) in Kraft, weil man

nach (13) in ihnen überall g_f an die Stelle von g setzen kann. Wir machen jetzt von den folgenden Gleichungen Gebrauch:

$$\overline{g_f^2} = \varrho^2 \overline{f^2} \quad \text{(vgl. (13), (7) und (11))},$$

$$\overline{fg}^2 = \varrho^2 \cos^2 a \, \overline{f^2}^2 = \cos^2 a \, \overline{f^2} \cdot \overline{g_f^2} \quad \text{(vgl. (8))}, \tag{16}$$

$$\overline{f^* g}^2 = \overline{f g^*}^2 = \varrho^2 \sin^2 a \, \overline{f^2}^2 = \sin^2 a \, \overline{f^2} \cdot \overline{g_f^2} \quad \text{(vgl. (9) u. (12))}. \tag{17}$$

Durch Addition der beiden letzteren folgt:

$$\frac{\overline{fg}^2 + \overline{fg^*}^2}{\overline{f^2} \cdot \overline{g^2}} = \frac{\overline{g_f^2}}{\overline{g^2}}. \tag{18}$$

Dies Verhältnis der Intensität des zu f kohärenten Anteiles an g zur Gesamtintensität nennen wir die Kohärenz i_{fg}. Die Reihenfolge der Indizes ist gleichgültig, denn eine Vertauschung von f und g läßt nach (17) die linke Seite von (18) unberührt, so daß der Reziprozitätssatz

$$\frac{\overline{g_f^2}}{\overline{g^2}} = \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}} \tag{19}$$

besteht. Auch macht es nichts aus, wenn man f durch eine lineare Kombination $\alpha f + \beta f^*$ ersetzt; nach (7), (10), (11) und (12) ist nämlich

$$\begin{aligned}
\overline{(\alpha f + \beta f^*) g}^2 &= \alpha^2 \overline{fg}^2 + 2\alpha\beta \overline{fg} \cdot \overline{f^* g} + \beta^2 \overline{f^* g}^2, \\
\overline{(\alpha f + \beta f^*) g^*}^2 &= \beta^2 \overline{fg}^2 - 2\alpha\beta \overline{fg} \cdot \overline{f^* g} + \alpha^2 \overline{f^* g}^2, \\
\overline{(\alpha f + \beta f^*)^2} &= (\alpha^2 + \beta^2) \overline{f^2},
\end{aligned}$$

so daß man dabei den alten Wert wiederfindet. Hierin drückt sich die Unabhängigkeit der Kohärenz von der Intensität und der Phasendifferenz aus. Experimentell kann man sie ermitteln, indem man bei in dem angegebenen Sinn kleinen Gangunterschieden die Helligkeit an zwei Stellen eines Interferenzstreifens mißt, die um $^1/_4$ Streifenbreite voneinander abstehen. Ist ihr Betrag an der einen Stelle

$$I_1 = \overline{(f+g)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2} + 2\overline{fg},$$

so ist er an der anderen (vgl. (11))

$$I_2 = \overline{(f \pm g^*)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2} \pm 2\overline{fg^*},$$

so daß sich die Kohärenz nach der Formel

$$i_{fg} = \frac{\overline{fg}^2 + \overline{fg^*}^2}{\overline{f}^2 \cdot \overline{g}^2} = \frac{1}{4\,\overline{f}^2 \cdot \overline{g}^2}\left\{(J_1 - (\overline{f}^2 + \overline{g}^2))^2 + (J_2 - (\overline{f}^2 + \overline{g}^2))^2\right\}$$

berechnet. Wegen (15) ist

$$i_{fg} = \frac{\overline{g_f}^2}{\overline{g}^2} \tag{20}$$

stets ein positiver echter Bruch. Die Grenzfälle $i = 0$ und $i = 1$ bedeuten absolute Inkohärenz und vollständige Kohärenz.

In den späteren Formeln wird übrigens statt der Kohärenz i_{fg} meist die *„Inkohärenz"*

$$j_{fg} = 1 - i_{fg} = \frac{\overline{g_{f'}}^2}{\overline{g}^2} = \frac{\overline{f_g'}^2}{\overline{f}^2} = 1 - \frac{\overline{fg}^2 + \overline{fg^*}^2}{\overline{f}^2 \cdot \overline{g}^2} \tag{21}$$

auftreten.

Um ein Beispiel für die Verwendung des quantitativen Kohärenzbegriffes zu geben, denken wir uns von zwei vollständig kohärenten Strahlenbündeln das eine zweimal an selbst emittierenden Körpern gespiegelt. Wir fragen nach der Kohärenz des dann entstehenden Strahlenbündels zu dem nicht gespiegelten.

Bei der ersten Reflexion geht die Schwingung f in die ihr partiell kohärente

$$g = g_f + g_f'$$

über, diese wiederum bei der zweiten Reflexion in

$$h = h_g + h_g'.$$

f und h_g' sind in dem betrachteten Fall absolut inkohärent, darum auch h_g' und f_g', wenn man

$$f = f_g + f_g'$$

setzt. Aus den beiden letzten Gleichungen und (7b) folgt aber:

$$\overline{fh} = \overline{f_g h_g},$$

$$\overline{fh^*} = \overline{f_g h_g^*},$$

$$i_{fh} = \frac{\overline{fh}^2 + \overline{fh^*}^2}{\overline{f}^2 \cdot \overline{h}^2} = \frac{\overline{f_g h_g}^2 + \overline{f_g h_g^*}^2}{\overline{f_g}^2 \cdot \overline{h_g}^2} \cdot \frac{\overline{f_g}^2}{\overline{f}^2} \cdot \frac{\overline{h_g}^2}{\overline{h}^2}.$$

Der erste dieser drei Brüche ist die Kohärenz der vollständig kohärenten Wellen f_g und h_g, also 1, so daß (vgl. (20))

$$i_{fh} = i_{fg} \cdot i_{gh}$$

folgt.

Haben die spiegelnden Körper und die auffallenden Strahlenbündel gleiche Temperatur (isotherme Reflexion), so wird die Intensität bei der Reflexion nicht geändert; es ist vielmehr

$$\overline{f^2} = \overline{g^2} = \overline{h^2}.$$

Sind andererseits r_1 und r_2 die Reflexionsvermögen, so ist

$$\overline{g_f^2} = r_1 \overline{f^2},$$
$$\overline{h_g^2} = r_2 \overline{g^2},$$

so daß

$$i_{fg} = r_1, \quad i_{gh} = r_2, \quad i_{fh} = r_1 r_2$$

folgt.

Man sieht ohne weiteres, nach welchem Gesetz die Kohärenz zu dem anderen Strahlenbündel bei weiteren isothermen Spiegelungen abnimmt. Erleiden zwei partiell kohärente Strahlenbündel beide isotherme Spiegelungen mit den Reflexionsvermögen $r_1, r_2, \ldots r_n$ und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$, so wird ihre Kohärenz dadurch auf den Bruchteil des Anfangswertes herabgesetzt, welcher durch das Produkt $r_1 r_2 \ldots r_n \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_m$ gegeben ist.

§ 5. Die Entropie von zwei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

Wir sprechen im folgenden von linear polarisierten Strahlenbündeln, welche sich im allgemeinen zwar in verschiedenen Medien befinden, aber so beschaffen sind, daß man sie durch reguläre Spiegelungen und Brechungen in dasselbe Mittel und in ihm zur Deckung miteinander bringen kann. Nach dem Sinussatz der geometrischen Optik müssen dann ihre Brennflächen f, ihre Öffnungswinkel ω und ihre Neigungswinkel ϑ zur Normalen der Brennfläche mit dem Brechungsindex n des Mittels in der Beziehung stehen, daß der Ausdruck

$$n^2 f \omega \cos \vartheta$$

für alle einen und denselben Wert hat. Ihre Längen l müssen sich außerdem wie die Lichtgeschwindigkeiten q verhalten. Ferner sollen sie dieselbe Schwingungszahl ν und dieselbe spektrale Breite $d\nu$ besitzen. Wir setzen

$$n^2 f \omega \cos \vartheta \frac{l}{q} d\nu = \sigma, \tag{22}$$

und haben dann σ als für alle Strahlenbündel gleich zu betrachten.

Die Energie eines Strahlenbündels von der spezifischen Intensität $\mathfrak{K}$ beträgt

$$f\,\omega\cos\vartheta\,\frac{l}{q}\,\mathfrak{K}\,d\nu = \sigma\,\frac{\mathfrak{K}}{n^2}\,.$$

Bequemer aber als mit der spezifischen Intensität rechnet es sich mit der *„reduzierten spezifischen Intensität"*

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{K}}{n^2}\,;$$

denn es wird dabei nicht nur der Ausdruck für die Energie einfacher, sondern es enthalten auch die Temperatur- und die Entropieformel $\mathfrak{K}$ stets in der Verbindung $\mathfrak{K}/n^2$. Die letztere Formel lautet, waren h und k die Konstanten des Planckschen Energieverteilungsgesetzes, c die Lichtgeschwindigkeit und ν die Schwingungszahl bedeutet:

$$(23)\quad \begin{cases} E = \sigma\,L(\varkappa), \\ L(\varkappa) = \dfrac{k\nu^2}{c^2}\left[\left(1+\dfrac{c^2\varkappa}{h\nu^3}\right)\log\left(1+\dfrac{c^2\varkappa}{h\nu^3}\right) - \dfrac{c^2\varkappa}{h\nu^3}\log\left(\dfrac{c^2\varkappa}{h\nu^3}\right)\right]. \end{cases}$$ [1]

Jetzt sollen zwei derartige, in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisierte, partiell kohärente Strahlenbündel gleichzeitig an der ebenen Grenze zweier diathermanen Medien so gespiegelt und gebrochen werden, daß die vier dabei entstehenden Strahlenbündel sich paarweise genau überdecken. Sie müssen dann von verschiedenen Seiten auf die Grenze auftreffen und die Sinus ihrer Einfallswinkel müssen sich umgekehrt wie die Brechungsindizes verhalten (vgl. Fig. 4). Das Energieprinzip verlangt die Konstanz der Gesamtenergie $\sigma(\varkappa_1+\varkappa_2)$, in Verbindung mit dem Sinussatz also, daß

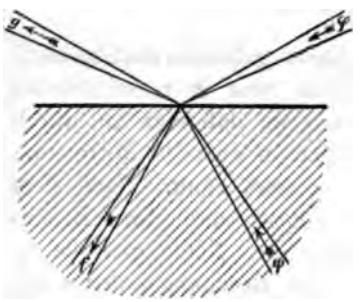


Fig. 4.

$$(24)\qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 = I'.$$

bei dem Vorgang invariant bleibt.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. **4**. p. 558; **6**. p. 818. 1901, sowie M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 156, Gleichung (229). Leipzig, J. A. Barth 1906.

Nun ist der betrachtete Vorgang umkehrbar; das Entropieprinzip fordert daher, daß auch die Entropie eine solche Invariante ist. Sie hängt im allgemeinen nicht von der Gesamtenergie allein ab, wie wir am Beispiel zweier inkohärenten Strahlenbündel sehen. Daher muß der Vorgang noch eine zweite, von I' unabhängige Invariante I'' besitzen, aber auch nicht mehr. Dann existierte noch eine dritte, so müßten alle drei Bestimmungsstücke des betrachteten Systems, nämlich die beiden reduzierten spezifischen Intensitäten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, sowie die Inkohärenz j, unverändert bleiben, während wir doch offenbar in der Wahl des Reflexionsvermögens einen Freiheitsgrad besitzen. Die Entropie hängt also sicherlich außer von σ nur von zwei Invarianten I' und I'' ab. Wir behaupten, daß

$$j\,\varkappa_1\,\varkappa_2 = I'' \tag{25}$$

diese zweite Invariante ist.

Um dies zu beweisen, gehen wir auf die Schwingungsvorgänge in entsprechenden Wellen der vier Strahlenbündel ein. Als Lichtvektor betrachten wir aber keine der beiden Feldstärken, sondern eine ihnen proportionale Größe, deren Quadrat im zeitlichen Mittelwert unmittelbar der Intensität $\varkappa$ gleich ist. In den beiden einfallenden Strahlenbündeln sollen die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ die Schwingung unmittelbar an der Grenze darstellen, in den beiden neu entstehenden die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$. Wäre $\psi = 0$, so wäre (vgl. Fig. 4)

$$f = \delta\varphi, \quad g = -\varrho\varphi;$$

da

$$\overline{f^2} + \overline{g^2} = \overline{\varphi^2}$$

sein muß, ist

$$\delta^2 + \varrho^2 = 1. \tag{26}$$

Wäre $\varphi = 0$, so gälte aber

$$f = \varrho\psi, \quad g = \delta\psi.$$

Die Größe ϱ, deren Quadrat das Reflexionsvermögen mißt, muß hier das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie das erste Mal, weil mit der einen dieser Spiegelungen der Phasensprung π verknüpft ist. Im allgemeinen ist daher

$$\begin{cases} f = \delta\varphi + \varrho\psi, \\ g = -\varrho\varphi + \delta\psi. \end{cases} \tag{27}$$

Da nun

$$j\varkappa_1\varkappa_2 = (1-i)\varkappa_1\varkappa_2 = \overline{f^2}\cdot\overline{g^2} - (\overline{fg}^2 + \overline{fg^*}^2)$$

ist, so ist zu zeigen, daß

$$\overline{f^2}\cdot\overline{g^2} - (\overline{fg}^2 + \overline{fg^*}^2) = \overline{\varphi^2}\cdot\overline{\psi^2} - (\overline{\varphi\psi}^2 + \overline{\varphi\psi^*}^2)$$

ist.

Nach (27), (26), (7) und (7b) ist

$$\begin{aligned}
\overline{f^2} &= \delta^2\overline{\varphi^2} + \varrho^2\overline{\psi^2} + 2\delta\varrho\,\overline{\varphi}\,\overline{\psi},\\
\overline{g^2} &= \varrho^2\overline{\varphi^2} + \delta^2\overline{\psi^2} - 2\delta\varrho\,\overline{\varphi}\,\overline{\psi},\\
\overline{fg} &= (\delta^2-\varrho^2)\overline{\varphi}\,\overline{\psi} + \delta\varrho\,(\overline{\psi^2} - \overline{\varphi^2}),\\
\overline{fg^*} &= (\delta^2+\varrho^2)\overline{\varphi}\,\overline{\psi^*} = \overline{\varphi\psi^*}.
\end{aligned}$$

Daraus schließen wir unter wiederholter Berücksichtigung von (26):

$$\begin{aligned}
\overline{f^2}\cdot\overline{g^2} - (\overline{fg}^2 + \overline{fg^*}^2) &= (\delta^2\overline{\varphi^2} + \varrho^2\overline{\psi^2})\,(\varrho^2\overline{\varphi^2} + \delta^2\overline{\psi^2})\\
&+ 2\delta\varrho\,(\delta^2-\varrho^2)\,\overline{\varphi}\,\overline{\psi}\,(\overline{\psi^2} - \overline{\varphi^2}) - 4\delta^2\varrho^2\,\overline{\varphi}\,\overline{\psi}^2\\
&- (\delta^2-\varrho^2)^2\,\overline{\varphi}\,\overline{\psi}^2 - \delta^2\varrho^2\,(\overline{\psi^2} - \overline{\varphi^2})^2\\
&- 2\delta\varrho\,(\delta^2-\varrho^2)\,\overline{\varphi}\,\overline{\psi}\,(\overline{\psi^2} - \overline{\varphi^2}) - \overline{\varphi\psi^*}^2\\
&= \overline{\varphi^2}\cdot\overline{\psi^2} - (\overline{\varphi\psi}^2 + \overline{\varphi\psi^*}^2),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die Entropie ist also Funktion von σ, von

$$I' = \varkappa_1 + \varkappa_2$$

und

$$I'' = j\varkappa_1\varkappa_2.$$

Um sie zu bestimmen, denken wir uns die Strahlenbündel inkohärent; dann ist

$$E = \sigma\,(L(\varkappa_1) + L(\varkappa_2)),$$

und wegen $j = 1$

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 + \varkappa_2 &= I'\\
\varkappa_1\varkappa_2 &= I'',
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \tfrac{1}{2}\,(I' + \sqrt{I'^2 - 4I''}),\\
\varkappa_2 &= \tfrac{1}{2}\,(I' - \sqrt{I'^2 - 4I''}),
\end{aligned}$$

oder umgekehrt. Daher ist die Entropie

$$E = \sigma\left[L\left(\tfrac{1}{2}\,(I' + \sqrt{I'^2 - 4I''})\right) + L\left(\tfrac{1}{2}\,(I' - \sqrt{I'^2 - 4I''})\right)\right].$$

Bei beliebigem Werte der Inkohärenz j geht diese Gleichung über in

$$(28)\quad \begin{cases} E = \sigma \left\{ L\left(\frac{1}{2}\left[(\varkappa_1 + \varkappa_2) + \sqrt{(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 4j\varkappa_1\varkappa_2}\right]\right) \\ \quad + L\left(\frac{1}{2}\left[(\varkappa_1 + \varkappa_2) - \sqrt{(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 4j\varkappa_1\varkappa_2}\right]\right)\right\}. \end{cases}$$

Diese Formel stellt die Entropie als Funktion der beiden reduzierten spezifischen Intensitäten und der Inkohärenz j dar.

Da nach (21)

$$(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 4j\varkappa_1\varkappa_2 = (\varkappa_1 - \varkappa_2)^2 + 4i\varkappa_1\varkappa_2,$$

sind die Argumente der beiden L-Funktionen stets reell und positiv. Für vollständig kohärente Wellen ($j = 0$) geht (28), da nach (23) $L(0) = 0$ ist, in

$$E = \sigma L(\varkappa_1 + \varkappa_2)$$

über, was mit dem in § 4 der ersten Abhandlung[1]) Gesagten übereinstimmt.

Wir wollen dies Resultat graphisch diskutieren. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\frac{c^3\varkappa_1}{h\nu^3} = a + x, \quad \frac{c^3\varkappa_2}{h\nu^3} = a - x.$$

E wird dann nach (28) und (23) proportional zu der Funktion

$$(29)\quad \begin{cases} \Phi(x,i) = f\left(a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right) \\ \qquad\quad - f\left(a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right), \end{cases}$$

wenn

$$f(x) = (1 + x)\log(1 + x) - x\log x$$

ist. Um eine anschaulichere Figur zu erhalten, haben wir statt j die Kohärenz i eingeführt; die Größe

$$a = \frac{c^3(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{2h\nu^3}$$

bleibt bei der gemeinsamen Spiegelung und Brechung unverändert, wir betrachten sie als Konstante und fragen nach der Fläche, welche durch (29) bestimmt ist, wenn man

$$x = \frac{c^3(\varkappa_1 - \varkappa_2)}{2h\nu^3}, \quad i \text{ und } \Phi(x,i)$$

als rechtwinklige Koordinaten im Raum betrachtet. Da in (29) x nur im Quadrat auftritt, ist sie zur Ebene $x = 0$ symmetrisch.

---

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906.

Eine physikalische Bedeutung kommt ihn aber nur in dem durch die Ungleichungen

$$0 \leqq i \leqq 1,$$

$$-a \leqq x \leqq a$$

abgegrenzten Bereich zu. Für $i = 0$ wird

$$\Phi = f(a + x) + f(a - x).$$

Den Verlauf dieser Kurve haben wir schon in § 1 der früheren Arbeit diskutiert; Φ nimmt für $x = \pm a$ den Wert $f(2a)$ an und steigt mit abnehmendem Absolutwert von x bis zu dem für $x = 0$, d. h. für zwei gleich starke Strahlenbündel erreichten Betrage $2f(a)$. Sie ist in der oberen Hälfte von Fig. 5 zu

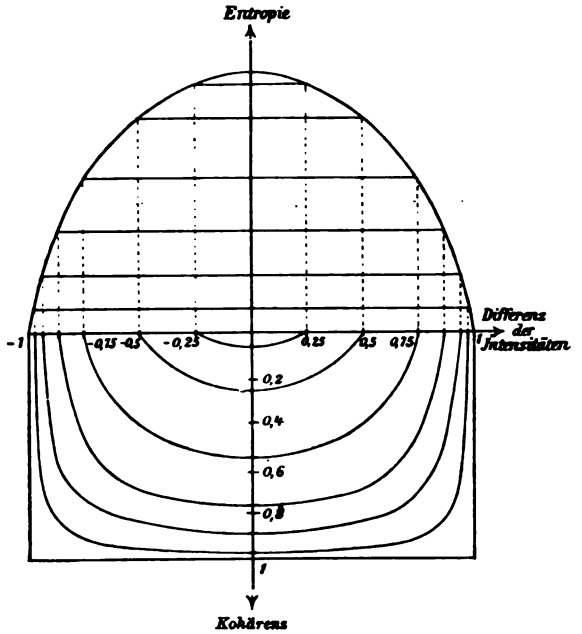


Fig. 5.

sehen, wo nach oben die Größe $\Phi - f(2a)$ in einem willkürlichen Maßstabe, und als Abszisse nach rechts die Größe x aufgetragen ist (a ist gleich 1 gesetzt). Für $i = 1$, sowie für

$x = \pm a$ wird $\Phi = f(2a)$. In den Rahmen dieser drei Geraden und der genannten Kurven ist die Entropiefläche eingespannt. Da

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = \left\{ f'\left(a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right) - f'\left(a - \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right)\right\} \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}}$$

ist, und

$$f'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

mit wachsendem x abnimmt, ist in dem ganzen physikalisch bedeutsamen Bereich der Klammerausdruck negativ, dagegen sein Multiplikator positiv, demnach:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} < 0;$$

dies gilt auch im Punkt $x = 0$, $i = 0$, wo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = \lim_{i=0} \frac{f'\left(a(1+\sqrt{i})\right) - f'\left(a(1-\sqrt{i})\right)}{\sqrt{i}} = 2a f''(a) = -\frac{2}{1+a}$$

wird. *Mit wachsender Kohärenz nimmt die Entropie bei konstanten Intensitäten ab.* Nur längs der Grenzlinien $x = \pm a$ wird $\partial \Phi / \partial i = 0$, weil hier, wo $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ Null ist, der Kohärenzbegriff keine Bedeutung mehr hat. Für $i = 1$ wird $\partial \Phi / \partial i$ zugleich mit $-f'\left(a - \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right)$ negativ unendlich; desgleichen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left\{ f'\left(a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right) - f'\left(a - \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}\right)\right\} \frac{x(1-i)}{\sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}}$$

für $x = \pm a$. Die Entropiefläche fällt also zu den drei sie begrenzenden Geraden senkrecht ab.

Die beste Übersicht über die Form der Fläche gewährt aber die Betrachtung der Kurven gleicher Entropie, deren Gleichung nach (29)

$$(1-i)(a^2 - x^2) = (a^2 - x_0^2)$$

autet; x_0^2 ist der Parameter der Schar. Fig. 5 zeigt in ihrer unteren Hälfte einige dieser Kurven; als Ganzes gibt sie eine Darstellung der Entropiefläche nach Art der darstellenden Geometrie. Denkt man sie längs der x-Achse um 90° geknickt und jede der Niveaulinien bis zur Höhe der ihr ent-

sprechenden Geraden gehoben, so gelangt sie dabei auf die Entropiefläche.

Da die Differentialgleichung dieser Schar

$$\frac{di}{dx} = -\frac{2x(1-i)}{a^2-x^2}$$

lautet, sind die Punkte $x = \pm a$, $i = 1$, in welchen di/dx unbestimmt wird, singuläre Punkte. In der Tat setzt sich die durch sie führende Kurve, für welche $x_0^2 = a^2$ wird, aus den Geraden $x = \pm a$ und $i = 1$ zusammen. Diese drei Begrenzungsgeraden der Entropiefläche bilden die tiefste Niveaulinie. Die höchste hier auftretende Niveaulinie ist dagegen durch $x_0^2 = 0$ definiert, sie liegt aber nur mit dem Punkt $x = 0$, $i = 0$ in dem physikalisch bedeutsamen Bereich. Von allen Strahlenpaaren gleicher Gesamtenergie haben also zwei inkohärente, gleich starke Strahlenbündel die größte Entropie. Auf den anderen Niveaulinien erreicht i seinen Maximalwert x_0^2/a^2 für $a = 0$, während x seinen größten im genannten Bereich liegenden Absolutwert $|x_0|$ für $i = 0$ annimmt.

Diese Kurven gleicher Entropie geben nun unmittelbar an, wie sich die Kohärenz eines Strahlenpaares bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung ändert. Alle Zustände, welche durch Punkte derselben Kurve dargestellt sind, lassen sich dabei durch passende Wahl des Reflexionsvermögens ineinander überführen. Zwei inkohärente Strahlen lassen sich z. B. in zwei partiell kohärente verwandeln, wenn man ihre Intensitäten ganz oder teilweise ausgleicht. Die maximale Kohärenz wird bei vollständigem Ausgleich erreicht; waren die Intensitäten der inkohärenten Strahlen $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$, so beträgt sie

$$i_{\max.} = \frac{x_0^2}{a^2} = \left(\frac{\varkappa_1' - \varkappa_2'}{\varkappa_1' + \varkappa_2'}\right)^2.$$

Umgekehrt läßt sich jedes Paar partiell kohärenter Strahlenbündel durch gemeinsame Reflexion und Brechung in ein vollkommen inkohärentes Paar verwandeln, wenn man die Differenz der Intensitäten möglichst vergrößert. Ausgenommen sind nur vollständig kohärente Strahlenbündel, die wegen

$$I'' = j\varkappa_1\varkappa_2 = 0$$

stets wieder in zwei vollkommen kohärente übergehen, und

zwei vollständig inkohärente Strahlenbündel von gleicher Intensität, die stets unverändert bleiben.

§ 6. Partiell polarisierte Strahlung.

Eine partiell polarisierte Welle läßt sich in den verschiedensten Arten als Superposition zweier senkrecht zueinander polarisierten Wellen auffassen. Herrschen in einem Paar von aufeinander senkrechten Richtungen die Schwingungen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, so herrschen in einem anderen Paar die Schwingungen

$$f = \cos\omega \cdot \varphi + \sin\omega \cdot \psi,$$
$$g = -\sin\omega \cdot \varphi + \cos\omega \cdot \psi,$$

wo ω der Winkel zwischen entsprechenden Richtungen beider Paare ist. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber von (27) wegen (26) nur in der Bezeichnungsweise; wir können ohne weiteres

$$\delta = \cos\omega, \quad \varrho = \sin\omega$$

setzen. Daher sind die Ausdrücke

$$I' = \varkappa_1 + \varkappa_2,$$
$$I'' = j\varkappa_1\varkappa_2$$

von der Wahl der Schwingungsrichtungen unabhängig. Wir können der Berechnung der Entropie eines polarisierten Strahlenbündels

$$E = \sigma\Big\{L\left[\tfrac{1}{2}\left((\varkappa_1 + \varkappa_2) + \sqrt{(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 4j\varkappa_1\varkappa_2}\right)\right]$$
$$+ L\left[\tfrac{1}{2}\left((\varkappa_1 + \varkappa_2) - \sqrt{(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 4j\varkappa_1\varkappa_2}\right)\right]\Big\},$$

jedes beliebige Paar zueinander senkrechter Richtungen zugrunde legen. Ein partiell polarisiertes Strahlenbündel läßt sich auch thermodynamisch als Superposition zweier senkrecht zueinander polarisierten, partiell kohärenten Strahlenbündeln auffassen; daß diese in der Fortpflanzungsrichtung zusammenfallen, macht nichts aus.

Hieraus fließt eine Bestätigung unserer Theorie, welche sich wohl auch zu einem zweiten Beweise ausgestalten ließe. Diese logische Zerlegung in zwei partiell kohärente, senkrecht zueinander polarisierte Schwingungen läßt sich nämlich ohne Verlust an Kohärenz oder Intensität verwirklichen, wenn man das

Strahlenbündel durch eine doppelbrechende Substanz hindurchgehen läßt. Die Reflexion beim Ein- und Austritt kann man dadurch beliebig herabgesetzt denken, daß man die Brechungsindizes des Kristalles als nur wenig von dem der Umgebung verschieden annimmt. Freilich ist dann auch die Doppelbrechung gering, doch läßt sich trotzdem auf hinreichend langen Strecken die vollständige Trennung der beiden Strahlenbündel erzielen. Da der Vorgang umkehrkar ist, lassen sich zwei inkohärente, linear polarisierte Strahlenbündel auch auf dem Wege ohne Entropiezunahme in zwei partiell kohärente verwandeln, daß man sie zunächst durch Doppelbrechung zu einem partiell polarisierten Strahlenbündel zusammensetzt und dann dies nach zwei anderen Richtungen durch Doppelbrechung zerlegt.

Die Niveaukurven in Fig. 5 zeigen die Kohärenzverhältnisse in einem partiell polarisierten Strahl. Die Kohärenz ist Null für die beiden Hauptrichtungen, da die entsprechenden Intensitäten, die Hauptintensitäten $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$, den größtmöglichen Unterschied besitzen. Da die Intensitäten für zwei andere, aufeinander senkrechte Schwingungen sich nach Gleichungen

$$\varkappa_1 = \varkappa_1' \cos^2\omega + \varkappa_2' \sin^2\omega,$$
$$\varkappa_2 = \varkappa_1' \sin^2\omega + \varkappa_2' \cos^2\omega$$

aus dem Azimut ω gegen die Hauptrichtungen berechnen, und

$$j\,\varkappa_1\,\varkappa_2 = \varkappa_1'\,\varkappa_2'$$

sein muß, ist ihre Kohärenz

$$i = 1 - j = 1 - \frac{\varkappa_1'\,\varkappa_2'}{\varkappa_1\,\varkappa_2} = \frac{(\varkappa_1' - \varkappa_2')^2 \cos^2\omega \sin^2\omega}{(\varkappa_1' \cos^2\omega + \varkappa_2' \sin^2\omega)(\varkappa_1' \sin^2\omega + \varkappa_2' \cos^2\omega)}.$$

Ihren Maximalwert

$$i_{\max.} = \left(\frac{\varkappa_1' - \varkappa_2'}{\varkappa_1' + \varkappa_2'}\right)^2$$

erreicht sie nach § 4, wenn $\varkappa_1 = \varkappa_2$, also $\omega = \pm\pi/4$ wird.

Es liegt nahe, $i_{\max.}$ zur Messung des Polarisationsgrades zu verwenden und die „*Polarisation*"

$$p = \sqrt{i_{\max.}} = \left|\frac{\varkappa_1' - \varkappa_2'}{\varkappa_1' + \varkappa_2'}\right|$$

zu setzen.[1]) Durch Angabe der Gesamtintensität

$$\varkappa = \varkappa_1' + \varkappa_2'$$

1) Dies Maß hat schon Chr. Jensen (Beiträge zur Photometrie des Himmels, Diss. Kiel 1898; Metereol. Zeitschr. 36. p. 545. 1901) benutzt.

und der Polarisation ist dann ein Strahlenbündel vollkommen definiert. Seine Entropie beträgt

$$E = \sigma \left\{ L\left(\varkappa \frac{1+p}{2}\right) + L\left(\varkappa \frac{1-p}{2}\right)\right\}, \tag{31}$$

da

$$\varkappa_1' = \varkappa \frac{1+p}{2}, \quad \varkappa_2' = \varkappa \frac{1-p}{2}$$

oder umgekehrt ist.

Eine Ausnahmestellung nimmt elliptisch polarisiertes Licht ein, welches stets vollkommen polarisiert ist, so daß es sich in keine zwei inkohärente Hauptschwingungen zerlegen läßt; ihm ist der Wert $p = 1$ zuzuschreiben, welcher sich aus (30) für vollkommene lineare Polarisation ergibt. Seine Entropie berechnet sich dann richtig nach (31) zu

$$E = \sigma L(\varkappa).$$

Dritter Teil.

Die Entropie von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

§ 7. Die Kohärenzbeziehungen zwischen drei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

Am Ende von § 4 lernten wir ein Beispiel kennen, in welchem zwischen den Kohärenzen i_{fg}, i_{gh} und i_{hf} eine Gleichung bestand; dies war aber nur durch die Annahme vollkommener Inkohärenz zwischen den Schwingungen f_g' und h_g' bedingt. Jetzt wollen wir die Frage nach dem Zusammenhang dieser drei Kohärenzen in voller Allgemeinheit lösen.

Wir gehen zu diesem Zweck wiederum von den Gleichungen

$$\begin{cases} f = f_g + f_g' \\ h = h_g + h_g' \end{cases} \tag{32}$$

aus, in denen die Schwingungen f_g' und h_g' zu g vollständig inkohärent, dagegen f_g und h_g zu g vollkommen kohärent sein sollen. Die letzteren sind daher auch zueinander vollkommen kohärent, d. h. es besteht eine Gleichung

$$h_g = \lambda(f_g \cos a + f_g^* \sin a), \tag{33}$$

während die Schwingungen f_g' und h_g' untereinander noch alle Grade der Kohärenz, von 0 bis 1, haben können. Wir werden im allgemeinen

$$h_g' = (h_g')_{f_g'} + (h_g')_{f_g'}' \tag{34}$$

zu setzen haben, wo

$$(h_g')_{f_g'} = \mu(f_g' \cos b + f_g'^* \sin b) \tag{35}$$

zu f_g' vollkommen kohärent, während $(h_g')_{f_g'}$ zu f_g' absolut inkohärent ist.

Aus den Gleichungen (32) folgt aber

$$\begin{cases} \overline{fh} = \overline{f_g h_g} + \overline{f_g' h_g'} \\ \overline{f^* h} = \overline{f_g^* h_g} + \overline{f_g'^* h_g'}, \end{cases} \tag{36}$$

und aus (33), (34), (35):

$$\overline{f_g h_g} = \lambda \cos a \overline{f_g^2} = \cos a \sqrt{\overline{f_g^2} \cdot \overline{h_g^2}},$$

$$\overline{f_g^* h_g} = \lambda \sin a \overline{f_g^2} = \sin a \sqrt{\overline{f_g^2} \cdot \overline{h_g^2}},$$

$$\overline{f_g' h_g'} = \mu \cos b \overline{f_g'^2} = \cos b \sqrt{\overline{f_g'^2} \cdot \overline{(h_g')_{f_g'}^2}},$$

$$\overline{f_g'^* h_g'} = \mu \sin b \overline{f_g'^2} = \sin b \sqrt{\overline{f_g'^2} \cdot \overline{(h_g')_{f_g'}^2}}.$$

Nach Einsetzung dieser Werte in (36) ergibt sich im Hinblick auf (20) und (21)

$$i_{fh} = \frac{\overline{fh}^2 + \overline{f^* h}^2}{\overline{f^2} \cdot \overline{h^2}} = \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g^2}}{\overline{h^2}} + \frac{\overline{(h_g)_{f_g'}^2}}{\overline{h_g'^2}} \cdot \frac{\overline{f_g'^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g'^2}}{\overline{h^2}}$$

$$+ 2\cos(a-b) \sqrt{\frac{\overline{(h_g')_{f_g'}^2}}{\overline{h_g'^2}} \cdot \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g^2}}{\overline{h^2}} \cdot \frac{\overline{f_g'^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g'^2}}{\overline{h^2}}}.$$

$$i_{fh} = i_{fg} i_{gh} + i_{f_g' h_g'} j_{fg} j_{gh} + 2\cos(a-b) \sqrt{i_{f_g' h_g'} i_{fg} i_{gh} j_{fg} j_{gh}}. \tag{37}$$

Zwischen den drei Kohärenzen i_{fh}, i_{fg} und i_{gh} besteht also im allgemeinen keine Gleichung, sondern nur eine Ungleichung; da nämlich sowohl $i_{f_g' h_g'}$ als $\cos(a-b)$ höchstens gleich 1 sind, so ist

$$i_{fh} \leqq (\sqrt{i_{fg} i_{gh}} + \sqrt{j_{fg} j_{gh}})^2. \tag{38}$$

Man überzeugt sich leicht, daß der rechtsstehende Ausdruck höchstens den Wert 1 erreichen kann, indem man $i_{fg} = \cos^2 \alpha$, $i_{gh} = \cos^2 \beta$ setzt; diese Ungleichung beschränkt i_{fh} also stets auf einen Teil des ihm an sich zur Verfügung stehenden Bereiches von 0 bis 1.

Nach (37) kann man offenbar, abgesehen von der Einschränkung durch (38), die vier Kohärenzen i_{fh}, i_{fg}, i_{gh} und $i_{f_g' h_g'}$ willkürlich bestimmen. Es könnte zunächst scheinen,

als wären die Kohärenzbeziehungen zwischen drei Schwingungen sogar erst durch sechs Größen, außer den genannten nämlich durch $i_{f'_h g'_h}$ und $i_{g'_f h'_f}$, vollständig festgelegt. Doch bestehen zwischen diesen Größen zwei stets identisch erfüllte Gleichungen, so daß nun vier von ihnen unabhängig sind.

Betrachten wir nämlich die schon in (32) und (34) angewandte Zerlegung:

$$h = h_g + h'_g,$$
$$h'_g = (h'_g)_{f'_g} + (h'_g)_{\mathfrak{f}'_g}.$$

Die Summe

$$h_g + (h'_g)_{f'_g}$$

läßt sich hier nach (34) und (35) als homogene lineare Funktion von g, g^*, f'_g und f'^*_g darstellen; oder wenn man vermöge der Gleichungen

$$f = f_g + f'_g,$$
$$f^* = f^*_g + f'^*_g,$$

f'_g und f'^*_g eliminiert, als Funktion von f, f^*, g und g^*, oder, was wiederum dasselbe sagt, als homogene lineare Funktion von f, f^*, g'_f und g'^*_f. Im Gegensatz hierzu ist $(h'_g)_{f'_g}$ nach Definition inkohärent zu f'_g, aber als Differenz den zu g inkohärenten Schwingungen h'_g und $(h'_g)_{f'_g}$ auch inkohärent zu g; daher auch inkohärent zu f_g und zu f, und ebenso zu g_f und g'_f, der Differenz von g und g_f.

Wir haben demnach eine Zerlegung

$$h = \alpha_1 g'_f + \beta_1 g'^*_f + \gamma_1 f + \delta_1 f^* + h_1$$

gefunden, wo h_1 zu g'_f und f inkohärent ist. Es kann nur *eine* solche Zerlegung geben. Setzen wir nämlich noch eine andere Zerlegung

$$h = \alpha_2 g'_f + \beta_2 g'^*_f + \gamma_2 f + \delta_2 f^* + h_2$$

an, wo h_2 wiederum zu g'_f und f inkohärent ist, so wäre durch die Relation

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2) g'_f + (\beta_1 - \beta_2) g'^*_f + (\gamma_1 - \gamma_2) f + (\delta_1 - \delta_2) f^* + (h_1 - h_2)$$

die Differenz $h_1 - h_2$ durch g'_f und f ausgedrückt, während sie doch zu beiden inkohärent sein muß. Dieser Widerspruch zwingt zu dem Schluß, daß die Koeffizienten der letzten Gleichung identisch Null sind, daß also $\alpha_1 = \alpha_2$ etc. und $h_1 = h_2$ ist.

Dennoch finden wir eine zweite solche Zerlegung, wenn wir von den Gleichungen

$$h = h_f + h_f'$$
$$h_f' = (h_f')_{g_f'} + (h_f')_{g_f'}$$

ausgehen. Denn hier ist

$$h_f + (h_f')_{g_f'}$$

eine homogene lineare Funktion von f, f^*, g_f' und $g_f'^*$, dagegen $(h_f')_{g_f'}$ nach Definition zu g_f' und als Differenz von h_f' und $(h_f')_{g_f'}$ zu f inkohärent. Daher muß

$$h_g + (h_g')_{f_g'} = h_f + (h_f')_{g_f'}$$
$$(h_g')_{f_g'} = (h_f')_{g_f'}$$

sein. Und da nach (21)

$$\overline{(h_g')_{f_g'}^2} = j_{f_g' h_g'}\, \overline{h_g'^2} = j_{f_g' h_g'} j_{gh}\, \overline{h^2} \tag{39a}$$

ist, folgt aus der letzteren Beziehung die Gleichung

$$j_{f_g' h_g'} j_{gh} = j_{g_f' h_f'} j_{fh},$$

welche sich wegen der Gleichberechtigung der Schwingungen f, g, h unmittelbar zu der Doppelgleichung

$$\frac{j_{f_h' g_h'}}{j_{fg}} = \frac{j_{g_f' h_f'}}{j_{gh}} = \frac{j_{h_g' f_g'}}{j_{hf}} \tag{39}$$

erweitern läßt. Der Symmetrie halber führen wir als vierte unabhängige Variable zur Charakterisierung der Kohärenzverhältnisse neben den drei Inkohärenzen „zweiter Ordnung" j_{fg}, j_{gh}, j_{hf} die „*Inkohärenz dritter Ordnung*"

$$J = j_{fg} j_{gh} j_{h_g' f_g'} = j_{fg} j_{g_f' h_f'} j_{hf} = j_{f_h' g_h'} j_{gh} j_{hf} \tag{40}$$

ein. Sie ist ein positiver echter Bruch, welcher Null wird, wenn auch nur zwei der Schwingungen vollkommen kohärent sind, und welcher für drei vollständig inkohärente Schwingungen den Wert 1 annimmt. Denn setzt man in (37)

$$i_{fg} = i_{gh} = i_{hf} = 0,$$

so folgt

$$i_{f_g' h_g'} = 0, \quad j_{f_g' h_g'} = 1$$

und aus (40)

$$J = 1.$$

Ohne der Frage nach der einfachsten Art, J zu bestimmen, näher zu treten, wollen wir wenigstens zeigen, daß es

prinzipiell meßbar ist. Kennen wir nämlich die Inkohärenz j_{fg}, so wissen wir, in welchem Stärkeverhältnis wir f und g zu superponieren haben, um f_g' aus f zu isolieren; die dazu nötige Phasendifferenz läßt sich durch Probieren bestimmen. Ebenso können wir auch h_g' isolieren, wenn j_{gh} bekannt ist, und dann die Inkohärenz $j_{f_g' h_g'}$, aus welchen sich nach (40) J berechnen läßt, nach der in § 4 erwähnten Methode messen.

Die Zahl der unabhängigen Variablen, welche (bei gleichen Werten von σ) ein System von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln bestimmen, beträgt 7; es sind dies nämlich die drei reduzierten spezifischen Intensitäten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, die drei Inkohärenzen zweiter Ordnung j_{12}, j_{23}, j_{31} und die Inkohärenz dritter Ordnung J. Um die Anzahl der Invarianten zu ermitteln, von welchen die Entropie eines solchen Systems abhängt, müssen wir nun zunächst fragen, wieviel Freiheitsgrade wir besitzen, wenn wir es auf umkehrbarem Wege in ein anderes verwandeln.

§ 8. Die Anzahl der Freiheitsgrade.

Ein optischer Vorgang, welcher drei Schwingungen ψ, φ, χ in drei andere, f, g, h, überführt, ist dem Superpositionsprinzip gemäß stets durch Gleichungen von der Form

$$(41)\quad \begin{cases} f = a_1(\varphi\cos\alpha_1 + \varphi^*\sin\alpha_1) + b_1(\psi\cos\beta_1 + \psi^*\sin\beta_1) \\ \qquad\qquad + c_1(\chi\cos\gamma_1 + \chi^*\sin\gamma_1), \\ h = a_2(\varphi\cos\alpha_2 + \varphi^*\sin\alpha_2) + b_2(\psi\cos\beta_2 + \psi^*\sin\beta_2) \\ \qquad\qquad + c_2(\chi\cos\gamma_2 + \chi^*\sin\gamma_2), \\ g = a_3(\varphi\cos\alpha_3 + \varphi^*\sin\alpha_3) + b_3(\psi\cos\beta_3 + \psi^*\sin\beta_3) \\ \qquad\qquad + c_3(\chi\cos\gamma_3 + \chi^*\sin\gamma_3) \end{cases}$$

dargestellt. Verläuft er ohne Absorption und macht er aus drei Strahlenbündeln von gleichem Werte von σ drei von *demselben* Wert σ (d. h. gilt der Sinussatz der geometrischen Optik), so muß die gesamte Energie $\sigma\Sigma\varkappa$, also auch $\Sigma\varkappa$ ungeändert bleiben, d. h. es muß

$$(42)\qquad \overline{f^2} + \overline{g^2} + \overline{h^2} = \overline{\varphi^2} + \overline{\psi^2} + \overline{\chi^2}$$

sein. Für die Momentanwerte f^2 etc. läßt sich eine solche Gleichung nicht aufstellen. Bei gemeinsamer Spiegelung und

Brechung von zwei Strahlenbündeln an einer planparallelen Platte z. B. wäre

$$(f^2+g^2)-(\varphi^2+\psi^2)$$

proportional zur Abnahme der in der Platte befindlichen Energie, also nur im zeitlichen Mittel gleich Null. Nach (41), sowie nach (7), (10), (11) und (12) ist aber

$$\overline{f^2}+\overline{g^2}+\overline{h^2}=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\,\overline{\varphi^2}+\ldots$$
$$+2\,(a_1 b_1\cos(\alpha_1-\beta_1)+a_2 b_2\cos(\alpha_2-\beta_2)+a_3 b_3\cos(\alpha_3-\beta_3))\,\overline{\varphi\psi}+\ldots$$
$$+\,2\,(a_1 b_1\sin(\alpha_1-\beta_1)+a_2 b_2\sin(\alpha_2-\beta_2)+a_3 b_3\sin(\alpha_3-\beta_3))\,\overline{\varphi\psi^*}+\ldots$$

Gleichung (42) fordert daher die Gültigkeit der folgenden neun Identitäten:

$$(43)\quad\begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1, \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1, \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1, \\ a_1 b_1\cos(\alpha_1-\beta_1)+a_2 b_2\cos(\alpha_2-\beta_2)+a_3 b_3\cos(\alpha_3-\beta_3)=0, \\ b_1 c_1\cos(\beta_1-\gamma_1)+b_2 c_2\cos(\beta_2-\gamma_2)+b_3 c_3\cos(\beta_3-\gamma_3)=0, \\ c_1 a_1\cos(\gamma_1-\alpha_1)+c_2 a_2\cos(\gamma_2-\alpha_2)+c_3 a_3\cos(\gamma_3-\alpha_3)=0, \\ a_1 b_1\sin(\alpha_1-\beta_1)+a_2 b_2\sin(\alpha_2-\beta_2)+a_3 b_3\sin(\alpha_3-\beta_3)=0, \\ b_1 c_1\sin(\beta_1-\gamma_1)+b_2 c_2\sin(\beta_2-\gamma_2)+b_3 c_3\sin(\beta_3-\gamma_3)=0, \\ c_1 a_1\sin(\gamma_1-\alpha_1)+c_2 a_2\sin(\gamma_2-\alpha_2)+c_3 a_3\sin(\gamma_3-\alpha_3)=0. \end{cases}$$

Von den 18 Parametern $a_1, a_2 \ldots \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ in (41) sind demnach neun willkürlich zu wählen. Doch entspricht nicht jedem von diesen ein Freiheitsgrad zur Veränderung der Intensitäten und Kohärenzgrößen. Vielmehr kann man aus den Gleichungen (41) auch drei Beziehungen zwischen den Funktionen

$$F=f\cos\lambda+f^*\sin\lambda, \qquad \Phi=\varphi\cos\lambda'+\varphi^*\sin\lambda',$$
$$G=g\cos\mu+g^*\sin\mu, \qquad \Psi=\psi\cos\mu'+\psi^*\sin\mu',$$
$$H=h\cos\nu+h^*\sin\nu, \qquad X=\chi\cos\nu'+\chi^*\sin\nu'$$

ableiten, welche lauten:

$$F=a_1\,[\Phi\cos(\alpha_1+\lambda-\lambda')+\Phi^*\sin(\alpha_1+\lambda-\lambda')]$$
$$+\,b_1\,[\Psi\cos(\beta_1+\lambda-\mu')+\Psi^*\sin(\beta_1+\lambda-\mu')]$$
$$+\,c_1\,[X\cos(\gamma_1+\lambda-\nu')+X^*\sin(\gamma_1+\lambda-\nu')]\ \text{etc.}$$

Hier treten die Differenzen der sechs Phasenverschiebungen $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ auf, von denen fünf voneinander unabhängig

sind; um die Gleichungen (41) zu vereinfachen, können wir beispielsweise

$$\alpha_1 + \lambda - \lambda' = 0, \qquad \beta_1 + \lambda - \mu' = 0,$$
$$\beta_2 + \mu - \mu' = 0, \qquad \gamma_2 + \mu - \nu' = 0,$$
$$\gamma_3 + \nu - \nu' = 0$$

setzen. Die Anzahl der Gleichungen (43) bleibt davon unberührt, wie man leicht sieht. Nun haben aber die Schwingungen F, G, H, Φ, Ψ, X dieselben Intensitäten wie f, g, h, φ, ψ, χ; sie stehen auch in denselben Kohärenzbeziehungen zueinander, wie die letzteren. Zur Änderung der Intensitäten und Kohärenzbeziehungen stehen uns also nur vier Freiheitsgrade zur Verfügung.

Dieselbe Überlegung für n Strahlenbündel ergibt $2n^2$ Parameter in den n zu (41) analogen Gleichungen, dagegen n^2 Beziehungen, welche den Identitäten (43) entsprechen; für bloße Phasenveränderungen werden dabei $2n-1$ Freiheitsgrade verbraucht. Zur Veränderung der Intensitäten und Kohärenzbeziehungen bleiben demnach

$$2n^2 - n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$$

Freiheitsgrade übrig; für $n = 2$ nur einer, in Übereinstimmung mit § 5, welcher uns für die drei Variabelen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, j_{12} zwei Invarianten kennen lehrte.

Dies Ergebnis hat aber nur dann für uns Bedeutung, wenn ein Vorgang von der betrachteten Art in der Natur möglich ist, und wenn wir sicher sind, daß er umkehrbar verläuft. Denken wir uns nun ein System von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln nacheinander drei gemeinsamen Spiegelungen und Brechungen von je zwei Strahlenbündeln unterworfen, welche durch die Gleichungen (vgl. (26) und (27))

$$(44)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \delta\varphi + \varrho\psi, \\ \psi_1 = -\varrho\varphi + \delta\psi, \end{cases} \quad \chi_1 = \chi,$$

$$\begin{cases} \psi_2 = \varepsilon\psi_1 + \sigma\chi_1, \\ \chi_2 = -\sigma\psi_1 + \varepsilon\chi_1, \end{cases} \quad \varphi_2 = \varphi_1,$$

$$\begin{cases} f = \zeta\chi_2 + \tau\varphi_2, \\ g = -\tau\chi_2 + \zeta\varphi_2, \end{cases} \quad h = \psi_2,$$

$$\delta^2 + \varrho^2 = \varepsilon^2 + \sigma^2 = \zeta^2 + \tau^2 = 1$$

dargestellt sind. Deuten wir φ, ψ, χ; $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$; $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$; f, g, h als rechtwinklige Koordinaten im Raum, so stellt jeder dieser drei Vorgänge die Drehung des Koordinatenkreuzes um eine seiner Achsen dar. Bekanntlich läßt sich jede Drehung um den Anfangspunkt durch drei solche Drehungen ersetzen, während eine vierte zu keinem Ergebnis führt, das nicht auch schon mit dreien zu erhalten wäre. Der durch (44) dargestellte Vorgang gibt uns also drei Freiheitsgrade in die Hand.

Offenbar erhalten wir aber einen vierten, wenn z. B. nicht $\varphi_2 = \varphi_1$, sondern

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cos\alpha + \varphi_1^* \sin\alpha$$

ist. Daher läßt sich jeder absorptionslose, mit dem Sinussatz verträgliche Vorgang, welcher ein System von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln in ein anderes umwandelt, durch drei gemeinsame Spiegelungen und Brechungen von je zwei Strahlenbündeln ersetzen. Dieser Satz ist auch auf mehr als drei Strahlenbündel zu übertragen (nur ist dann die Zahl der Spiegelungen und Brechungen größer) und beweist, daß Absorptionslosigkeit und Gültigkeit des Sinussatzes hinreichende Bedingungen für die Umkehrbarkeit eines optischen Vorganges sind.

§ 9. Die Entropie.

Nach § 7 haben wir sieben unabhängige Variabele, nach § 8 vier Freiheitsgrade. Es muß also drei Invarianten geben, welche die einzigen Kombinationen darstellen, in denen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, j_{12}, j_{23}, j_{31} und J in der Formel für die Entropie auftreten können. Da wir jede mögliche Umwandlung unseres Systems durch eine Reihe gemeinsamer Spiegelungen und Brechungen von zwei Strahlenbündeln ersetzen können, und die drei Invarianten naturgemäß bezüglich der Indizes 1, 2, 3 symmetrisch sind, genügt für jede Invariante der Nachweis der Unveränderlichkeit bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung der Strahlenbündel 1 und 2.

Bei diesem Vorgang sind aber nach § 5 unveränderlich die Größen

(45) $$\varkappa_1 + \varkappa_2$$

und

(46) $$j_{12}\varkappa_1\varkappa_2;$$

ferner die Intensität $\varkappa_3$ des unverändert bleibenden Strahlenbündels 3, sowie die Größe

(47) $$j_{13}' j_{23} \varkappa_3 .$$ [1])

Setzen wir nämlich wieder

$$\varkappa_1 = \overline{f^2}, \quad \varkappa_2 = \overline{g^2}, \quad \varkappa_3 = \overline{h^2},$$

so ist nach (39a)

$$j_{13}' j_{23} \varkappa_3 = j_{f_g' h_g'} j_{g h} \overline{h^2} = \overline{(h_g')_{f_g'}^2} ;$$

und $(h_g')_{f_g'}$ ist nach § 7 der zu f und g inkohärente Anteil an h, während

$$h - (h_g')_{f_g'} = h_g + (h_g')_{f_g'}$$

eine lineare Kombination von f und g darstellt; also auch eine lineare Kombination der Schwingungen, in welche f und g bei der Spiegelung und Brechung übergehen, während $(h_g')_{f_g'}$ auch zu den letzteren inkohärent ist. Eine derartige Zerlegung ist aber (ebenfalls nach § 7) eindeutig; daher bleibt $(h_g')_{f_g'}$ bei Spiegelung und Brechung unverändert, und ebenso der Ausdruck

$$j_{12}' j_{12} \varkappa_3 .$$

Schließlich behält dabei noch der Ausdruck

(48)
$$\begin{cases} j_{23} \varkappa_2 \varkappa_3 + j_{31} \varkappa_3 \varkappa_1 = g^2 . \overline{h^2} - (\overline{g h}^2 + \overline{g h^*}^2) \\ \qquad\qquad + \overline{f^2} . \overline{h^2} - (\overline{f h}^2 + \overline{f h^*}^2) \end{cases}$$

seinen Wert. Denn setzt man nach (26) und (27)

$$\begin{aligned} f &= \delta \varphi + \varrho \psi, \\ g &= -\varrho \varphi + \delta \psi, \end{aligned} \qquad h = \chi ,$$
$$\delta^2 + \varrho^2 = 1,$$

so erhält man:

$$\overline{f^2} = \delta^2 \overline{\varphi^2} + \varrho^2 \overline{\psi^2} + 2 \delta \varrho \overline{\varphi \psi}, \qquad \overline{g^2} = \varrho^2 \overline{\varphi^2} + \delta^2 \overline{\psi^2} - 2 \delta \varrho \overline{\varphi \psi},$$
$$\overline{f h} = \delta \overline{\varphi \chi} + \varrho \overline{\psi \chi}, \qquad \overline{g h} = -\varrho \overline{\varphi \chi} + \delta \overline{\psi \chi},$$
$$\overline{f h^*} = \delta \overline{\psi \chi^*} + \varrho \overline{\psi \chi^*}, \qquad \overline{g h^*} = -\varrho \overline{\varphi \chi^*} + \delta \overline{\psi \chi^*},$$
$$\begin{aligned} \overline{f^2} . \overline{h^2} - (\overline{f h}^2 + \overline{f h^*}^2) &= \delta^2 [\overline{\varphi^2} . \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi \chi}^2 + \overline{\varphi \chi^*}^2)] \\ &+ \varrho^2 [\overline{\psi^2} . \overline{\chi^2} - (\overline{\psi \chi}^2 + \overline{\psi \chi^*}^2)] \\ &+ 2 \delta \varrho [\overline{\varphi \psi} . \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi \chi} . \overline{\psi \chi} + \overline{\varphi \chi^*} . \overline{\psi \chi^*})], \end{aligned}$$

1) j_{12}' soll die früher als $j_{f_g' h_g'}$ bezeichnete Größe sein.

$$\overline{g^2}\cdot\overline{h^2}-(\overline{gh}^2+\overline{gh^*}^2)=\varrho^2[\overline{\varphi^2}\cdot\overline{\chi^2}-(\overline{\varphi\chi}^2+\overline{\varphi\chi^*}^2)]$$
$$+\delta^2[\overline{\psi^2}\cdot\overline{\chi^2}-(\overline{\psi\chi}^2+\overline{\psi\chi^*}^2)]$$
$$-2\delta\varrho[\overline{\varphi\psi}\cdot\overline{\chi^2}-(\overline{\varphi\chi}\cdot\overline{\psi\chi}+\overline{\varphi\chi^*}\cdot\overline{\psi\chi^*})].$$

Daraus folgt durch Addition die zu beweisende Gleichung:

$$\overline{g^2}\cdot\overline{h^2}-(\overline{gh}^2+\overline{gh^*}^2)+\overline{f^2}\cdot\overline{h^2}-(\overline{fh}^2+\overline{fh^*}^2)$$
$$=\overline{\psi^2}\cdot\overline{\chi^2}-(\overline{\psi\chi}^2+\overline{\psi\chi^*}^2)+\overline{\varphi^2}\cdot\overline{\chi^2}-(\overline{\varphi\chi}^2+\overline{\varphi\chi^*}^2).$$

Gelingt es uns jetzt, aus den Ausdrücken (45), (46), (47), (48) und $\varkappa_3$ drei Kombinationen zu bilden, die sich durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 nicht ändern, so sind dies die gesuchten Invarianten. Addieren wir nun zu (45) $\varkappa_3$, so erhalten wir die erste Größe

$$I'=\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3,$$

auf welche dies Kriterium zutrifft; addieren wir ferner (46) und (48), so finden wir die zweite dieser Art, nämlich

$$I''=j_{12}\varkappa_1\varkappa_2+j_{23}\varkappa_2\varkappa_3+j_{31}\varkappa_3\varkappa_1;$$

und multiplizieren wir schließlich (46) und (47), so finden wir in Rücksicht auf Gleichung (40), nach welcher

$$J=j_{12}j_{23}j'_{13}$$

in den Indizes 1, 2, 3 symmetrisch ist, als dritte Invariante

$$I'''=J\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3.$$

Für drei inkohärente Strahlenbündel ist nun nach §§ 4 und 7

$$j_{12}=j_{23}=j_{31}=J=1.$$

Läßt sich unser System auf umkehrbarem Wege auf solche zurückführen, so bestimmen sich ihre Intensitäten K_1, K_2, K_3 aus den Gleichungen:

$$K_1+K_2+K_3=I',$$
$$K_1K_2+K_2K_3+K_3K_1=I'',$$
$$K_1K_2K_3=I'''.$$

Daraus folgt:

Die Entropie eines Systems von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln beträgt:

$$E=\sigma[L(K_1)+L(K_2)+L(K_3)], \tag{49}$$

wobei K_1, K_2, K_3 *die Wurzeln der kubischen Gleichung*

$$K^3 - I' K^2 + I'' K - I''' = 0 \tag{50}$$

sind, und die Koeffizienten I', I'', I''' *die Werte*

$$\begin{cases} I' = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \\ I'' = j_{12}\varkappa_1\varkappa_2 + j_{23}\varkappa_2\varkappa_3 + j_{31}\varkappa_3\varkappa_1, \\ I''' = J\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 \end{cases} \tag{51}$$

haben. Dabei sind, um es zu wiederholen, die $\varkappa$ die reduzierten spezifischen Intensitäten der Strahlenbündel, die j die in § 4 definierten Inkohärenzen zweiter und J die Inkohärenz dritter Ordnung.

Ist $\varkappa_3 = 0$, so verschwindet I''', also auch eine von den drei Wurzeln von (50); da sich zugleich I'' auf $j_{12}\varkappa_1\varkappa_2$ reduziert, findet man unmittelbar die Formel (28) für die Entropie zweier partiell kohärenter Strahlen wieder. Ist $J = 0$, so verschwindet ebenfalls I''' und eine der Wurzeln. Das System läßt sich dann auf *zwei* inkohärente Strahlenbündel zurückführen. Hierher gehört auch der Fall, daß von den drei Strahlenbündeln zwei vollkommen kohärent sind. Dann ist eine der Größen j, etwa j_{12}, gleich Null, nach (40) also auch J, während aus (37), indem man die Indizes f, g, h mit 1, 2, 3 vertauscht, $j_{13} = j_{23}$ folgt, so daß

$$I'' = j_{13}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\varkappa_3$$

wird. Man sieht hieraus, daß zwei vollkommen kohärente Strahlenbündel einem einzigen thermodynamisch äquivalent sind, dessen spezifische Intensität die Summe ihrer spezifischen Intensitäten ist; denn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ treten dann nur noch in der Verbindung $\varkappa_1 + \varkappa_2$ auf. Sind endlich alle drei Strahlenbündel vollkommen kohärent, so verschwinden alle Inkohärenzen, mit ihnen die Inverianten I'' und I''' und zwei der Wurzeln von Gleichung (50), während die dritte gleich I' wird. Die Entropie eines solchen Systems ist also nach (49) und (51)

$$E = \sigma L(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3).$$

Schon an diesen Beispielen und ebenso an dem trivialen Fall dreier inkohärenter Strahlenbündel, in welchem $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ selbst die Wurzeln der Gleichung (50) sind, sieht man, daß diese reelle positive Wurzeln haben kann. Negative reelle

Wurzeln sind auch schon allein dadurch ausgeschlossen, daß ihre Koeffizienten abwechselnd positiv und negativ sind. Dagegen ist mir der Beweis nicht gelungen, daß komplexe Wurzeln unmöglich sind. Träten solche einmal auf, so ließe sich das gegebene System auf keinem umkehrbaren Wege in drei vollkommen inkohärente Strahlenbündel verwandeln, und der Beweis von Formel (49) würde insofern hinfällig, als die Art der Abhängigkeit der Entropie von den Invarianten I', I'', I''' unbestimmt bliebe, obwohl diese Formel auch dann noch einen reellen Wert lieferte.

Ebenso lassen wir es zweifelhaft, wie sich unser Ergebnis auf mehr als drei Strahlenbündel überträgt. Die erste Invariante hat dann natürlich den Wert

$$I' = \sum_l \varkappa_l ,$$

und die zweite

$$I'' = \frac{1}{2!} \sum_l \sum_m I_{lm} \varkappa_l \varkappa_m . \quad l \pm m .$$

Die Doppelsumme hier setzt sich nämlich zusammen aus dem Glied

$$j_{12} \varkappa_1 \varkappa_2 ,$$

ferner aus Termen, die wie

$$j_{34} \varkappa_3 \varkappa_4$$

die Indizes 1 und 2 nicht enthalten, und aus Ausdrücken von der Form

$$j_{1l} \varkappa_1 \varkappa_l + j_{2l} \varkappa_2 \varkappa_l ;$$

alle diese Summanden bleiben aber bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung der Strahlenbündel 1 und 2 unverändert Der Faktor $\frac{1}{2!}$ ist hinzugesetzt, weil jeder Summand $j_{lm} \varkappa_l \varkappa_m$ auch noch in der Form $j_{ml} \varkappa_m \varkappa_l$ auftritt.

Man kann vermuten, und die Betrachtung am Schluß der nächsten Paragraphen stützt diese Annahme, daß

$$I''' = \frac{1}{3!} \sum_l \sum_m \sum_n J_{lmn} \varkappa_l \varkappa_m \varkappa_n ,$$

$$I'''' = \frac{1}{4!} \sum_l \sum_m \sum_n \sum_o J_{lmno} \varkappa_l \varkappa_m \varkappa_n \varkappa_o \text{ etc.}$$

wird, wo J_{lmno} eine „Inkohärenz vierter Ordnung“ ist; bei

allen diesen Summenbildungen sind nur voneinander verschiedene Werte der Indizes l, m, n, o zuzulassen. Die Entropie wäre dann

$$E = \sigma \sum^{l} L(K_l),$$

wo die K_l die n Wurzeln der Gleichung

$$K^n - I' K^{n-1} + I'' K^{n-2} - \ldots \pm I^{(n)} = 0$$

bedeuteten. Doch scheinen mir auf diesem Gebiete noch manche Schwierigkeiten zu liegen.

Allgemeine Folgerungen.

In § 4 wurde gezeigt, daß die isotherme Spiegelung, d. h. die Reflexion eines Strahlenbündels an einem Körper von gleicher Temperatur, die Kohärenz des ersteren zu einem anderen Strahlenbündel herabsetzt; und in § 5 wurde abgeleitet, daß mit abnehmender Kohärenz die Entropie zunimmt. Demnach ist die isotherme Spiegelung, welche als umkehrbar zu bezeichnen ist, wenn es sich nur um den reflektierenden Körper und das gespiegelte Strahlenbündel handelt, irreversibel, sobald man noch ein ihm partiell kohärentes Strahlenbündel mit in Betracht zieht. Der eigentliche Grund dafür liegt aber nicht in dem Vorgang an der Grenzfläche, sondern allein in der Absorption und Zerstreuung des in den Körper eindringenden Strahlenbündels; denn dies büßt dabei zwar nicht seine Intensität, wohl aber die Kohärenz zu dem genannten ein.

Ferner ist in einem von vollkommen spiegelnden Wänden eingeschlossenen, absorbierende und diathermane Körper enthaltenden Hohlraum Gleichheit der Temperatur aller Körper und Strahlenbündel noch nicht hinreichende Bedingung für den Zustand maximaler Entropie. Vielmehr ist es denkbar, daß trotz des vollzogenen Temperaturausgleiches noch partielle Kohärenz zwischen einigen Strahlenbündeln besteht. Bei jeder Absorption und Zerstreuung wird diese aber herabgesetzt, während neue Kohärenzen nicht geschaffen werden; denn gleichtemperierte, inkohärente Strahlen liefern nach § 5 auch bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung stets wieder inkohärente Strahlen. Daher nähert sich der Zustand mit der Zeit sicher dem durch absolute Inkohärenz gekennzeichneten Entropie-

maximum. Die Theorie ist also vollkommen im Recht, wenn sie auf Gleichgewichtszustände das Additionstheorem anwendet. Nur falls der Hohlraum gar keine absorbierenden Substanzen enthält, können sich in ihm — wie auch andere instabile Strahlungszustände[1]) — Kohärenzen dauernd halten.

Eine andere Folgerung betrifft die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden Körpern. Bei fehlender Absorption lassen sich dabei drei Stadien unterscheiden[2]): Im ersten schreitet die Welle mit Gruppengeschwindigkeit fort und erleidet periodische Formänderungen, indem an die Stelle der Schwingung f

$$f\cos\alpha + f^*\sin\alpha$$

tritt, wobei α zur zurückgelegten Strecke proportional ist; Kohärenzverhältnisse werden dadurch nicht berührt. Im zweiten bewirkt die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit eine stärker und stärker werdende Formänderung, welche die Kohärenz natürlich immer mehr herabsetzt. Im dritten Stadium endlich ist die Welle in einen langen Zug angenäherter Sinusschwingungen aufgelöst, deren Periode sich nur langsam ändert. Sinusschwingungen gleicher Periode sind aber stets interferenzfähig, ganz unabhängig von ihrem Ursprung. Man könnte dann also die Strahlung verschiedener Körper zur Interferenz bringen, was sich unmittelbar zur Konstruktion eines Perpetuum mobile zweiter Art verwenden ließe.[3]) Der zweite Hauptsatz fordert daher, daß die Strahlung praktisch vollkommen absorbiert und zerstreut ist, bevor sie das letzte Stadium erreicht.

Jetzt können wir aber zeigen, daß dem Entropieprinzip zufolge nicht einmal das zweite, viel früher eintretende Stadium ohne wesentliche Schwächung erreicht werden darf. Leiten wir nämlich das eine von zwei kohärenten, anfangs im Vakuum befindlichen Strahlenbündeln durch ein dispergierendes Mittel, so würde im zweiten Stadium mit abnehmender Kohärenz die Entropie wachsen. Lassen wir es darauf wieder ins Vakuum austreten, und das andere in demselben Mittel dieselbe Strecke

1) M. Planck, Vorl. über Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906. § 51 und § 52.

2) M. Laue, Ann. d. Phys. 18. p. 523. 1905.

3) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906, vgl. § 3.

zurücklegen, so erlitte dies dieselbe Änderung der Schwingungsform, die Kohärenz und mit ihr die Entropie nähme wieder den Anfangswert an. Auch diesem Widerspruch mit dem Entropieprinzip entgeht man nur durch die Annahme starker Absorption. Tatsächlich ist meines Wissens auch noch nie eine Abnahme der Interferenzfähigkeit bei der Fortpflanzung durch dispergierende Mittel beobachtet worden. Selbst bei einem Woodschen Versuch[1]), bei welchem das Licht der gelben Heliumlinie sehr stark anomal dispergierenden Natriumdampf durchsetzte, behielt es seine Kohärenz kollkommen.

Es ist bemerkenswert, daß diese zweite Einschränkung im Gegensatz zu der ersteren sich nicht auf das Prinzip von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zweiter Art zurückführen läßt, sondern auf dem Boltzmannschen Gedanken des Zusammenhanges zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit und der daraus entspringenden Planckschen Idee der Nichtgültigkeit des Additionstheorems beruht; denn nur auf dieser Grundlage läßt sich überhaupt die Kohärenz thermodynamisch werten.

Zum Schluß wollen wir noch einen Schritt zur Deutung unseres Ergebnisses im Sinne dieser Theorie unternehmen. Sind die Intensitäten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zweier Strahlenbündel groß gegen $h\nu^3/c^2$ und ist ihre Inkohärenz j_{12} nicht gerade klein gegen 1, so sind in Gleichung (28) die Argumente der beiden L-Funktionen von derselben Größenordnung wie $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, und man kann Formel (23) durch die einfachere Beziehung

$$(52) \qquad L(\varkappa) = \frac{k\nu^2}{c^2}\log\left(\frac{c^2\varkappa}{h\nu^3}\right), \quad E = \sigma\frac{k\nu^2}{c^2}\log\left(\frac{c^2\varkappa}{h\nu^3}\right)$$

ersetzen. Wir befinden uns dann, da für die Temperatur T' hieraus

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial L}{\partial \varkappa} = \frac{k^2\nu^3}{c^2\varkappa}$$

folgt, im Gültigkeitsbereich des Rayleighschen Strahlungsgesetzes[2]); d. h. wir vernachlässigen die Größe des elementaren Wirkungsquantums (Lichtquants). Da die Wahrscheinlich-

1) R. W. Wood, Phil. Mag. (6) 8. p. 324. 1904.
2) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 159. Leipzig 1906.

keit $W(x)$ eines Strahlenbündels mit seiner Entropie durch die universelle Beziehung

$$E = k \log W$$

verknüpft ist, wird dabei

$$W(x) = \left(\frac{c^3 x}{h \nu^3}\right)^{\sigma \frac{\nu^2}{c^2}}. \tag{53}$$

Setzen wir nun (52) in (28) ein, so finden wir für die Entropie und die Wahrscheinlichkeit eines Systems von zwei partiell kohärenten Strahlenbündeln nach (53)

$$E = \sigma \frac{k \nu^2}{c^2} \log \left[\left(\frac{c^3}{h \nu^3}\right)^3 j_{12}\, x_1\, x_2\right],$$

$$W = \left[\left(\frac{c^3}{h \nu^3}\right)^3 j_{12}\, x_1\, x_2\right]^{\sigma \frac{\nu^2}{c^2}} = W(x_1) \cdot W(j_{12} x_2).$$

Bei absoluter Inkohärenz wären demnach die Wahrscheinlichkeiten beider Strahlenbündel einfach zu multiplizieren, wie das selbstverständlich ist. Für partiell kohärente Strahlenbündel hat man dagegen gemäß unserer Definition der Inkohärenz j (Gleichung (21)) dabei von der Intensität des einen den Anteil abzuziehen, der von dem zum anderen Strahlenbündel kohärenten Anteil der Schwingung herrührt, und nur ihren dazu inkohärenten Anteil zu berücksichtigen; denn dessen Intensität ist

$$\overline{g_f'^2} = j_{fg}\, \overline{g^2} = j_{12}\, x_2.$$

Bei drei Strahlenbündeln, für welche j_{12}, j_{23}, j_{31} und J nicht gerade klein gegen 1 sein dürfen, geht Formel (49) durch Substitution von (52) gemäß (50) und (51) über in

$$E = \sigma \frac{k \nu^2}{c^2} \log \left[\left(\frac{c^3}{h \nu^3}\right)^3 K_1\, K_2\, K_3\right] = \sigma \frac{k \nu^2}{c^2} \log \left[\left(\frac{c^3}{h \nu^3}\right)^3 J\, x_1\, x_2\, x_3\right].$$

Da nach (40)

$$J = j_{12}\, j_{23}\, j'_{31},$$

so wird nach (53)

$$W = \left[\left(\frac{c^3}{h \nu^3}\right)^3 x_1 \cdot j_{12}\, x_2 \cdot j_{23}\, j'_{31}\, x_3\right]^{\sigma \frac{\nu^2}{c^2}}$$

$$= W(x_1) \cdot W(j_{12} x_2) \cdot W(j_{23}\, j'_{31}\, x_3).$$

Es ist aber nach (39a)

$$j_{23}\, j'_{31}\, x_3 = j_{gh}\, j_{h_g' f_g'}\, \overline{h^2} = \overline{(h_g')'^2_{f_g'}}$$

derjenige Anteil an der Intensität $\varkappa_3$, welcher allein von dem zu den beiden anderen Strahlenbündeln inkohärenten Anteil der Schwingung h herrührt.

Man sieht ohne weiteres, wie sich die Wahrscheinlichkeit von vier, fünf und mehr Strahlenbündeln berechnen wird; unsere Vermutung über die Entropie, die wir am Ende von § 9 aussprachen, findet hierin eine Stütze. Auch ahnt man, daß unsere rein phänomenologisch abgeleiteten Formeln im Lichte der Wahrscheinlichkeitstheorie einen einfachen Sinn erhalten werden. Diesen zu entdecken, muß das nächste Ziel der Thermodynamik der Interferenzerscheinungen sein.

Berlin, März 1907.

(Eingegangen 27. März 1907.)

2. *Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender zylindrischer Hülle; von F. Harms.*

Von A. Sommerfeld[1]) ist das Problem der Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen längs eines Drahtes ganz streng behandelt und der Einfluß von Drahtmaterial und Drahtdicke auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit diskutiert worden. An nicht zu dünnen Drähten von gut leitendem Material pflanzen sich die Wellen fast genau mit Lichtgeschwindigkeit (c) fort, wenn der Draht in Luft eingebettet ist. Ersetzt man die Luft durch ein unendlich ausgehntes Dielektrikum (D.E.K. ε), so sinkt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit natürlich auf $c/\sqrt{\varepsilon}$. Läßt man das Dielektrikum sich auf eine äußerst dünne den Draht umschließende Schicht zusammenziehen, so muß sein Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder verschwinden; für endliche Dicken des Dielektrikums (isolierte Leitungen, Hochspannungskabel[2]) wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit demnach zwischen c und $c/\sqrt{\varepsilon}$ liegen müssen. Die Berechnung dieser Geschwindigkeit läßt sich durch eine Erweiterung des von Sommerfeld angewandten Verfahrens ebenfalls ganz streng ausführen. Es genügt jedoch fast immer, wenigstens für realisierbare Fälle, die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß anzusetzen. Dadurch wird die Behandlung des Problems auch für die numerische Berechnung verhältnismäßig einfach.

I. Die Differentialgleichungen des Problems.

r sei der Radius eines unendlich langen Drahtes mit geradliniger Achse, ϱ der äußere Radius der isolierenden Hülle, ε_2 deren Dielektrizitätskonstante.

Wir führen Zylinderkoordinaten z, r, φ ein und lassen die z-Achse mit der Drahtachse zusammenfallen. Nehmen

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 233—290. 1899. Diese Abhandlung wird im folgenden mit l. c. zitiert werden.

2) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. 26. p. 1003—1007. 1905.

wir nun noch an, daß rings um den Draht herum die Kräfte symmetrisch angeordnet sind[1]) (also $\partial/\partial\varphi = 0$), so bleiben

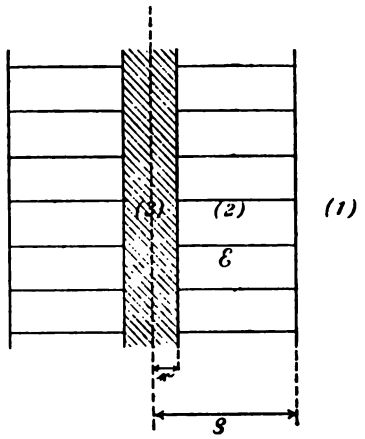


Fig. 1.

von den in Zylinderkoordinaten transformierten Maxwellschen Gleichungen nur folgende drei übrig:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + 4\pi c^2 \sigma \mathfrak{E}_z = c \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial r \mathfrak{H}_\varphi}{\partial r}, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + 4\pi c^2 \sigma \mathfrak{E}_r = -c \dfrac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial z}, \\ \mu \dfrac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = c \left[\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} \right]. \end{cases}$$

Die Kraftkomponenten $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$ lassen sich nach Hertz[2]) darstellen als Differentialquotienten einer skalaren Funktion Π:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} r \dfrac{\partial \Pi}{\partial r}; \quad \mathfrak{E}_r = -\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}; \\ \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} + 4\pi c \sigma \dfrac{\partial \Pi}{\partial r}. \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in das System (1) ein, so findet man für Π die Differentialgleichung[1])

$$(3)\qquad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + 4\pi \mu \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \Delta \Pi.$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 238 u. 239.
2) H. Hertz, Wied. Ann. **36**. p. 1—22. 1889.

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird wesentlich vereinfacht durch die Annahme, daß die Abhängigkeit von der Zeit eine harmonische sei[1]), also ohne zeitliche Dämpfung. Dagegen hat man bei endlicher Leitfähigkeit des Drahtes[2]) eine örtliche Dämpfung einzuführen, die der im Draht als Joulesche Wärme vernichteten elektromagnetischen Energie entspricht. Diese Annahme ist nicht nötig, wenn die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß genommen wird. Man kann dann schreiben[3])

$$\Pi = e^{2\pi i\left(\frac{t}{\tau}+\frac{z}{\lambda}\right)} . u = e^{i\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\frac{z}{v}\right)} . u, \tag{4}$$

wenn unter u eine Funktion von r allein verstanden wird. τ ist die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge der betrachteten Schwingung, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der z-Achse. Für u ergibt sich durch Kombination von (3) und (4) die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + (k^2 - \varkappa^2)u = 0, \tag{5}$$

wenn man mit $\varkappa = 1/v$[4]) den reziproken Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet und als Abkürzung einführt:

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - 4\pi\sigma\mu\frac{2\pi}{\tau}i. \tag{6}$$

Für den Luftraum, die isolierende Hülle und das Drahtinnere hat k^2 demnach verschiedene Werte, die wir mit k_1^2, k_2^2, k_3^2 bezeichnen wollen. Aus der bloßen Existenz von Grenzbedingungen für die Kräfte folgt schon, daß die Welle in den drei Medien mit derselben Geschwindigkeit (v) fortschreiten muß; $\varkappa = 1/v$ ist also in den drei Medien das gleiche. Als Grenzbedingungen haben wir Stetigkeit der tangentialen Kraftkomponenten zu fordern, also $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ gehen stetig durch die Grenzflächen ϱ und r; $\mathfrak{E}_r$ erleidet beim Durchgang durch jede Grenze einen

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 238 u. 239.
2) A. Sommerfeld, l. c. p. 250, 251.
3) A. Sommerfeld, l. c. p. 241.
4) $\varkappa$ ist komplex, wenn die Leitfähigkeit des Drahtes endlich ist, reell wenn $\sigma = \infty$ gesetzt werden darf; A. Sommerfeld, l. c. p. 241.

Sprung. An den Grenzflächen werden also die elektrischen Kraftlinien gebrochen.

Zur Bestimmung der Funktion u, die wir in den drei Medien mit u_1, u_2, u_3 bezeichnen wollen, haben wir schließlich folgende Gleichungen[1]):

$$(7)\quad \begin{cases} \text{für} \quad r > \varrho & \dfrac{d^2u_1}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_1}{dr} + (k_1^2 - x^2)u_1 = 0, \\ \text{„} \quad \varrho > r > \tau & \dfrac{d^2u_2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_2}{dr} + (k_2^2 - x^2)u_2 = 0, \\ \text{„} \quad r < \tau & \dfrac{d^2u_3}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_3}{dr} + (k_3^2 - x^2)u_3 = 0. \end{cases}$$

Dazu kommen die Grenzbedingungen, die sich leicht in folgender Form ergeben[1]):

$$(8)\quad \begin{cases} \text{für } r = \varrho & \begin{cases} (k_1^2 - x^2)u_1 = (k_2^2 - x^2)u_2, \\ \dfrac{k_1^2}{\mu_1}\dfrac{du_1}{dr} = \dfrac{k_2^2}{\mu_2}\dfrac{du_2}{dr}, \end{cases} \\ \text{„} \quad r = \tau & \begin{cases} (k_2^2 - x^2)u_2 = (k_3^2 - x^2)u_3, \\ \dfrac{k_2^2}{\mu_2}\dfrac{du_2}{dr} = \dfrac{k_3^2}{\mu_3}\dfrac{du_3}{dr}. \end{cases} \end{cases}$$

II. Die Integrale der Differentialgleichung.

Von den Eigenschaften der die Differentialgleichung (5) integrierenden Besselschen Funktionen sei hier nur folgendes erwähnt.[2])

Für kleine Werte des Argumentes lassen sich die Funktionen durch folgende Potenzreihen darstellen:

$$(9)\quad \begin{cases} J(x) = 1 - \dfrac{1}{1!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^6 + - \ldots \\ K(x) = J(x)\ln\dfrac{2i}{\gamma x} - 2\left[J_2(x) - \tfrac{1}{2}J_4(x) + \tfrac{1}{3}J_6(x) - + \ldots\right], \end{cases}$$

woraus sich die Entwickelungen für $J'(x)$ und $K'(x)$ durch Differentiation ableiten lassen. [$\ln\gamma$ ist die Eulersche Konstante $C = 0{,}5772$.]

1) Vgl. die entsprechenden Gleichungen bei A. Sommerfeld, l. c. p. 243.

2) Ausführlicheres vgl. A. Sommerfeld, l. c. § 4; E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen; A. Kalähne, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54. p. 55—86. 1906.

Für sehr große Werte des Argumentes ($1/8\,x$ klein gegen 1) bedient man sich mit ausreichender Genauigkeit der Formeln:

$$(10)\qquad \begin{cases} J(x) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[e^{i(x+\pi/4)} - e^{i(x+\pi/4)}\right], \\ K(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(x+\pi/4)}. \end{cases}$$

Man sieht aus (9), daß

$$\lim_{x=0} K(x) = \infty,$$

aus (10), daß für Werte des Argumentes mit nicht verschwindendem imaginären Bestandteil

$$\lim_{x=\infty} J(x) = \infty$$

wird, und daß $K(x)$ für unendlich wachsendes Argument mit positiv imaginärem Bestandteil verschwindet wie e^{-x}.

Außer diesen Funktionen J und K werden wir noch eine lineare Funktion desselben benutzen:

$$(11)\qquad \begin{cases} Y(x) = J(x)\ln\frac{2i}{\gamma} - K(x) \\ \qquad\quad = J(x)\ln x + 2\left[J_2(x) - \frac{1}{2}J_4(x) + \frac{1}{3}J_6(x) - + \ldots\right]. \end{cases}$$

Für sehr kleine Werte des Argumentes gehen die Reihenentwickelungen über in

$$(12)\qquad \begin{cases} J(x) = \quad 1, \qquad Y(x) = \ln x, \quad K(x) = \ln\frac{2i}{\gamma x}, \\ J'(x) = -\frac{x}{2}, \quad Y'(x) = \frac{1}{x}, \quad K'(x) = -\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Für reelles Argument sind $J(x)$, $J'(x)$, $Y(x)$, $Y'(x)$ reell. Für rein imaginäres Argument $J(x)$ und $K(x)$ reell, $J'(x)$ und $K'(x)$ rein imaginär.

Bei der numerischen Berechnung wurden die Tafeln von E. Meissel[1]) für $J(x)$ und $J'(x)$ reellen Argumentes, und die von B. A. Smith[2]) für $Y(x)$ und $Y'(x)$ reellen Argumentes benutzt. Für die Funktionen rein imaginären Argumentes wurde eine genügende Anzahl von Werten berechnet und die

1) E. Meissel, Abh. Berliner Akad. 1888.

2) B. A. Smith, Messenger of Mathematics 26. p. 98—101. 1897.

übrigen durch graphische Interpolation gewonnen. Zu dieser Berechnung dienten die Reihen:

$$(13)\quad \begin{cases} J(ix) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \ldots, \\ J'(ix) = -i\frac{x}{2}\left[1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} + \ldots\right], \\ K(ix) = J(ix)\,[0{,}11593 - \ln x] \\ \qquad + \frac{x^2}{4}\left(1 + \frac{3}{32}x^2 + \frac{1}{3460}x^4 + \ldots\right), \\ K'(ix) = +i\frac{J(ix)}{x} + J'(ix)\,[0{,}11593 - \ln x] \\ \qquad - i\frac{x}{2}\left(1 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{3460}x^4 + \ldots\right), \end{cases}$$

die aus den oben angegebenen Reihenentwickelungen sich ohne weiteres ergeben.

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichungen werden wir eine lineare Verbindung von J und K bez. Y ansetzen; ob wir dabei K oder Y verwenden, ist prinzipiell gleichgültig, solange die Lösung für einen Bereich gelten soll, in dem x nicht unendlich werden kann. Anderenfalls verlangt die Bedingung, daß die Kräfte überall endlich bleiben, daß die betreffenden Funktionen auch für unendlich großes Argument endlich bleiben. Für nicht reelles Argument wird diese Bedingung nur durch die Funktion $K(x)$ befriedigt.

Wir werden demnach die Lösungen der Differentialgleichungen (7) schreiben:

$$(14)\quad \begin{cases} u_1 = A_1 K\left(r\sqrt{k_1^2 - x^2}\right) + B_1 J\left(r\sqrt{k_1^2 - x^2}\right), \\ u_2 = A_2 K\left(r\sqrt{k_2^2 - x^2}\right) + B_2 J\left(r\sqrt{k_2^2 - x^2}\right), \\ u_3 = A_3 K\left(r\sqrt{k_3^2 - x^2}\right) + B_3 J\left(r\sqrt{k_3^2 - x^2}\right), \end{cases}$$

wobei wir zunächst x als komplexe Größe betrachten.

Die Integrationskonstanten $A\,B$ sind so zu bestimmen, daß u überall endlich bleibt. Im Außenraum (u_1) kann das Argument mit r unendlich groß werden; da

$$\lim_{x=\infty} J(x) = \infty$$

ist, können wir der Forderung, daß u überall endlich bleiben

soll, nur dadurch genügen, daß wir $B_1 = 0$ setzen. Im Innern des Drahtes kann das Argument mit r verschwinden; da

$$\lim_{x=0} K(x) = \infty$$

ist, so haben wir ebenso $A_3 = 0$ zu setzen. In der isolierenden Hülle, wo das Argument weder 0 noch ∞ werden kann, sind A_2 und B_2 von Null verschieden. Die Gleichungen (14) reduzieren sich dadurch auf folgende:

$$(14^*) \quad \begin{cases} u_1 = A_1 K(r \cdot \sqrt{k_1^2 - \varkappa^2}), \\ u_2 = A_2 K(r \cdot \sqrt{k_2^2 - \varkappa^2}) + B_2 J(r \cdot \sqrt{k_2^2 - \varkappa^2}). \\ u_3 = B_3 J(r \cdot \sqrt{k_3^2 - \varkappa^2}) \end{cases}$$

Setzt man jetzt noch zur Abkürzung:

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho^2 (k_1^2 - \varkappa^2) = x_{\varrho_1}^2, \\ \varrho^2 (k_2^2 - \varkappa^2) = x_{\varrho_2}^2, \\ r^2 (k_2^2 - \varkappa^2) = x_{r_2}^2, \\ r^2 (k_3^2 - \varkappa^2) = x_{r_3}^2, \end{cases}$$

so liefert Kombination von (14*) mit (8) die Grenzbedingungen in der Form:

$$\begin{aligned} &A_1 x_{\varrho_1}^2 K(x_{\varrho_1}) = x_{\varrho_2}^2 [A_2 K(x_{\varrho_2}) + B_2 J(x_{\varrho_2})], \\ &A_1 \frac{k_1^2}{\mu_1} x_{\varrho_1} K'(x_{\varrho_1}) = \frac{k_2^2}{\mu_2} x_{\varrho_2} [A_2 K'(x_{\varrho_2}) + B_2 J'(x_{\varrho_2})], \\ &x_{r_2}^2 [A_2 K(x_{r_2}) + B_2 J(x_{r_2})] = x_{r_3}^2 B_3 J(x_{r_3}), \\ &x_{r_2} \frac{k_2^2}{\mu_2} [A_2 K'(x_{r_2}) + B_2 J'(x_{r_2})] = x_{r_3} \frac{k_3^2}{\mu_3} B_3 J'(x_{r_3}). \end{aligned}$$

Elimination der Verhältnisse

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{B_2}{A_1}, \quad \frac{B_3}{A_1}$$

aus diesen vier Gleichungen liefert nach einigen Umformungen, wenn man noch $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ setzt:

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{\frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2} J(x_{\varrho_2}) K'(x_{\varrho_1}) - \frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2} K(x_{\varrho_1}) J'(x_{\varrho_2})}{\frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2} K(x_{\varrho_1}) K'(x_{\varrho_2}) - \frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2} K'(x_{\varrho_1}) K(x_{\varrho_2})} \\ = \dfrac{\frac{x_{r_2}}{k_2^2} J'(x_{r_3}) J(x_{r_2}) - \frac{x_{r_3}}{k_3^2} J(x_{r_3}) J'(x_{r_2})}{\frac{x_{r_3}}{k_3^2} J(x_{r_3}) K'(x_{r_2}) - \frac{x_{r_2}}{k_2^2} J'(x_{r_3}) K(x_{r_2})}. \end{cases}$$

Diese allerdings außerordentlich komplizierte Gleichung ist als Bestimmung für das in den x enthaltene $\varkappa$ zu betrachten.

Eine für die numerische Berechnung wesentliche Vereinfachung erzielt man durch die Annahme, daß die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß sei. Den Fehler, den man dabei begeht, kann man mit Hilfe der Sommerfeldschen Betrachtungen abschätzen. Bei einer normalen Wellenlänge von ca. 1 m wird die für einen Pt-Draht von $^4/_{100}$ mm Durchmesser berechnete Wellenlänge um etwa 1 Proz. zu groß ausfallen; der Fehler wird schnell kleiner mit wachsender Leitfähigkeit und zunehmender Drahtdicke, so daß er für einen Cu-Draht von 1 mm Dicke unmerklich wird. Für $\sigma = \infty$ wird auch $k_3 = \infty$, so daß auf der rechten Seite von (16) das zweite Glied im Zähler und das erste im Nenner verschwinden. Dadurch wird $\varkappa$ reell. Gleichung (16) geht dann nach einigen Umformungen über in:

$$(16^*) \qquad \frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2}\,\frac{J(x_{\varrho_2})\,K(x_{r_2}) - J(x_{r_2})\,K(x_{\varrho_2})}{J'(x_{\varrho_2})\,K(x_{r_2}) - J(x_{r_2})\,K'(x_{\varrho_2})} = \frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2}\,\frac{K(x_{\varrho_1})}{K'(x_{\varrho_1})}.$$

Für die numerische Berechnung ist noch folgendes zu beachten: $\varkappa^2$ liegt zwischen k_1^2 und k_2^2, so daß $k_1^2 < \varkappa^2 < k_2^2$; deshalb wird

$$x_{\varrho_2} = \varrho\sqrt{k_2^2 - \varkappa^2} \quad \text{und} \quad x_{r_2} = r\sqrt{k_2^2 - \varkappa^2}$$

reell werden, da $\varkappa$ jetzt reell ist. Dagegen wird

$$x_{\varrho_1} = \varrho\sqrt{k_1^2 - \varkappa^2}$$

rein imaginär; das Vorzeichen der Wurzel wählen wir so, daß x_{ϱ_1} positiv imaginär wird.

Führen wir Y statt K auf der linken Seite von (11*) ein, so erhalten wir

$$(16^{**}) \qquad \frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2}\,\frac{J(x_{\varrho_2})\,Y(x_{r_2}) - J(x_{r_2})\,Y(x_{\varrho_2})}{J'(x_{\varrho_2})\,Y(x_{r_2}) - J(x_{r_2})\,Y'(x_{\varrho_2})} = \frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2}\,\frac{K(x_{\varrho_1})}{K'(x_{\varrho_1})}.$$

Zu derselben Gleichung wären wir auch gekommen, wenn wir Y direkt als zweites partikulares Integral der Differentialgleichungen für u_2 statt K eingeführt hätten; das ist erlaubt, da im Innern des Dielektrikums das Argument nicht unendlich werden kann.

III. Näherungsformel für geringe Schichtdicke des Dielektrikums.

Ist die den Draht umgebende isolierende Schicht sehr dünn, so wird ihr Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindig-

keit der Welle gering sein; $\varkappa^2$ wird nahezu gleich k_1^2 sein; wir werden also statt $k_2^2 - \varkappa^2$ schreiben können $k_2^2 - k_1^2$, oder für

$$(17) \qquad \begin{cases} x_{\varrho_2} = \varrho \sqrt{k_2^2 - \varkappa^2} = \varrho \sqrt{k_2^2 - k_1^2}, \\ x_{\tau_2} = \tau \sqrt{k_2^2 - k_1^2} = \tau k_1 \sqrt{\varepsilon - 1}. \end{cases}$$

Ist dann außerdem der Drahtradius nicht zu groß, die Wellenlänge nicht zu klein, so werden wir statt der Besselschen Funktionen deren Näherungswerte für kleines Argument setzen [Gleichung (12)]. Dann wird die Bestimmungsgleichung für $\varkappa^2$:

$$\left(\varepsilon = \frac{k_2^2}{k_1^2}\right),$$

$$x_{\varrho_2} \frac{\ln x_{\tau_2} - \ln x_{\varrho_2}}{-\frac{x_{\varrho_2}}{2} \ln x_{\tau_2} - \frac{1}{x_{\varrho_2}}} = -\varepsilon x_{\varrho_1}^2 \ln \frac{2i}{\gamma x_{\varrho_1}} = \frac{2 \ln \frac{\varrho}{\tau}}{\ln x_{\tau_2} + \frac{2}{x_{\varrho_2}^2}}$$

und mit Berücksichtigung von (17):

$$-x_{\varrho_1}^2 \ln \frac{2i}{\gamma x_{\varrho_1}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{2 \ln \frac{\varrho}{\tau}}{\frac{2}{\varrho^2 k_1^2} + (\varepsilon - 1) \ln (\tau k_1 \sqrt{\varepsilon - 1})}.$$

Die Substitution $y = -\gamma^2 x_{\varrho_1}^2 / 4$ führt diese Gleichung über in

$$(18) \qquad -y \ln y = \gamma^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\ln \frac{\varrho}{\tau}}{\frac{2}{\varrho^2 k_1^2} + (\varepsilon - 1) \ln (\tau k_1 \sqrt{\varepsilon - 1})}.$$

Für kleine Werte von ε kann man auch meist noch den zweiten Summanden im Nenner vernachlässigen, und erhält dann die einfache Gleichung:

$$(18^*) \qquad -y \ln y = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varrho^2 k_1^2 \ln \frac{\varrho}{\tau}.$$

Die Näherungsformel (18) reicht aus, etwa solange

$$\varrho k_2 < 0{,}2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon \frac{\varrho^2}{\lambda_0^2} < 10^{-3}$$

ist.

IV. Beispiel: lange Wellen an einem Hochspannungskabel.

Wir wollen diese Näherungsformel benutzen, um die Länge sehr langer Wellen an isolierten Leitungen zu berechnen; wir

nehmen ein Hochspannungskabel von 1 mm starker Cu-Seele mit 2 mm dicker Guttaperchaisolation; die Schwingungsdauer der betrachteten Schwingungen sei eine solche, daß ihr eine normale Wellenlänge von 244 m, in Luft gemessen, entspräche. Dann ist

$$r=0{,}05, \quad \varrho=0{,}25, \quad \varepsilon=2{,}5, \quad \lambda_0=2{,}44\times 10^4, \quad k_1^2=6{,}63\times 10^{-8}.$$

$$\varepsilon\frac{\varrho^2}{\lambda_0^2}=2{,}5\,\frac{0{,}0625}{(2{,}44)^2}\cdot 10^{-8}$$

ist so klein, daß die Anwendung der Näherungsformel gestattet ist, wir kommen sogar mit (18*) aus. Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$y\lg y=-2{,}77\times 10^{-9},$$

woraus sich nach einem von Sommerfeld angegebenen Näherungsverfahren, oder noch bequemer durch eine graphische Methode, ergibt:

$$y=2{,}9\times 10^{-10}.$$

Nun war y gesetzt für

$$-\frac{\gamma^2}{4}x_{e_1}^2=\frac{\gamma^2}{4}\varrho^2(x^2-k_1^2);$$

es wird also:

$$x^2-k_1^2=\frac{2{,}9\;\;4\;\;10^{-10}}{\gamma^2\varrho^2}=5{,}8\times 10^{-9}, \quad x^2=7{,}21\times 10^{-8}.$$

Daraus berechnet sich für die Wellenlänge am Draht der Wert:

$$\lambda=\frac{2\pi}{x}=234\text{ m};$$

die an dem Kabel entlang laufende Welle ist also um etwa 4 Proz. kürzer als die derselben Schwingungszahl entsprechende freie Welle in Luft. [Ersatz der isolierenden Schicht durch ein Material von hoher Dielektrizitätskonstante (Wasser $\varepsilon=80$) würde die Verkürzung der Welle nur auf $6^1/_2$ Proz. erhöhen.]

A. Slaby[1]) hat ein Hochspannungskabel der angegebenen Dimensionen als einfachen Marconisender benutzt; er gibt an, daß sich die in Luft gemessene Viertelwellenlänge um 7 Proz. größer ergeben habe als die Kabellänge. Die Theorie würde, wie eben gezeigt wurde, nur 4 Proz. voraussehen lassen.

---

1) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. p. 1003—1007. 1905.

V. Graphische Lösung der Bestimmungsgleichung für x^2.

Für eine experimentelle Prüfung der Ergebnisse der Theorie sind die eben betrachteten langen Wellen nicht gut geeignet, weil der unendlich lange Draht für diese auch nicht annähernd realisiert werden kann. Man wird zu dem Zwecke besser mit Wellen von der Größenordnung von 1 m experimentieren. Dann reichen aber die Näherungsformeln nur für sehr kleine Schichtdicken der isolierenden Substanz aus, wenigstens wenn man des größeren Effektes wegen eine Substanz mit hoher Dielektrizitätskonstante verwendet. Wir müssen deshalb auf die exaktere Gleichung (16**) zurückgehen:

$$(16^{**}) \qquad \frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2}\,\frac{J(x_{\varrho_2})\,Y(x_{\tau_2}) - J(x_{\tau_2})\,Y(x_{\varrho_2})}{J'(x_{\varrho_2})\,Y(x_{\tau_2}) - J(x_{\tau_2})\,Y'(x_{\varrho_2})} = \frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2}\,\frac{K(x_{\varrho_1})}{K'(x_{\varrho_1})}.$$

Wir betrachten die beiden Seiten der Gleichung als Funktionen von dem in den x enthaltenen $\varkappa^2$, indem wir die linke Seite gleich $f_2(\varkappa^2)$, die rechte gleich $f_1(\varkappa^2)$ setzen. Die Lösung der Gleichung erfolgt dann ziemlich bequem graphisch, dadurch, daß man die Kurven $f_1(\varkappa^2)$ und $f_2(\varkappa^2)$ in ihrer Abhängigkeit von $\varkappa^2$ zeichnet; die Schnittpunktsabszisse ist dann die Lösung der Gleichung (16**). Bei der wirklichen Ausführung braucht man dabei nur kurze Stücke der beiden Kurven zu berechnen, weil die Näherungsformeln wenigstens einen Anhalt für den zu erwartenden Wert von $\varkappa^2$ liefern.

Die Art der Berechnung wird an einem dem folgenden Beispiel entnommenen Falle klar werden. Es sei

$$\mathfrak{r} = 0{,}05, \quad \varrho = 1{,}5, \quad k_1^2 = 0{,}0056, \quad k_2^2 = 0{,}448, \quad \varepsilon = 80, \quad \lambda_0 = 84.$$

Wir setzen zunächst $\varkappa^2 = 0{,}20$; dann wird

$$x_{\varrho_1} = 0{,}662\,i; \quad x_{\varrho_2} = 0{,}746; \quad x_{\tau_2} = 0{,}0249;$$

und

$$f_1(\varkappa^2) = +\,72{,}9; \quad f_2(\varkappa^2) = +\,16{,}2;$$

setzt man für $\varkappa^2$ 0,16 bez. 0,145, so werden die entsprechenden Werte:

$$f_1(\varkappa^2) = +\,62{,}2; \quad f_2(\varkappa^2) = +\,38{,}7;$$

bez.

$$f_1(\varkappa^2) = +\,57{,}1; \quad f_2(\varkappa^2) = +\,61{,}2.$$

Durch die den drei Werten von $\varkappa^2$ entsprechenden Kurvenpunkte lassen sich die Kurven f_1 und f_2 mit genügender Sicher-

heit konstruieren, um die Schnittpunktsabszisse 0,146 mit der erforderlichen Genauigkeit erkennen zu lassen.

VI. Beispiel: kurze Wellen an einem 1 mm starken Draht mit zylindrischer Wasserhülle von variabler Dicke.

Die normale Wellenlänge λ_0 sei 84 cm; der Radius des Drahtes 0,05 cm; setzt man die Dielektrizitätskonstante des Wassers = 80, so wird

$$k_1^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = 0{,}0056; \quad k_2^2 = \varepsilon k_1^2 = 0{,}448.$$

Für diesen Fall wurde die Abhängigkeit der Drahtwellenlänge von der Dicke der Wasserschicht vollständig durchgerechnet. Das Resultat der Rechnung ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\varrho =$	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	1,0	1,20	1,25	1,5	2,0	∞
$100\frac{\lambda}{\lambda_0} =$	100	95	86	77	68	60	54,5	37,9	32,5	19,6	13,9	11,1

Die mit $r = 0{,}05$ bezeichnete Kurve der Fig. 2 zeigt diese Abhängigkeit graphisch; in der Fig. 2 ist, um den Vergleich

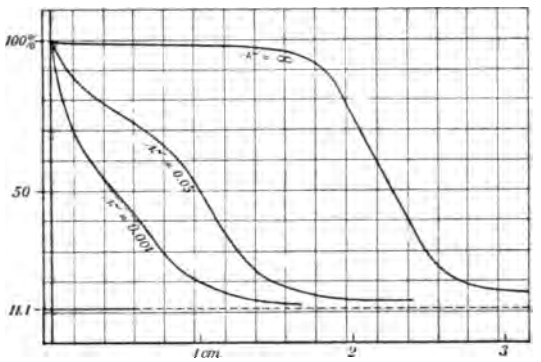


Fig. 2.

mit den übrigen Kurven zu erleichtern, nicht der äußere Radius der Wasserschicht, sondern die Schichtdicke als Abszisse eingetragen. Man sieht, daß eine Schicht von etwa 2 cm Dicke schon fast wie eine unendlich dicke Schicht wirkt. [Die punktierte horizontale Linie deutet die unendlich aus-

gedehntem Dielektrikum entsprechende Wellenlänge an; die Wellenlängen sind in Prozenten von λ_0 angegeben.] Bemerkenswert ist der steile Abfall der Kurve bei Schichtdicken zwischen 0,9 und 1,3 cm; dieser Abfall wird um so steiler, je größer der Drahtradius wird; für sehr große Radien ergibt sich die Kurve $r = \infty$, die also dem Fortschreiten einer Welle an einer gut leitenden mit einer Wasserschicht bedeckten unendlichen Ebene entspricht. Mit abnehmendem Drahtradius nimmt bei gleicher Schichtdicke die Änderung der Wellenlänge zu; die Kurve $r = 0{,}001$ kann ungefähr als Grenzkurve für verschwindende Drahtdicke betrachtet werden.

Über die Abhängigkeit von der Wellenlänge läßt sich ganz allgemein folgendes sagen: Die Gleichung (16**), die zur Berechnung von $\varkappa^2$ dient, bleibt bestehen, wenn man alle in Betracht kommenden Längen im gleichen Verhältnis ändert, vorausgesetzt, daß das Dielektrikum beibehalten wird; die prozentuale Änderung der Wellenlänge wird dann also dieselbe bleiben. Nach Fig. 2 wird die normale Wellenlänge von 84 cm bei $^2/_{100}$ mm Drahtdicke auf die Hälfte ihres Wertes herabgedrückt, wenn man die Wasserhülle 4 mm dick macht. Eine normale Wellenlänge von 100 m wird also auf 50 m sinken, wenn man die Welle an einem 2,4 mm dicken Drahte entlang gleiten läßt, der mit einer 48 cm dicken Wasserschicht umgeben ist.

VII. Verteilung der Kräfte in der Umgebung des Drahtes.

Solange die Dicke des den Draht umhüllenden Dielektrikums endlich ist, ist die Geschwindigkeit, mit der der elektromagnetische Zustand sich längs des Drahtes verschiebt, verschieden sowohl von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der freien Welle in Luft, als auch von der im Dielektrikum; und zwar ist diese Geschwindigkeit im Luftraume kleiner als Lichtgeschwindigkeit, im Dielektrikum größer als die Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum. Es ist deshalb eine von der normalen abweichende Verteilung der Kraftlinien zu erwarten. Die Konstruktion der Kraftlinien erfolgt am bequemsten nach der von Hertz angegebenen Methode, mit Benutzung der oben erwähnten Funktion Π. Da rings um den Draht herum alles symmetrisch sein soll, so genügt es, die Kraftlinien in einer

Meridianebene zu zeichnen. Man erhält sie nach Hertz, indem man die Kurvenschar

$$r \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \text{const.}$$

zeichnet. Für den Außenraum nimmt diese Kraftliniengleichung nach (4) und (14*) die Form an:

$$x K'(x) . \sin(\varkappa z) = \text{const.} \tag{19}$$

Für das Dielektrikum:

$$\left[\frac{\alpha}{\beta} Y'(x) + J'(x)\right] x . \sin(\varkappa z) = \text{const.}$$

α und β sind konstante Faktoren, die sich aus $J(x_{\varrho_2})$, $Y(x_{\varrho_2})$, $K(x_{\varrho_1})$ und deren Differentialquotienten zusammensetzen. Durch eine elementare aber ziemlich umständliche Rechnung findet man noch, daß

$$\frac{\alpha}{\beta} = - \frac{J(x_{r_2})}{Y(x_{r_2})}$$

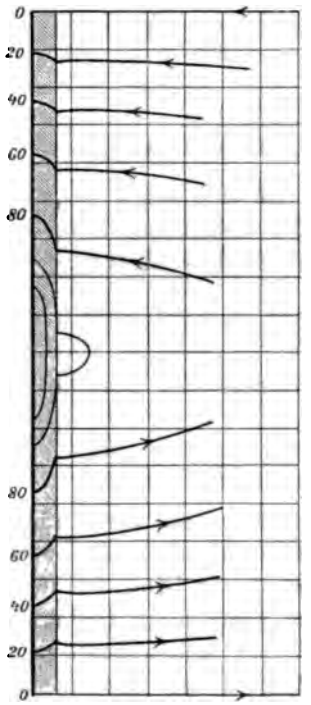
sein muß. Im Innern des Dielektrikums sind also die Kraftlinien die Kurven:

$$x \left[J'(x) - \frac{J(x_{r_2})}{Y(x_{r_2})} Y'(x)\right] . \sin(\varkappa z) = \text{const.} \tag{20}$$

Für $\varrho = \mathfrak{r}$ und $\varrho = \infty$ sind die Kraftlinien auf der Drahtoberfläche senkrecht stehende parallele Gerade, deren Dichte längs des Drahtes wie $\sin(\varkappa z)$ variiert, wenn der Draht frei in Luft; wie $\sin(\sqrt{\varepsilon}\varkappa z)$, wenn der Draht am unendlichen Dielektrikum liegt. Außer diesem Grenzfall sind noch Kraftliniendiagramme gezeichnet für den im vorigen Paragraphen ausführlich behandelten Fall $\mathfrak{r} = 0{,}05$; $\lambda_0 = 84$; $\varepsilon = 80$; und zwar für eine verhältnismäßig dünne Wasserschicht ($\varrho = 0{,}5$) und eine verhältnismäßig dicke ($\varrho = 1{,}5$). Im zweiten Falle schließen sich fast alle Kraftlinien (92 Proz.) im Dielektrikum paarweise zusammen, so daß nur sehr wenige in den Luftraum heraustreten; auch diese schließen sich, wenn auch erst nach langen Wegen, zusammen, bis auf die von den Punkten maximaler momentaner Ladung ausgehenden, die ins Unendliche verlaufen bez. aus dem Unendlichen herankommen. Der erste Fall bildet das entgegengesetzte Extrem. Hier verlaufen nur wenige Kraftlinien völlig im Dielektrikum (weniger als 10 Proz.), die übrigen treten mit meist nur geringen Richtungsänderungen durch das

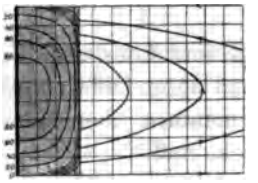
Dielektrikum hindurch in den Luftraum, wo sie sich — bis auf die von den Punkten maximaler Ladung ausgehenden — ebenfalls nach langen Wegen paarweise zusammenschließen.

In den Figg. 3 *a*, *b*, *c* sind die mit den Ziffern 80, 60, 40, 20 bezeichneten Kraftlinien so gezeichnet, daß ihre Dichte



$\varrho = 0{,}5$

Fig. 3 *a*.



$\varrho = 1{,}5$

Fig. 3 *b*.

$\varrho = \infty$

Fig. 3 *c*.

der elektrischen Kraft proportional ist; die nicht bezeichneten sind hinzugenommen, um den Verlauf der übrigen Kraftlinien zu skizzieren. Die Dicke des Dielektrikums ist im richtigen Verhältnis zur Wellenlänge gezeichnet; für $\varrho = 1$ hat man sich Fig. 3 *c* auf das Neunfache vergrößert zu denken. Das ganze System der Kraftlinien verschiebt sich am Draht mit der Geschwindigkeit

$$v = c\,\frac{k_1}{x} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{k_2}{x}.$$

Aus dem Verlauf der Kraftlinien sieht man, daß die Fortpflanzung der elektromagnetischen Störung nur unmittelbar am Draht und im Unendlichen in reinen Transversalwellen erfolgt; überall sonst im Raume ist auch eine elektrische Kraftkomponente in der Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit vorhanden. Das liegt natürlich daran, daß die Wellen, um die es sich hier handelt, nicht beiderseits unendlich ausgedehnt, sondern einseitig begrenzt sind.

Die Bewegung der Energie können wir uns mit Hilfe des Poyntingschen Satzes klar machen. Wir berechnen den Energiefluß durch eine den Draht koaxial umschließende Zylinderfläche vom Radius r und der von einem beliebig auf der z-Achse gewählten Nullpunkte aus gerechneten Länge z. Der Energiefluß durch diese Fläche wird dann sein:

$$\frac{c}{4\pi}\int_0^z \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{E}_z 2r\pi\, dz = \frac{cr}{2}\int_0^z \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{E}_z\, dz.$$

Hierin setzen wir die Werte von $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ aus (2) ein und erhalten dann, von Konstanten abgesehen, den Wert

$$\mathfrak{S} \sim r(k^2 - \varkappa^2) u \frac{du}{dr}\int_0^z \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)\cos 2\pi\left(\frac{l}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right) dz;$$

daraus folgt zunächst für unendlich großen Radius $\mathfrak{S} = 0$, da sowohl u wie du/dr, die hier durch $K(x)$ und $K'(x)$ zu ersetzen sind, für $r = \infty$ verschwinden wie die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten, $ru(du/dr)$ also ebenfalls verschwindet; aus dem Unendlichen wird also in radialer Richtung keine Energie zugeführt. Für endliche Werte von r verschwindet $\mathfrak{S}$ im allgemeinen nicht; man sieht aber aus der Formel für $\mathfrak{S}$ sofort, daß es verschwindet, wenn man die Länge des betrachteten Zylinders gleich einer ganzen Zahl von halben Wellenlängen macht; ebenso ist die gesamte Energiemenge, die während der Dauer einer ganzen Schwingungsperiode in einen beliebig langen Zylinder in radialer Richtung einströmt, gleich Null. Zufuhr von Energie kann also nur in axialer Richtung erfolgen; es war ja auch vorausgesetzt worden, daß die Fortpflanzungsrichtung der Wellen der Drahtachse parallel sei.

Zusammenfassung.

Elektromagnetische Wellen an gut leitenden Drähten mit zylindrischer isolierender Hülle pflanzen sich mit einer Geschwindigkeit fort, die kleiner ist als Lichtgeschwindigkeit. Die Abweichung vom normalen Werte ist um so größer, je größer die Dielektrizitätskonstante und der Radius der isolierenden Hülle ist; je größer die Schwingungsdauer der Schwingungen und je kleiner der Drahtradius ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit läßt sich nach der angegebenen Methode exakt berechnen, solange man die Leitfähigkeit des Drahtes sehr groß annehmen darf. Das numerisch durchgerechnete Beispiel zeigt, daß sich diese Resultate verhältnismäßig leicht experimentell werden prüfen lassen.[1])

Würzburg, Physik. Institut, 4. März 1907.

---

1) Hr. stud. H. Weiss ist zurzeit im hiesigen Institut mit der experimentellen Prüfung der Theorie beschäftigt. Orientierende Versuche unter den Verhältnissen des § 6 haben bei einer Schichtdicke von 0,6 cm Wasser eine Verkürzung der normalen Wellenlänge um 27,7 bis 28,7 Proz. ergeben; die Übereinstimmung mit dem berechneten Werte (28,5 Proz.) ist sehr gut. *(Anmerkung bei der Korrektur.)*

(Eingegangen 5. März 1907.)

3. *Bemerkungen über die spezifischen Wärmen fester Grundstoffe;* *von Rudolf Laemmel.*

(Hierzu Taf. I.)

I. In den vorangegangenen Notizen[1]) habe ich versucht, die sogenannten Abweichungen vom Dulong-Petit-Gesetze dadurch zu erklären, daß ich das Prinzip der *vergleichbaren Zustände* einführte. Danach ergab sich als vermutlich richtigere Fassung: Die Atomwärmen der festen Elemente wachsen von 2—3 Kalorien bei sehr tiefen Temperaturen bis zu 9—10 Kalorien bei den Schmelztemperaturen; sie sind in vergleichbaren Zuständen ungefähr gleich für alle Elemente.

Ich stelle hier (p. 62) einige Werte zusammen für die vergleichbare Temperatur $\tau = \frac{1}{2}$ und $\tau = 1$; diese vergleichbare Temperatur ist definiert als Quotient aus: Temperatur durch Schmelztemperatur (beide absolut gemessen).

Es kann also wohl keinem Zweifel unterliegen, daß das Dulong-Petit-Gesetz schlechthin unrichtig ist.

II. Die Untersuchung des Kohlenstoffs hatte ergeben, daß sich dieses Element dem „Gültigkeitsbereich des Dulong-

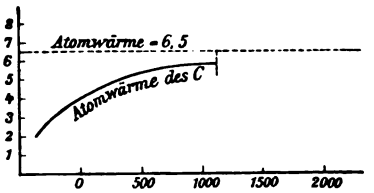


Fig. 1.

Petit-Gesetzes mit steigender Temperatur immer mehr nähert". H. F. Webers Meinung war, daß der Wert 6,4 asymptotisch erreicht werde, wie Fig. 1 zeigt.

1) R. Laemmel, Ann. d. Phys. **16**. p. 551. 1905.

Tabelle 1.

Tabelle der Atomwärmen für die vergleichbaren Temperaturen $\tau = \frac{1}{2}$ und $\tau = 1$.

Element	Atomgewicht	Atomwärme bei $\tau = \frac{1}{2}$	Atomwärme bei $\tau = 1$	Beobachtet von (extrapoliert = *)
H . . .	1	6 ca. −250°	—	Dewar
Li . . .	7	4 ca. −40°	9,5 185°	Laemel
B . . .	11	7 ca. 1000°	10 ca. 2200°	*H. F. Weber, Moissan
C . . .	12	6,2 ca. 1400°	9,8 ca. 3600°	*H. F. Weber
Na . .	23	6,2 ca. −70°	?	Regnault, Bernini
Mg . .	24	6,5	9,5	*Stücker, Brunner
Al . .	27	6,3	9,9 700°	*Bontscheff
Si . . .	28,4	6,7 900°	10,2 2300°	*H. F. Weber
P rot .	31	6,3 −20°	9,8 250°	*Wigand
Ca . .	40	7 250°	9,6 780°	*Brunner
Fe . .	56	?	10	Pionchon
Ni . .	59	7,7 bei 590°	10 bei 1450°	*Pionchon, Tilden
Cu . .	63	7 bei 550°	9 bei 1080°	Richards
Zn . .	65	6,1	9,75	Naccari, Le Verrier, Behn
Pd . .	106	6,7 ca. 560°	9,37 1590°	Behn, Violle
Sn weiß	119	6 −20°	9,52 230°	*Wigand
Sb . .	120	6,8 bei 600°	9,4 bei 1590°	*Violle, Behn
Ir . . .	193	7,7	9,8	
Pt . . .	194	7	9,7	Tilden
Hg . .	200	?	6,8?	Regnault
Pb . .	206	6,2	8	Stücker, Naccari
Bi . . .	208,5	5 bei 0°	10,5 bei 540°	Stücker

Ferner findet man ganz allgemein seit H. F. Webers Arbeiten die Behauptung vertreten, daß die spezifische Wärme *jener* Grundstoffe, die dem „Gesetz von Dulong-Petit" bei „gewöhnlicher Temperatur" *nicht* folgen, besonders stark mit der Temperatur variiere.

Pionchon[1]) hat die Ansicht geäußert, daß „... la loi se reduit à une simple remarque: c'est qu'il y a un intervalle de températures, l'intervalle de 0° à 100°, dans lesquels les valeurs des produits ... sont plus voisines les unes des autres que partout ailleurs ...", eine Ansicht, die in Fig. 2 graphisch dargestellt ist.

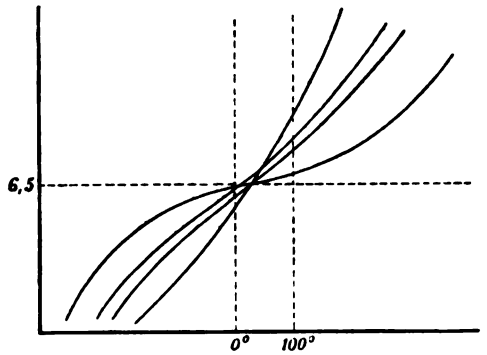


Fig. 2.

Die Untersuchungen, die ich in einem großen (vergleichbaren) Temperaturbereich am *Lithium* ausführte, haben mich zu der eingangs erwähnten Anschauung geführt. In Fig. 3 gebe ich die Li-Kurve wieder, die ich für *typisch* halte für den Verlauf der spezifischen Wärme der Grundstoffe.[2])

Ob der Wendepunkt eine Bedeutung hat, müssen spätere Untersuchungen anderer Elemente in größerem Temperaturintervall zeigen. Nimmt man den Verlauf der Li-Kurve als typisch an, so ergibt sich für den Kohlenstoff ein Verlauf der spezifischen Wärme, wie er in Fig. 4 dargestellt ist.

---

1) J. E. N. Pionchon, Compt. rend. **103.** p. 185. 1886.

2) Hr. Prof. Forcrane in Montpellier teilte mir vor kurzem mit, daß er eine von meiner wenig abweichende Kurve für das Li gefunden habe.

In der beigegebenen Kurventabelle (Taf. I) habe ich nun, auf Grund der vorhandenen Daten für spezifische Wärmen und

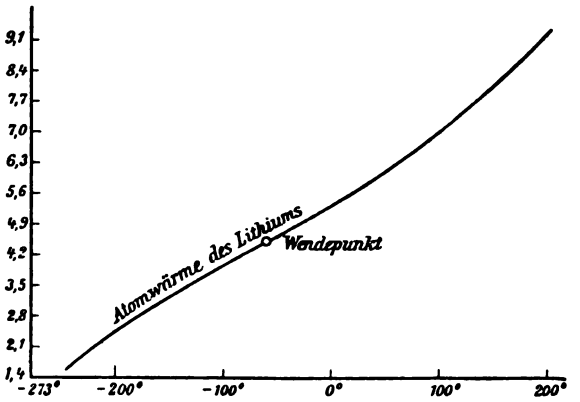


Fig. 3.

unter Annahme der typischen Li-Kurve (zum Extrapolieren), die spezifische Wärme Kurven für einige Elemente gezeichnet.

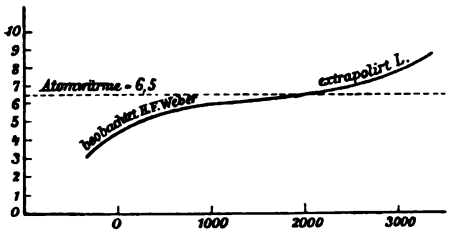


Fig. 4. Atomwärme des Kohlenstoffs.

Abszissen sind die reduzierten Temperaturen, Ordinaten die Atomwärmen.

Es sei also die spezifische Wärme σ gegeben durch:

$$(1) \qquad A \cdot \sigma = A_0 + A_1 \frac{\theta}{T} + A_2 \left(\frac{\theta}{T}\right)^2 + A_3 \left(\frac{\theta}{T}\right)^3 + \ldots,$$

worin A das Atomgewicht, θ die absolute Temperatur und T die Schmelztemperatur bedeutet. Für $\theta : T = \tau$ ist

$$(1') \qquad A \cdot \sigma = \sum_{i=0} A_i \tau^i.$$

Die gesamte Wärmemenge (sie heiße „Vorwärme“ V), die

man vom Nullpunkt bis zum Schmelzpunkt zuführt, ergibt sich aus

$$(2) \qquad A \,.\, V = \int_{\theta=0}^{\theta=T} A \,.\, \sigma \,.\, d\theta = \sum T \cdot \frac{A\,i}{i+1} = T \,.\, \text{const.}$$

Also es ergibt sich hieraus der Satz:

$$(2') \qquad \frac{A \,.\, V}{T} = \sum \frac{A\,i}{i+1} = \text{const.}$$

„Die auf vergleichbare Massen und vergleichbare Temperaturen bezogenen Vorwärmen der Elemente sind gleich."

Wieweit der Satz zutrifft, läßt sich noch nicht genau entscheiden, weil der Druck, der ja die spezifische Wärme und die Schmelztemperatur ändert, nicht *ausgeglichen* werden kann. Die beigegebene Kurventabelle zeigt, daß die Abweichungen bei Normaldruck ziemlich groß sind. (Die Kurven sollten ja zusammenfallen, wenn die Ai wirklich universelle Konstante wären.) Einen Teil der Abweichungen kann man aber jedenfalls auf Rechnung des unbekannten Einflusses des Druckes setzen.

Bricht man die Reihe (1) beim linearen Glied ab, so gibt die Formel

$$(3) \qquad A\sigma = 3 + 7\tau$$

die empirischen Kurven ziemlich gut wieder. Die mittlere Atomwärme wird dann zu:

$$(4) \qquad \overline{A \,.\, \sigma} = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^1 A \,.\, \sigma \,.\, d\tau = (3\tau + 3{,}5\,\tau^2)_0^1 = 6{,}5 \,.$$

Ebenso folgt aus (1) allgemein

$$(5) \qquad \overline{A \,.\, \sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^1 A \,.\, \sigma \,.\, d\tau = \sum \frac{A\,i}{i+1},$$

also der Ausdruck rechts in (2'). Das heißt: *„Die Integralmittel der Atomwärmen der Elemente im festen Zustand sind gleich, und zwar ca. 6,5"*. Daß diese Konstante dieselbe Zahl ist, wie die im Gesetz von Dulong-Petit, ist insofern ein Zufall, als ja die Gleichung (5) immer gilt, sofern die Prämissen zutreffen, während die bei „gewöhnlicher" Temperatur er-

mittelten Atomwärmen viel kleiner wären als 6,5, wenn die Temperatur auf der Oberfläche der Erde sehr tief wäre, und größer als 6,5, wenn die Temperatur auf der Oberfläche der Erde z. B. 1000° wäre.

Die Größe A_0 ist die Atomwärme beim absoluten Nullpunkt (sie scheint nicht Null zu sein), die Größe $\sum Ai$ ist die Atomwärme bei der Schmelztemperatur.

Es kann sein, daß (wie es der Natur der Dinge vielleicht besser entspricht) nicht die vergleichbaren *Vorwärmen* V, sondern diese plus den latenten Schmelzwärmen L sich als gleich erweisen. Aber leider kennt man die Schmelzwärmen der Elemente so gut wie nicht. Es ergäbe dies die Beziehung

$$\frac{(V+L)A}{T} = \text{const.}, \tag{6}$$

welche an den Troutonschen Satz erinnert.

Die Formel (1) führt noch zu besonderen Ausdrücken für die Entropie E fester Körper:

$$A.E = \left[\log \text{nat}\,(\theta^{A_0}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{Ai\,\theta^i}{i.T^i}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}. \tag{7}$$

Falls nicht $A_0 = 0$ ist, gäbe die Integration vom absoluten Nullpunkt an bis zu irgend einer Temperatur Unendlich. Der zweite Summand bleibt endlich und gibt, zwischen $\theta = 0$ und $\theta = T$ ausgewertet, die Größe

$$A.E_1 = A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} + \frac{A_4}{4} + \ldots \tag{7'}$$

Wäre $A_0 = 0$, so ergäbe dies den Satz: Die molekularen Entropien fester Elemente sind in vergleichbaren Zuständen gleich.

Soll der Ansatz (1) zutreffen, so muß die spezifische Wärme eine Funktion nur der reduzierten Temperatur sein. Dann müßten, da bei festen Körpern $c_p : c_v = k$ wenig von 1 verschieden ist, sowohl die Größe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \text{ als auch die Größe } \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}$$

gleich Null sein. Für die wirklichen festen Körper ist aber keines von beiden der Fall: dies kommt also, neben dem Druckeinfluß, noch hinzu zur Erklärung der Abweichungen der Kurven unserer Tafel.

III. Untersuchen wir $\partial v/\partial \theta$. Der Ausdehnungskoeffizient α sei in bekannter Weise definiert:

$$\alpha = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Dann gilt, wie schon von vielen Physikern bemerkt wurde, ungefähr der Satz

(8) $$\alpha . \delta . T = \text{const.},$$

wobei δ das Atomvolumen bezeichnet, T die Schmelztemperatur.

Ich stelle nun hier einige Werte für $\alpha \delta T$ zusammen, die auf Grund der in den Tabellen Landolts gefundenen Daten berechnet sind. (Bei „gewöhnlicher" Temperatur.)

Tabelle 2.

Element	δ	$\alpha . 10^5$	T	$\alpha . \delta . T . 10^5$
	bei ca. 0°			
Al	2,18	2	930	4055
Sb	2,6	1,2	900	2808
As	2,7	5,6	400	5600
Pb	2,68	2,8	600	4720
Cd	2,35	3,1	593	4320
Fe	1,92	1,2	1750	4030
Au	2,18	1,47	1340	4300
In	2,51	4	450	4520
Co	1,9	1,2	2000	4560
Mg	1,48	2,7	870	3500
Ni	1,88	1,28	1700	4100
Pd	2,09	1,15	1860	4470
Pt	2,08	0,88	2040	4400
Hg	2,415	8,9 (bei −40°)	233	5000
Zn	2,09	2,9	690	4180

Die Übereinstimmung ist mit Rücksicht auf den Umstand, daß es sich hier um ein Produkt aus *drei* variablen und ungenau bekannten Faktoren handelt, eine *überraschend gute.* Die Abweichungen stammen ersichtlich daher, daß *gleiche,* statt *vergleichbare* Temperaturen genommen wurden.

Man kann leicht zeigen, daß der Ansatz (8) qualitativ ganz falsch ist. Denn es folgt

(8') $$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right)_p = -\frac{\alpha c}{T \delta} = \text{negativ},$$

während sich fast ausnahmslos diese Größe als positiv erweist. Da nun aber sowohl α wie auch θ für jedes Element mit der Temperatur wächst, so liegt nach unserer Grundanschauung der Ansatz nahe:

$$(9) \qquad \alpha\,\delta = B_0 + B_1\frac{\theta}{T} + B_2\left(\frac{\theta}{T}\right) + \ldots \text{ (analog zu (1))},$$

$$(9') \qquad \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\theta}\right)_p = -\frac{1}{3}\cdot(\alpha)^2 + \frac{1}{\delta\,.\,T}\cdot\sum_{i=1}(i+1)\,B_i\left(\frac{\theta}{T}\right)^i.$$

Hier ist der Differentialquotient wesentlich positiv. Annähernd kann man setzen:

$$(9')\ (10) \qquad \alpha\,\delta = B_1\frac{\theta}{T}, \quad \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\delta}\right)_p = -\frac{1}{3}\,\alpha^2 + \frac{\alpha}{\theta} = \text{ca.}\frac{\alpha}{\theta},$$

denn α^2 ist gegen α sehr klein. Unsere Formeln (9') und (10) stellen den Zusammenhang des Ausdehnungskoeffizienten und seiner Temperaturänderung mit dem Atomvolumen *qualitativ richtiger und auch quantitativ befriedigender* dar als (8) und (8'). Die Größe α/θ gibt die Größenordnung der Temperaturänderung von α richtig wieder — das ist alles, was man bei der ungenauen Kenntnis von α selber verlangen kann.

Aus (9) folgt übrigens eine Zustandsgleichung für feste Körper:

$$(11) \qquad 3\sqrt[3]{A\,.\,V} = 3\sqrt[3]{A\,.\,V_0} + T.\sum_{i=0}\frac{B_i}{i+1}\,\tau^{i+1},$$

mit Beschränkung auf die ersten Glieder:

$$(11') \qquad 3\,(\delta - \delta_0) = B_0\,.\,\theta + \frac{B_1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{T}.$$

Leider enthalten diese Gleichungen keine Aussage über den Druck (es wurde ja bei konstantem Druck integriert).

Eine Konsequenz von (9) ist ferner:

$$(12) \qquad \lim_{\tau=1}(\alpha\,.\,\delta) = \sum_{i=0}^{n} B_i = \text{const.}$$

Für viele Substanzen gilt der Satz, daß der Ausdehnungskoeffizient der spezifischen Wärme verkehrt proportional ist. Setzt man

$$(13) \qquad A\,.\,\alpha\,.\,\sigma = C_0 + C_1\frac{\theta}{T} + \ldots,$$

so ist, wenn man C_0 vernachlässigt, die Größe $A\,.\,\alpha\,.\,\sigma\,.\,T$ in der Tat bei $\theta =$ ca. 300 gleich ca. 0,4 Kal. für viele Grund-

stoffe. Hieraus aber folgt wieder eine neue Darstellung für σ von der Form

$$(14) \qquad A.\sigma = A_0' + A_1'\delta\frac{\theta}{T} + A_2'\delta^2\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 + \ldots$$

IV. Hr. Richarz hat sich wiederholt mit der theoretischen Motivierung des Dulong-Petit-Gesetzes beschäftigt und mit der Erklärung der Abweichungen.[1]) Die Punkte, auf die es dabei ankommt, sind drei Sätze von Boltzmann, die wir so fassen können:

(15) Die mittlere kinetische Atomenergie der Elemente ist der potentiellen proportional, eventuell gleich.

(16) Die spezifische Wärme eines Gases ist (demnach) die Hälfte der desselben festen Körpers.

(17) Das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen eines einatomigen Gases $= \frac{5}{3}$.

Hieraus läßt sich zeigen, daß für Metalle (deren Dämpfe einatomig sind) die Atomwärme fast genau gleich 6 Kal. ist. Dagegen könnte nichts eingewendet werden, wenn das Resultat sich bestätigen würde. Das ist aber nicht der Fall. Hr. Richarz hat versucht, die Ausnahmen zu erklären. Ein Grund für die Abweichung soll, entsprechend der kinetischen Herleitung der Sätze (15), (16), (17), das geringe Atomvolumen, ein anderer Grund das geringe Atomgewicht sein.[2])

Dem gegenüber muß bemerkt werden, daß das Lithium mit seinem geringen Atomgewicht Atomwärmen bis zu 9,5 aufweist, das Eisen, das Blei etc.[3]) aber Atomwärmen bis zu 4 herab zeigt — bei irgendwelchen Temperaturen. Ob ein Element ein großes oder ein kleines Atomgewicht oder Atomvolumen hat, ist tatsächlich für die Erreichung eines bestimmten Wertes gleichgültig: alle Atomwärmen ändern sich von Werten, die weit unter 6 liegen, bis zu Werten, die über 6 liegen.

Die eigentlichen klassischen Ausnahmen (Kohlenstoff, Bor und Silicium) haben unserer Meinung nach im Verlauf der

1) Vgl. A. Wigand, Diss. 1905.

2) Beides sollte die bekannten Ausnahmen C, B, Si, die Abweichungen nach *unten* sind, erklären.

3) Vgl. unsere Tab. 1 und die Kurventafel I.

Atomwärmen nichts aufzuweisen, was eine Ausnahmestellung bedingt: sie erreichen die Atomwärmen ca. 9 erst bei ihren (sehr hoch gelegenen) Schmelztemperaturen. *Ihre Atomwärmen sind deswegen bei gewöhnlicher Temperatur klein, weil die Schmelztemperaturen sehr hoch liegen.*

Hr. Richarz und in neuerer Zeit auch Hr. Einstein haben aber geglaubt, daß sich die spezifische Wärme besonders jener Körper, die „abweichen", *asymptotisch* mit steigender Temperatur dem Wert 6 oder 6,4 nähern. Letzterer hat sogar eine komplizierte Formel für diese Anschauung geliefert. Leider übersahen beide Autoren die experimentelle Tatsache, daß der Wert 6 oder 6,4 überhaupt immer überschritten wird. (Ich habe oben gezeigt, daß *ungefähr* der Satz gilt: die *Integralmittel* sind gleich und ca. 6,5 Kal.)

Damit fallen auch die Prämissen (15) bis (18); (15) ist direkt ja nicht zu kontrollieren; (16) ist ohne klare Bedeutung: es gibt ja keine spezifische Wärme schlechthin! Die Temperaturänderung ist nicht zu vernachlässigen, denn sie trägt bei festen Körpern an 300 Proz. und ist auch bei Gasen ganz bedeutend (Mallard und Le Chatelier[1]). Es hat keinen Sinn, zu sagen, die eine spezifische Wärme sei die Hälfte der anderen, da doch beide variabel sind. Damit fällt auch die strenge Gültigkeit von (17); immerhin kann (17) genauer gelten als (16) (das ist sogar wahrscheinlich).

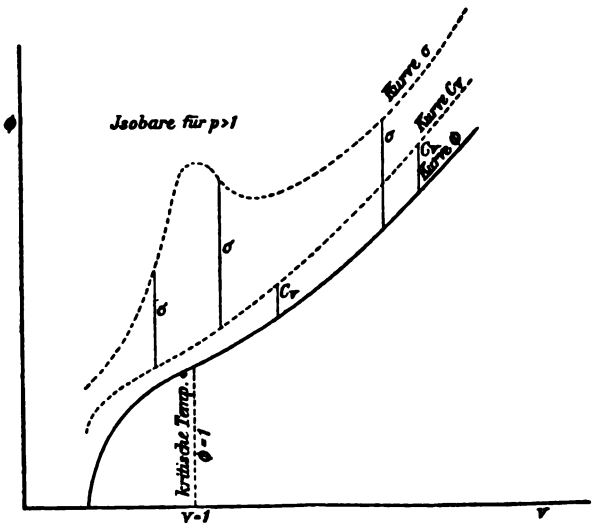
Wir haben mit σ die spezifische Wärme bei konstantem Druck bezeichnet. Die Größe c_v ist für feste Körper stets nahezu gleich σ. Denn es ist:

$$\sigma - c_v = \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \tag{18}$$

Das ist eine außerordentlich kleine Größe, daher macht c_v wohl im allgemeinen alle Veränderungen von σ mit. Es ist also c_v so wenig konstant wie σ. Es gelten also die Überlegungen von Hrn. Richarz für $A.\sigma$ so wenig wie für $A.c_v$.

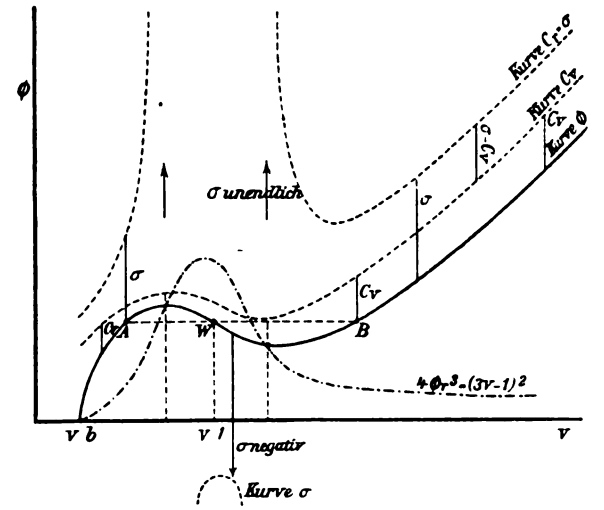
Daß auch für Gase die spezifische Wärme keine Konstanten sind, darf man wohl als sicher ansehen. Die spezifischen Wärmen steigen mit steigender Temperatur. Die Figg. 5

1) E. Mallard u. H. Le Chatelier, Compt rend. **93.** p. 962, 1014, 1076. 1881.



„Die spezifischen Wärmen van der Waalsscher Körper in vergleichbaren Parametern für einen konstanten Druck $p > 1$."

Fig. 5.



„Die spezifischen Wärmen van der Waalsscher Körper in vergleichbaren Parametern für einen konstanten Druck $p < 1$."

Fig. 6.

und 6 geben einen Überblick über das Wachsen der spezifischen Wärme c_p von Dämpfen und Gasen unter der Voraussetzung der van der Waalsschen Gleichung und eines langsamen Steigens von c_v (Mallard und Le Chatelier, l. c.) mit θ.

Erste Anmerkung. Die wesentlichsten Ausnahmen von unserer Grundanschauung (betreffend die vergleichbaren Zustände) sind festes Quecksilber und Gallium; beide Werte der Atomwärmen sind aber nur sehr ungenau bekannt.

Zweite Anmerkung. Die Verwertung unserer Grundanschauung über das Vergleichen der Elemente in vergleichbaren Zuständen führt zu einer neuen Auffassung der Periodizität der Elemente in dem natürlichen System. Die gewöhnliche Art des Nebeneinanderstellens von Gasen und festen Körpern verdeckt viele Analogien und Unterschiede. Viele Elemente sind (außer dem Eisen) magnetisch, aber bei viel *tieferen* Temperaturen. Viele Elemente leiten Elektrizität so gut wie Kupfer — aber bei viel tieferen Temperaturen. Viele Elemente haben dieselbe geringe Affinität zu O wie F — aber bei tiefen Temperaturen etc. Hierauf will ich noch zurückkommen.

Zürich, 2. März 1907.

(Eingegangen 18. März 1907.)

4. *Über die unipolare Induktion; von Arthur Szarvassi.*

Mit diesem Namen wird bekanntlich die folgende Erscheinung bezeichnet: Wenn ein zylindrischer Magnet um seine Achse rotiert, fließt in einem äußeren ruhenden Leitungsdraht, der an einem Ende mit der Achse verbunden ist, während das andere an der Mantelfläche des Magnets schleift, ein elektrischer Strom. Die Rotation eines Magnets ruft also ein elektrisches Feld in dessen Umgebung hervor.

Über die Ursachen dieser Erscheinung scheint noch heute Unklarheit oder mißverständliche Auffassung zu herrschen. Dies zeigt z. B. die unglückliche Fragestellung nach dem „Sitz der elektromotorischen Kraft" bei der Unipolarinduktion. Die elektromotorische Kraft ist das Integral der elektrischen Kraft erstreckt über eine geschlossene Kurve, z. B. eine Drahtleitung, und es hat keinen Sinn zu fragen, an welcher Stelle dieser Kurve das Integral einen von Null verschiedenen Wert habe. Man kann bloß nach dem Sitz der elektrischen Wirbel fragen, welche die elektromotorische Kraft der Induktion hervorbringen, und die Antwort auf diese Frage kann unzweideutig und klar nur vom Boden einer Theorie der Elektrodynamik bewegter Medien aus geschehen. In dieser Weise findet sich das Problem bei Hrn. Lorentz (Enzyklopädie der math. Wissenschaften V 13, § 18) und Hrn. Abraham (Theorie der Elektrizität I, § 87) behandelt, und zwar vom Standpunkte der Hertzschen Theorie.[1]) Aber auch hier ist die wahre Sachlage nicht erkannt, und die Frage nach dem Sitz der elektrischen Wirbel nicht richtig beantwortet worden. Aus diesen Darlegungen würde nämlich folgen, daß die elektrischen

1) Die Lorentzsche Theorie ergibt wohl in diesem Falle dasselbe Resultat wie die Hertzsche, da die Differentialgleichung, welche die Faradaysche Induktion darstellt, beiden Theorien gemeinsam ist. Über die Jaumannsche Theorie siehe später.

Wirbel im Innern des rotierenden Magnets liegen, was den Tatsachen nicht entspricht.

Im folgenden werde ich zeigen, daß *die elektrischen Wirbel, welche die Erscheinung der unipolaren Induktion verursachen, weder im Innern des rotierenden Magnets, noch außen im umgebenden Raum ihren Sitz haben, sondern daß sie in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des Magnets lokalisiert sind.*

Wir wollen der Darstellung des Hrn. Abraham folgen: Es sei M ein Meridianschnitt des rotierenden Magnets (vgl. Fig. 1), AA' die Achse; auf der geschlossenen Kurve $BaCDB$ wird die elektromotorische Kraft in gewohnter Weise mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechnet

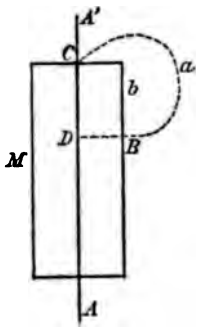


Fig. 1.

$$\int d\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{E} = \int df \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

Das erste Integral bezieht sich auf die genannte Kurve, das zweite auf das von ihr eingeschlossene Stück der Meridianebene.[1]) Nun lautet die zweite Hauptgleichung der Hertzschen Theorie, welche das Faradaysche Induktionsgesetz darstellt,

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{B},$$

oder, da $\operatorname{div} \mathfrak{B}$ für den Ruhefall Null ist, und durch die Bewegung wahrer Magnetismus nicht geschaffen wird,

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v}).$$

Betrachtet man, wie in unserem Falle, einen stationären Zustand, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$$

und die Hertzsche Gleichung reduziert sich auf:

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v}). \tag{1}$$

---

1) Die Bezeichnungen sind jene der mathematischen Enzyklopädie; nur wird das vektorische Produkt nach Gibbs durch das Zeichen × angedeutet.

Die elektromotorische Kraft in der Kurve $BaCDB$ ist daher

$$(2)\quad \begin{cases} \int d\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{E} = \int df\cdot \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\int df\cdot\operatorname{rot}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{v}) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{c}\int d\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{B}\times\mathfrak{v}). \end{cases}$$

Nun ist im Außenraume $\mathfrak{v} = 0$, ebenso auf der Rotationsachse, so daß zu dem letzten Integral nur das Stück DB einen Beitrag liefert. Liegt diese Strecke senkrecht zur Achsenrichtung, so erhält man demnach für die elektromotorische Kraft den Wert

$$(3)\quad \frac{w}{c}\int_0^a B_z\,\varrho\,d\varrho,$$

da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ senkrecht zur Meridianebene gerichtet ist und den Wert

$$v = w\varrho$$

besitzt, unter w die Winkelgeschwindigkeit und unter ϱ die Distanz eines Punktes von der Achse verstanden. B_z bedeutet die Komponente der magnetischen Induktion in axialer Richtung und a die Strecke DB. Aus dieser Herleitung sieht man deutlich, daß zum Werte der elektromotorischen Kraft nur die Raumteile im Innern des Magnets beitragen, in denen $\operatorname{rot}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{v})$ von Null verschieden ist, d. h. die Wirbel der elektrischen Kraft liegen im Innern des Magnets.

Diese Überlegung ist aber fehlerhaft, und zwar aus dem folgenden Grunde: Wie aus (1) hervorgeht, machen an einer Gleitfläche, d. h. einer Grenzfläche zweier Medien, an denen die tangentiale Geschwindigkeit sich unstetig ändert, auch die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke einen Sprung. Ist im besonderen keine Komponente der Geschwindigkeit normal zur Gleitfläche vorhanden, wie in unserem Falle, und geht die Normalkomponente B_n der magnetischen Induktion stetig über, wie es notwendig ist, falls $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ ist, so ist der Sprung der tangentialen elektrischen Kraft an der Gleitfläche durch die folgende Gleichung bestimmt[1]):

$$(4)\quad -c(E_{t1} - E_{t2}) = B_n(v_{s1} - v_{s2}).$$

1) Vgl. H. Hertz, Ausbreitung der elektrischen Kraft p. 271 ff.; M. Abraham, l. c. § 86.

Hier bedeutet E_t die tangentiale Komponente der elektrischen Kraft nach irgend einer Richtung t, v_s die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit in einer Richtung $\mathfrak{s} \perp t$; die beiden in der Gleitfläche aneinander grenzenden Medien sind durch die Indizes 1, 2 unterschieden, und die Richtungen n, $\mathfrak{s}$, t bilden in dieser Aufeinanderfolge ein Rechtssystem. Beziehen wir den Index 1 auf das Innere des Magnets, so ist in unserem Falle $v_{s_2} = 0$; ferner ist v_{s_1} normal auf die Meridianebene gerichtet, und es macht daher die in der Meridianebene gelegene Tangentialkomponente des elektrischen Vektors einen Sprung an der Grenzfläche. Folglich wird $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}$ an der Grenzfläche unendlich groß, d. h. es bildet sich daselbst eine unendlich dünne Wirbelschicht von endlicher Stärke aus; im speziellen wird die senkrecht zur Meridianebene gerichtete Komponente von $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}$ unendlich groß. Gerade um diese Komponente handelt es sich bei der Berechnung des Flächenintegrals $\int df \cdot \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}$ in (2); das Integral hört an der Linie b auf zu existieren, und es ist nicht erlaubt, über diese Linie einfach wegzuintegrieren. In diesem Falle ist die Anwendung des Stokesschen Satzes zur Berechnung der elektromotorischen Kraft unzulässig.

Wir können dies auch so ausdrücken: Gesetzt, wir wollen das Randintegral eines Vektors um die geschlossene Kurve c (Fig. 2) bilden. Teilen wir die eingeschlossene Fläche durch eine Trennungslinie d in zwei Teile 1 und 2, bilden wir — stets mit demselben Umlaufssinn — die Kurvenintegrale um die Berandungen der beiden Teile und summieren wir sie. Die Summe wird gleich sein dem Kurvenintegral um die Kurve c, wenn sich die beiden in entgegengesetztem Sinne genommenen Integrale längs d gegenseitig aufheben. Dies tun sie aber nicht, wenn — wie in unserem Falle — für den zu integrierenden Vektor $\mathfrak{E}$ die Linie d eine Unstetigkeitslinie ist; das Integral auf einer unendlich nahe an d im Gebiete 1 gelegenen Linie ist wesentlich verschieden von jenem auf einer Linie, die unendlich nahe an d im Gebiete 2 liegt. Gerade die Teilbarkeit des ganzen Kurvenintegrals in zwei

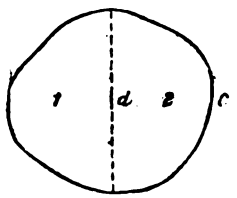


Fig. 2.

Teile der betrachteten Art ist aber für die Anwendbarkeit des Stokesschen Satzes wesentlich.

Die Sache wird vollkommen aufgehellt durch den folgenden Satz: *Die Rotation eines starren Rotationskörpers um seine Achse in einem beliebigen elektromagnetischen Felde, das symmetrisch um die Achse verteilt ist, erzeugt nach der Hertzschen Theorie weder im Innern des Körpers noch im umgebenden Raume elektrische oder magnetische Wirbel.* Alle etwa vorhandenen Wirbel müssen also an der Oberfläche des Körpers als Flächenbelegung lokalisiert sein. Den Beweis kann man folgendermaßen führen:

Wir wählen ein orthogonales Koordinatensystem p, q, r, dadurch definiert, daß das Quadrat des Linienelements irgend einer Kurve

$$ds^2 = \frac{dp^2}{P^2} + \frac{dq^2}{Q^2} + \frac{dr^2}{R^2}$$

sein soll.[1]) Hierin sind P, Q, R gewisse Funktionen von p, q, r. Eine der Koordinaten, z. B. r, spezialisieren wir: es möge r den Winkel bedeuten, den irgend eine durch die Achse gehende Meridianebene mit einer festen Meridianebene einschließt, also die geographische Länge eines Punktes. Da nun das Linienelement eines Parallelkreises

$$ds = \frac{dr}{R}$$

ist, so bedeutet

$$\varrho = \frac{1}{R}$$

die Distanz eines Punktes von der Achse. Die Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{a}$ nach den Richtungen der wachsenden p, q, r mögen entsprechend mit a_p, a_q, a_r bezeichnet werden. Die Forderung der Symmetrie um die Achse erfüllen wir dadurch, daß wir festlegen, keine der vorkommenden Größen sei von r abhängig. Dann haben die Komponenten von $\mathrm{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v})$ die folgenden Werte[2]):

---

1) Vgl. z. B. B. Riemann-Weber, Partielle Differentialgl. 1. § 37.

2) Vgl. z. B. B. Riemann-Weber, l. c. § 90, oder M. Abraham, Wied. Ann. 66. p. 488 f. 1898.

$$\frac{Q}{\varrho}\frac{\partial}{\partial q}[\varrho(B_p v_q - B_q v_p)],$$

$$-\frac{P}{\varrho}\frac{\partial}{\partial p}[\varrho(B_p v_q - B_q v_p)],$$

$$PQ\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{Q}(B_r v_p - B_p v_r)\right] - \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{P}(B_q v_r - B_r v_q)\right]\right\}.$$

Da nun die Bewegung in einer Rotation um die Symmetrieachse bestehen soll, so ist

$$v_p = v_q = 0, \quad v_r = w\varrho$$

(w = Winkelgeschwindigkeit); und daher reduzieren sich die Komponenten von $\mathrm{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v})$ auf die Werte:

$$0, \quad 0, \quad -PQw\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\varrho}{Q}B_p\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho}{P}B_q\right)\right].$$

Hingegen ergibt sich für die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}$:

$$0, \quad 0, \quad PQw\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\varrho}{Q}B_p\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho}{P}B_q\right)\right].$$

Also sind die Komponenten von $\mathrm{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v})$ jenen von $\mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}$ entgegengesetzt gleich; d. h. für unseren Fall wird

$$\mathrm{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0.$$

Ebenso kann man natürlich zeigen, daß

$$\mathrm{rot}(\mathfrak{D} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 0,$$

wo $\mathfrak{D}$ die elektrische Verschiebung bedeutet. Demnach reduzieren sich die Hertzschen Gleichungen für das Innere des rotierenden Körpers in diesem Fall auf die folgenden:

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{i},$$

$$-c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

d. h. auf die Maxwellschen Gleichungen für ruhende Medien.

Man kann diesen Beweis kürzer mit den von Hrn. Jaumann ausgebildeten Methoden der Dyadenrechnung führen. Es ist nämlich identisch

$$\mathrm{rot}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v} \times \nabla .$$ [1])

1) Vgl. G. Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre. § 350.

In unserem Falle ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{r},$$

wenn $\mathfrak{w}$ die Winkelgeschwindigkeit, $\mathfrak{r}$ den von einem Punkte der Achse gezogenen Ortsvektor bedeutet. Dann ist

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v} \times \nabla = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \times \nabla = -\mathfrak{B} \cdot I \times \mathfrak{w} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{B}.$$ [1])

Ferner haben wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{B} = \frac{d \mathfrak{B}}{d t},$$ [2])

indem man in üblicher Weise unter d/dt die zeitliche Änderung an einem der Bewegung folgenden Punkte des Körpers versteht. Wegen der Symmetrie findet sich aber abgesehen von zeitlichen Änderungen lokaler Natur der Feldvektor $\mathfrak{B}$ einfach aus einer Meridianebene in die andere transportiert, d. h.

$$\frac{d \mathfrak{B}}{d t} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{B} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{B},$$

also:

$$\mathfrak{v} \nabla ; \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v} \times \nabla = 0.$$

Im Außenraume tritt selbstverständlich das nämliche ein wegen der Bedingung $\mathfrak{v} = 0$. Nur für die Grenzfläche des rotierenden Körpers gilt dies nicht, da hier in einer außerordentlich dünnen Schichte die Geschwindigkeit sich sehr rasch ändert und nicht mehr dem Gesetz $v_r = w \varrho$ genügt; hier werden also durch die Rotation elektrische oder magnetische Wirbel entstehen und ihren Einfluß auf das ganze elektromagnetische Feld ausüben.

Rotiert also ein symmetrisch um die Achse magnetisierter Magnet, so entstehen weder innen noch außen elektrische Wirbel. Die Lorentz-Abrahamsche Berechnungsweise würde also für den Durchfluß von rot $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v})$ durch die von der Kurve $BaCDB$ umschlossene Fläche null ergeben, und man erhielte gar keine elektromotorische Kraft. Der Fehler dieser Berechnung wird eben, wie oben gezeigt, dadurch verursacht, daß rot $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{v})$ längs der Linie a unendlich große Werte annimmt. Ich möchte hier bemerken, daß ich selbst in einer früheren Arbeit [3]) einen ähnlichen Fehler begangen

1) Vgl. l. c. § 376.
2) Vgl. l. c. § 381.
3) A. Szarvassi, Wien. Ber. 111. Abt. IIa. p. 1053.

und daher den irrtümlichen Schluß gezogen habe, daß die Hertzsche Theorie den Rowland-Effekt nicht wiedergebe.

Die richtige Berechnungsweise des Unipolar-Effekts ist nun die folgende: Für den stationären Fall gilt innerhalb des Körpers sowie außen — falls wir das statische Feld berechnen wollen, also die Drahtleitung außen fortgenommen denken —

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 .$$

Demnach besitzt das elektrische Feld außen und innen ein Potential; aber diese beiden Potentialräume hängen gar nicht miteinander zusammen, denn sie sind durch eine Wirbelschicht an der Oberfläche des Magnets voneinander getrennt. Ströme können sich innen nicht ausbilden, also ist

$$\mathfrak{i} = 0$$

und demnach im Innenraume

$$\mathfrak{E} = 0 .$$

Da außen nirgends elektrische Ladungen sich befinden, genügt daselbst das elektrische Potential φ der Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0 .$$

Jedoch hat das Potential nicht die Verteilung wie in einem elektrostatischen Felde, da die Oberfläche des Leiters keine Niveaufläche des Potentials ist. Um die Potentialverteilung auf der Oberfläche des Magnets zu berechnen, benützen wir Gleichung (4), welche die Größe des Sprunges der in einer Meridianebene gelegenen Tangentialkomponente der elektrischen Kraft bestimmt. Dieselbe reduziert sich auf:

$$c E_{t2} = B_n v_{s1} = B_n w a ;$$

ferner ist

$$E_{t2} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} ,$$

wenn die Meridiankurve an der Begrenzung des Körpers durch die laufende orthogonale Koordinate p, also durch die Gleichungen

$$q = \text{const.}, \quad r = \text{const.}$$

bestimmt ist. Demnach ist die Potentialverteilung auf dieser Meridiankurve gegeben durch:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{w}{c} \int B_n a \, dp , \tag{5}$$

wo φ_0 das Potential auf der Achse, nämlich für $a = 0$, bedeutet. Wegen der Symmetrie herrscht dieselbe Potentialverteilung längs der Begrenzungskurve in jeder Meridianebene.

Dieses Resultat ist von dem aus Gleichung (3) folgenden Lorentz-Abrahamschen

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{w}{c} \int B_z \varrho \, d\varrho \tag{3 a}$$

nur formal verschieden. Der in (5) vorkommende Ausdruck

$$\int B_n \cdot w \, a \, dp$$

gibt nämlich den magnetischen Induktionsfluß durch eine Fläche an, welche die Linie $B\,b\,C$ (Fig. 1) pro Zeiteinheit beschreibt. Hingegen bedeutet das Integral

$$\int B_z \cdot w \, \varrho \, d\varrho$$

in (3 a) den Induktionsfluß durch eine Fläche, die während derselben Zeit von der Linie $D\,B$ beschrieben wird. Da nun die magnetische Induktion divergenzfrei verläuft, muß derselbe Fluß, der durch $D\,B$ hindurchgeht, auch bei der Begrenzungslinie $B\,b\,C$ austreten; die beiden Induktionsflüsse sind demnach identisch. Der Grund, weshalb auf dem oben als unrichtig bezeichneten Wege ein richtiges Resultat erhalten wurde, ist der, daß

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

ist.

Man sieht ein, daß dieselbe Überlegung, die hier für den Unipolareffekt angestellt wurde, ebenso für alle elektromagnetischen Rotationseffekte mit axialer Symmetrie gilt, also auch für die Rowlandsche Erscheinung und den Röntgen-Effekt. In allen diesen Fällen verdanken nach der Hertzschen Theorie die infolge der Rotation auftretenden Erscheinungen ihre Ursache einer Wirbelschicht an der Oberfläche des rotierenden Körpers. Man begegnet hier Flächenbelegungen von Wirbeln, wie man bei elektrischen Erscheinungen von alters her Flächenbelegungen von Divergenzen anzunehmen gewohnt ist.

Für den Unipolareffekt gibt auch die Lorentzsche Theorie dasselbe Resultat, nicht aber für die anderen Er-

scheinungen, bei denen Rotationen in elektrischen Feldern vorkommen. Da nämlich die erste Hauptgleichung der Lorentzschen Theorie

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{i}$$

sich von jener der Hertzschen Theorie

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot}(\mathfrak{D} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{i}$$

durch das Glied $\operatorname{rot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{v})$ unterscheidet, heben sich für das Innere des rotierenden Körpers die von der Bewegung herrührenden Glieder nach Lorentz nicht weg wie nach Hertz. Vielmehr müssen nach der Lorentzschen Theorie auch im Innern eines in einem axial-symmetrischen elektrischen Felde rotierenden Körpers magnetische Wirbel auftreten von der Größe $-\operatorname{rot}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{v})$. Dies ist der eigentliche Grund, weshalb der Röntgensche Versuch nach Lorentz ein anderes quantitatives Resultat gibt als nach Hertz, und weshalb die Lorentzsche Theorie für den Eichenwaldschen Versuch, bei dem alle Wirbelschichten an der Oberfläche des rotierenden Körpers null sind, eine von null verschiedene Wirkung angibt.

Zu demselben Resultat bezüglich des Unipolareffekts ist vor kurzem von ganz anderer Seite Hr. Jaumann gekommen.[1]) Dieser hat eine Theorie der Elektrodynamik bewegter Medien aufgestellt[2]), in welcher er von der Kundtschen Erscheinung der optischen Doppelbrechung in deformierten Flüssigkeiten ausgeht. Nach seiner Theorie hat einzig und allein die Deformation des Mediums Einfluß auf die elektromagnetischen Erscheinungen, und alle elektrischen oder magnetischen Wirbel haben ihren Sitz nur in den deformierten Teilen des Mediums. Bei der unipolaren Induktion findet eine Deformation nur an der Oberfläche des Magnets statt, wo der bewegte Körper an das ruhende Medium grenzt und die Größe der Geschwindigkeit ein außerordentlich lebhaftes Gefälle aufweist. Nach Jaumann liegen daher die elektrischen Wirbel nur in dieser

1) G. Jaumann, Ann. d. Phys. **19.** p. 904 f. 1906.
2) l. c.; ferner Ber. d. Wien. Akad. **114.** Abt. IIa. p. 1635; **115.** p. 337.

Deformationsschicht. In diesem Falle stimmt also auch die Jaumannsche Theorie mit der Hertzschen überein, und dies wird in allen jenen Fällen eintreten, wo ein Rotationskörper in einem axial-symmetrischen Felde rotiert. Hr. Jaumann faßt daher die Sache zu eng, wenn er glaubt, daß die Übereinstimmung seiner Theorie mit der Hertzschen sich auf jene Fälle beschränke, in denen „die Rotationsachse dem magnetischen Feldvektor parallel ist“.[1])

Brünn, Physik. Institut d. Techn. Hochschule.
22. Febr. 1907.

1) l. c. p. 905.

(Eingegangen 23. Februar 1907.)

5. *Über die Adsorption von Gasen durch Holzkohle bei tiefen Temperaturen*[1]; *von H. Baerwald.*

I.

Die Tatsache, daß Holzkohle nach Erhitzung im luftleeren Raume die Fähigkeit erlangt, namhafte Mengen von Gasen an ihrer Oberfläche zu verdichten, ist Gegenstand zahlreicher Versuche gewesen. Insbesondere gingen die Arbeiten von Saussure, Chappuis[2]) und Kayser[3]) darauf aus, die Aufnahmefähigkeit der Kohle für Gase in ihrer Abhängigkeit vom Drucke und von der Temperatur nachzuweisen. Der Einfluß der Oberflächengröße auf die Gasverdichtnng wurde in weiteren Arbeiten über die Adsorption von Kohlensäure und anderen, leicht zu verflüssigenden Gasen an Glasfäden studiert, von denen besonders diejenigen Bunsens[4]) wegen ihrer, von anderen abweichenden Ergebnisse wiederholte Prüfungen hervorriefen. Im wesentlichen bestätigten sich die Resultate der oben genannten Forscher, so auch in einer Arbeit P. Mülfarths[5]) über die Adsorption von Gasen an Glaspulver.

Die Erscheinung hat erneut allgemeines Interesse erregt infolge einer Arbeit von Dewar[6]), in welcher dieser zeigte, daß die Adsorption von Gasen durch Holzkohle, insbesondere die der Kokusnuß, bei der Temperatur der flüssigen Luft stark genug ist, um auf sie ein bequemes Verfahren zur Herstellung luftleerer Räume gründen zu können, welches die

1) Auszug aus der Freiburger Dissertation.

2) P. Chappuis, Wied. Ann. **12.** p. 161. 1881.

3) H. Kayser, Wied. Ann. **12.** p. 526. 1881.

4) R. Bunsen, Wied. Ann. **20.** p. 545. 1883; **22.** p. 145. 1884; **24.** p. 321. 1885; **29.** p. 161. 1886.

5) P. Mülfarth, Ann. d. Phys. **3.** p. 328. 1900. Daselbst auch eine Zusammenstellung der Literatur über die Adsorption von Gasen an der Oberfläche fester Körper.

6) J. Dewar, Ann. de chim. et phys. (8) **3.** September 1904.

Anwendung von Luftpumpen zu umgehen gestattet und sich besonders dann empfiehlt, wenn es darauf ankommt, Quecksilberdämpfe im Rezipienten zu vermeiden und Edelgase in Gasgemischen spektroskopisch nachzuweisen.

Im folgenden erlaube ich mir, über eine Reihe von Messungen zu berichten, bei denen ich mich bemüht habe, nach Möglichkeit die Bedingungen des Dewarschen Versuches zu variieren. Auf Grund einer größeren Zahl orientierender Messungen kam ich zu der folgenden, in Fig. 1 wiedergegebenen Versuchsanordnung, mit welcher die definitiven Messungen ausgeführt wurden.

In der Figur bezeichnet *E* das für die Aufnahme der zu untersuchenden Kohle bestimmte Rohr. Bei *J* ist es mittels Schliff an das Röhrensystem des Rezipienten, der durch *E*, *A* und *C* begrenzt wird, anzusetzen. Die Rohrbiegung dient dazu, das Rohr *E* in der richtigen Höhe zu halten, um zur Erhitzung der Kohle den elektrischen Ofen auf einem Stelltisch bequem herunterschieben und in die Höhe schrauben zu können. Der Schliff bei *J* ist mit Quecksilberdichtung versehen. Zur Erhöhung der Elastizität ist in *F* eine Kundtsche Feder eingeschaltet; sie hat, um den Rezipientenraum nicht unnütz groß zu machen, einen inneren Durchmesser von ca. 3 mm, während die übrigen Röhren einen solchen von 6 mm besitzen. Denn wegen der Länge des Systems ist es im Interesse eines guten Arbeitens der Luftpumpe wünschenswert, den Druckausgleich möglichst zu erleichtern und nicht zu enge Röhren zu wählen.

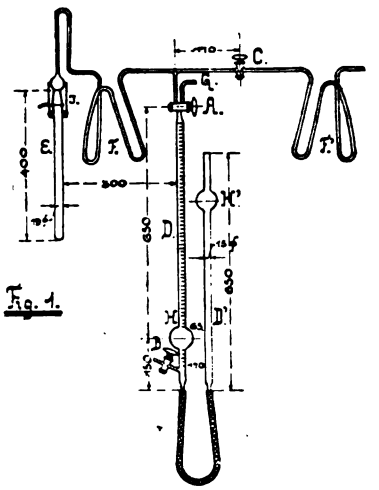


Fig. 1.

Das Rohr *D* ist zur Aufnahme der Gase bestimmt. Die an ihm angebrachte, nach Kubikzentimeter genommene Teilung läuft von oben nach unten bis zur Marke 65. Hier ist eine

99 ccm fassende Kugel angeblasen; in ihrem Inhalte entspricht sie ungefähr dem des Rezipienten. Unterhalb der Kugel läuft die Teilung von 164—170 ccm weiter. Das in *G* durch den Zweiweghahn *A* eintretende Gas gelangt durch den mit einem Hahn versehenen Ansatz *B* ins Freie. Man hat nur nötig, das ebenso wie *D* angefertigte Rohr *D'* — welches mit jenem durch einen Kautschukschlauch verbunden ist, eine ebenfalls ca. 100 ccm fassende Kugel *H'* oben trägt, ohne indessen Skalenteilung zu besitzen —, zu senken und den Quecksilbermeniskus dicht unter dem Rohransatz *B* sich einstellen zu lassen. Das Gas, welches bei *B* austritt, kann so bequem auf seine Reinheit hin untersucht werden.

Der Hahn *C* sperrt den Rezipientenraum von der Luftpumpe ab. Elastizität der Verbindung ist hier durch eine Kundtsche Feder *F'* gewahrt. Zwischen *F'* und der Luftpumpe war in den ersten Versuchen ein Trockengefäß mit Phosphorpentoxydfüllung eingeschaltet. Getragen wurde der Apparat bei *D*, *D'* und *E* von eisernen, mit englischen Klammern festgestellten Ständern. Zur Einfettung der Hähne kam eine passende Mischung von Vaselin und Wachs zur Verwendung.

Die Heizung des Rohres *E* geschah, wie schon angedeutet, elektrisch. Die Temperaturen über 300° C. wurden durch ein neben *E* in den Ofen eingeführtes Thermoelement gemessen und an einem Keiserschen Millivoltmeter abgelesen. Der obere Rand des Ofens wurde mit Asbestwolle verstopft, der untere mit einer Glimmerplatte verschlossen, durch welche mit Hilfe eines schräg gestellten Spiegels die Vorgänge im Innern des Ofenrohres sich beobachten ließen.

Die zu untersuchenden Gase wurden entweder aus Stahlflaschen, oder aus dem Kippschen Apparate entnommen und perlten in langsamem Strome durch eine mit Schwefelsäure gefüllte Trockenflasche und ein Gefäß mit Phosphorpentoxyd. Bei Anwendung des Kippschen Apparates wurden zuweilen mehrere Trockenflaschen verwendet. Das Erforderliche wurde für die einzelnen Versuchsreihen besonders ausprobiert und ein Resultat nur dann für gültig befunden, wenn sich durch Vergleich mit anderen gezeigt hatte, daß ein Fehler durch Feuchtigkeit nicht entstanden sein konnte.

Die Dichte der zu untersuchenden Kohlesorten wurde mittels des Pyknometers bestimmt. Die Kohle wurde dabei zu einem feinen, unfühlbaren Pulver zerrieben. Es fand sich für

Kokusnußkernkohle	1,85
Kokusnußschalenkohle	1,92
Lindenholzkohle	1,74
Holundermarkkohle	1,78.

II.

Zunächst kam es darauf an, die Abhängigkeit der Entgasung der Kohle von der Erhitzung kennen zu lernen. Das Bestreben ging dahin, wenn möglich, einen Punkt zu finden, von welchem an eine weitere Steigerung der Temperatur nicht mehr mit einer Zunahme der Adsorptionsfähigkeit verbunden war. Gelang das, so war nachgewiesen, daß bei dieser Temperatur die Kohlepartikel ihre Gashülle vollkommen abgegeben hatten und die Adsorption durch ein genau definierbares Material bestimmbar war.

Die hierauf bezüglichen Versuche[1]) ergaben, daß eine totale Entgasung der Kohle nicht ohne weiteres möglich ist. Die der Kohle bei den höchsten Temperaturen noch verbleibenden Gasreste von Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff bedingen chemische Prozesse und schaffen dadurch Verhältnisse von solcher Komplikation, daß die Frage nach der vollständigen Entgasung der Kohle, deren Bedeutung in der vorliegenden Arbeit nicht an erster Stelle stand, nur durch weitergehende Untersuchungen zu beantworten sein dürfte.

Immerhin zeigten diese Vorversuche, daß eine Zunahme der Adsorption mit steigender Entgasungserhitzung bis über 500° C. besteht. Der Verlauf der Adsorptionskurven bis zu dieser Grenze wird ein Charakteristikum für die Art und Weise der Entgasung und Adsorption bei einer bestimmten Kohle und einem bestimmten Gase bilden, welches über die hier waltenden Kräfte vielleicht ebenso gut Aufschluß zu geben geeignet ist, wie die Auffindung absoluter Adsorptionsmengen.

Um einen Überblick über den Zusammenhang der Adsorptionszunahme mit steigender Entgasungserhitzung zu ge-

1) Dissertation p. 12—21.

winnen, wurde zunächst Kokusnußkernkohle mit den fünf wichtigsten Gasen: Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Luft und Kohlensäure untersucht, die in ihrer sehr verschiedenen Verdichtbarkeit die Adsorptionserscheinungen in genügend weite Grenzen fassen. Die Adsorption fand bei Zimmertemperatur statt. Da für Kohlensäure die kritische Temperatur bei 30,9° liegt, mußte für dieses Gas die Adsorption oberhalb dieser geprüft werden, um zur Vergleichung der Resultate für Kohlensäure mit denen von Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff in physikalischer Hinsicht eine gleiche Grundlage zu haben.

Die anderen Kohlen wurden in ihrer Adsorption nur mit Wasserstoff und Stickstoff, möglichst indifferenten Gasen, geprüft; zur Untersuchung wurde Kokusnußschalenkohle, Lindenholz- und Holundermarkkohle gewählt. Wenn auch der Unterschied in der Dichte bei diesen, wie bei allen Kohlen gering ist, so unterscheiden sie sich doch erheblich in ihrer Härte, ihrem Volumgewicht und ihrer Porosität. Obenan steht hierbei die Kokusnußschale, es folgen Kokusnußkern, Lindenholz und Holundermark. Durch diese Auswahl dürfte wohl den extremsten Fällen Genüge geschehen sein.

Zu den früheren Versuchen bei Erhitzungen bis 1200° hatte ein Quarzrohr gedient, welches durch die Einwirkung der Kohle zerstört worden war. Für die folgenden Versuche genügte ein aus schwer schmelzbarem Glase gefertigtes Rohr, das die in Fig. 1 gegebenen Maße von 40 cm Länge und 19 mm äußerem Durchmesser hatte. Der Schliff bedurfte keiner Kühlung, da er weit genug vom Ofen entfernt war und die längste Erhitzungsdauer bei 500° nur $1^1/_2$—2 Stunden betrug. Er wurde leicht eingefettet und mit Quecksilber gedichtet. Bei der Erhitzung ward Sorge getragen, daß die Kohle sich in der Mitte des Ofens befand, wo auch die Lötstelle des Thermoelementes, bez. bei Temperaturen unter 300°, das Gefäß des Quecksilberthermometers angeordnet war. Gemessen wurde bei 500°, 400°, 300°, 160° und 20°, d. h. bei Zimmertemperatur ohne vorangegangene Entgasungserhitzung. In zweifelhaften Fällen wurden zuweilen Zwischentemperaturen genommen.

Das Gas wurde stets auf Atmosphärendruck gehalten und

die durch Adsorption geschaffene Druckverminderung durch Nachstellen des Rohres *D'* wieder ausgeglichen.

Die Raummessung des Rezipienten wurde mit einem in *D* unter Atmosphärendruck abgesperrten Gasquantum vorgenommen. Der Rezipient wurde leergepumpt und *C* geschlossen. Öffnete man jetzt Hahn *A* und brachte durch Nachstellen von *D'* das Gas wieder auf Atmosphärendruck, so stellte sich der Inhalt des Rezipienten als Differenz der beiden, vor und nach Öffnung von *A* gemachten Ablesungen am Rohre *D* dar. Der Hahn *A* bleibt des Druckausgleiches halber offen. Die beim Öffnen des Hahnes eintretende Expansion und durch diese bedingte Gasabkühlung wird durch nachfolgende Kompression wieder kompensiert und dürfte so kleine Fehler verursachen, daß diese wohl außer acht zu lassen sind. Mithin ist bei dieser Methode der Raummessung keinerlei Gasreduktion vonnöten. Man operiert mit dem Gase wie mit einer inkompressibeln Flüssigkeit, die entsprechend der Größe des zu bestimmenden Raumes in die Höhe gehoben wird. Die Genauigkeit der Messung hängt nur ab von dem Grade der Luftleere im Rezipienten und der Genauigkeit der horizontalen Einstellung der beiden Quecksilberkuppen durch Heben von *D'*. Gemessen wurde der Raum, wenn in ihm ein Druck von höchstens 0,0005 mm herrschte. Dies war auch der Druck, der am Ende einer Entgasungserhitzung, wenn *E* schon abgekühlt und fertig zum Einlassen des zu untersuchenden Gases war, gemessen wurde. Unterschiede von 0,0002 bis 0,0004 mm hatten bemerkbare, wenn auch unerhebliche Differenzen im Ergebnis der Raummessung zur Folge.

Ungenauigkeiten entstanden anfangs bei der Absperrung und Bestimmung des Gasquantums in *D*. Das Gas war nach Passierung der Trockenvorrichtungen durch *A* ein- und durch *B* ausgeströmt. Wenn man sicher sein durfte, in *D* reines Gas zu haben, wurde *A* und *B* geschlossen, gewartet, um etwaige Temperaturungleichheiten zum Ausgleich zu bringen, und dann durch Heben von *D'* der Ansatz *B* bis zum Hahn mit Quecksilber gefüllt, die Kuppe in *D* aber auf den Teilstrich 170 eingestellt. Der so entstehende Überdruck von 15—20 mm konnte nicht genau und schnell genug gemessen werden. Die durch die Körpernähe hervorgebrachten Temperaturdifferenzen

schufen Fehler, die sich durch das dicht an *D* herabhängende Thermometer nicht kontrollieren ließen.

Hier half ein kleiner Kunstgriff. Nach Füllung von *D* wurde, wie vorher, *A* und *B* abgesperrt, der Gasleitungsschlauch der Trockenvorrichtung bei einer Schwefelsäureflasche abgezogen und zugeklemmt, etwa 5 mm unter Wasser gebracht. Dabei blieb zwischen *A* und dem in das Wasser mündenden Ende das ebenfalls mit dem Versuchsgase gefüllte Phosphorpentoxydgefäß eingeschaltet. Nun wurde *A* nach der Gasleitung wieder geöffnet und unter Füllung des Ansatzes *B* bis zum Hahn auf 170 ccm eingestellt. Der Fehler infolge Überdruckes in *D* ist verschwindend. Auch ihn konnte man durch momentanes Lüften des Schlauchendes und sofortiges Untertauchen beseitigen und war dann gewiß, Gas unter Atmosphärendruck im Rohre *D* zu haben. Diese hier beschriebenen Handgriffe waren schnell zu erledigen und dauerten bis zur fertigen Einstellung nicht länger als 20 Sek.

Das am Ende eines Adsorptionsversuches in *D* verbleibende Gas wurde darin belassen. Das für den neuen Versuch durchzuleitende Gas perlte erst 15 Min. durch den Trockenapparat ins Freie. Darauf wurde der Schlauch über das Ansatzrohr bei *A* geschoben und *A* wie *B* geöffnet. Alsdann war nur die in dem kurzen Ansatzstück befindliche Luft als Gasverunreinigung vorhanden; 10—15 weitere Minuten genügten, um im Rohre *D* völlig reines Gas zu haben.

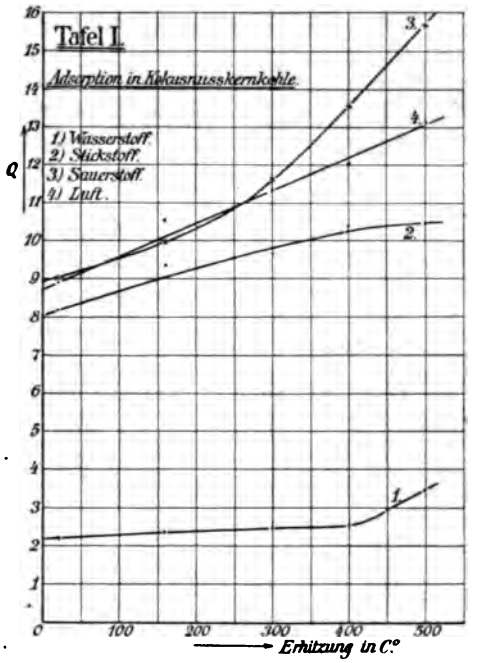
Für die mit Kokusnußkernkohle angestellten Versuche seien hier die Resultate in Tab. 1 gegeben. Die unter H_2, N_2, O_2, Luft und CO_2 verzeichneten Werte sind die Anzahl adsorbierter Kubikzentimeter Gas pro Kubikzentimeter Kohle. Sie wurden erhalten, indem man aus dem Gewicht der angewandten Kohlenmenge mittels ihrer Dichte den von ihr beanspruchten Raum berechnete und mit dieser Zahl in die der erhaltenen adsorbierten Kubikzentimeter Gas dividierte. *T* bezeichnet die Höhe der Erhitzungstemperatur während der Entgasung der Kohle. Zusammen mit Tafel I und II kennzeichnet die Tabelle die verschiedenen Gase in ihren wesentlichen physikalischen Eigenschaften. Je leichter verdichtbar, desto mehr wird ein Gas adsorbiert, desto schwieriger ist es

aus der Kohle wieder zu entfernen, desto größer ist die Zeit bis zur Beendigung des Adsorptionsprozesses.

Tabelle 1.

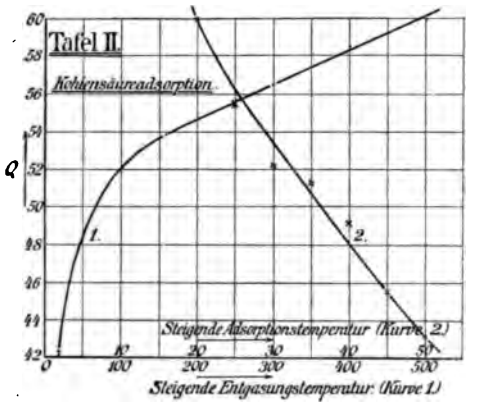
T	H_2	N_2	O_2	Luft	CO_2
500	3,41	10,48	15,64	13,11	59,93
400	2,50	10,36	13,52	12,03	58,55
300	2,44	9,66	11,53	11,26	56,41
160	2,34	9,36	9,94	10,51	53,93
20	2,19	8,18	9,06	8,94	42,37

Daß die Adsorptionserscheinungen dem Daltonschen Gesetze nicht gehorchen, geht aus den Werten für Luft deutlich hervor. Vom Sauerstoff wird mehr aufgenommen als das Partialdruckgesetz erwarten ließe.



Bemerkenswert ist die Kurve für CO_2 in Tafel II. Der letzte Wert bezeichnet die von der Kohle aufgenommene Gas-

menge, wenn sie ohne Erhitzung entgast wurde. Für ihn zeigte sich bei der Kohlensäure eine starke Labilität. Es genügte, das Rohr *E* während des Evakuierens einige Zeit mit der Hand zu erwärmen oder in laues Wasser zu tauchen, um ein Ansteigen der Adsorptionsmenge zu bewirken. Man darf annehmen, daß, wenn die Kohlensäure bei 20° dieselben physikalischen Eigenschaften besäße, wie bei 160° und aufwärts, der Kurvenverlauf ein linearer wäre. Da aber die kritische Temperatur der Kohlensäure bei 30,9° liegt, so schließen wir,



daß die Kohlensäure bei der Adsorption gegenüber den von den Kohleteilchen ausgeübten Anzugskräften jene Veränderungen zeigt, welche wir von den Verdichtungserscheinungen durch Druck her kennen. Sie wird eine feine flüssige Schicht, oder wenigstens eine Schicht solchen Gases um den Kohlekern bilden, welches nahe an seinem Verflüssigungspunkte ist.[1]) Wird nun während des Auspumpens die Kohle nicht erhitzt, so werden diese dichten Schichten nicht mehr, wie im Falle permanenten Gases aufgelöst, sondern der Kohle angelagert bleiben. Entfernt werden nur die äußeren Hüllen der Molekularatmosphäre, für welche die Kapillarkräfte nicht mehr groß genug sind, daß durch sie die Kohlensäure aus dem gasförmigen Zustande wesentlich entfernt würde. Nur sie werden bei der Adsorption wieder ersetzt, und daher die Verringerung der adsorbierten Menge.

1) R. Bunsen, Wied. Ann. 20. p. 545. 1883.

Um den Einfluß der kritischen Temperatur auf die Adsorption der Kohlensäure deutlich zu machen, wurde nach Beendigung des ersten Versuches das Kohlerohr, soweit die Kohlefüllung reichte, in ein Wasserbad gebracht und dessen Temperatur allmählich bis 50° C. gesteigert. Die adsorbierte Menge nahm ab und wurde erhalten, indem man, ähnlich wie später bei den Abkühlungsversuchen, der Ausdehnung des Gases durch einen entsprechenden Parallelversuch ohne Kohle Rechnung trug.

In Kurve 2, Tafel II, welche die Resultate darstellt, ist von einer Unstetigkeit nichts zu bemerken, obgleich eine solche zu erwarten war. Für erfolgreiche Messungen war die beschriebene Methode vielleicht nicht fein genug. Die Kurve sagt nur aus, daß die adsorbierte Gasmenge mit steigender Adsorptionstemperatur abnimmt. Indessen darf uns das Ausbleiben eines erwarteten Ergebnisses nicht veranlassen, obige Auseinandersetzungen zu widerrufen.

Mit den im Vorangegangenen gegebenen Messungen ließen sich solche vergleichen, die an verschiedenen Holzkohlesorten angestellt wurden. Die dabei ausgewählten Gase stellen offenbar den Maßstab dar, an dem sie in ihrer verschiedenen Adsorptionsfähigkeit geprüft werden können. Ich glaubte, Wasserstoff und Stickstoff wählen zu sollen. Sie sind indifferenter als Sauerstoff und Kohlensäure, schwer zu verflüssigen und werden in so verschiedenen Mengen adsorbiert, daß etwaige durch diese Tatsache bedingte Unterschiede in den Adsorptionserscheinungen genügend klar zutage treten dürften.

Die Wahl der Kohlesorten konnte nicht wohl durch die verschiedene Dichte bestimmt werden; deren Werte schwanken zwischen 1,5 und 2,0, also zwischen nahe beieinander liegenden Grenzen. Man kann nicht erwarten, daß so geringe Differenzen, wie sie die Dichte von Lindenholz- und Holundermarkkohle, oder selbst Kokusnußschalenkohle mit 1,74 gegen 1,78 bez. 1,92 aufweist, nennenswerte Unterschiede in den Adsorptionsmengen hervorrufen werden.

Das Augenmerk richtete sich also nicht auf das spezifische, sondern auf das Volumgewicht. Dieses weist recht große Verschiedenheit auf. Unter den ausgewählten ist die

härteste Kohle die der Kokusnußschale, und es folgen in absteigender Reihe Kokusnußkern, Lindenholz und Holundermark. Die Kokusnußschalenkohle ist in ihrem Gefüge sehr dicht, mit äußerst feinen Poren versehen und von fast muscheligem Bruche; ihr Volumgewicht ist dementsprechend groß. Lindenholz und Kokusnußkern stehen sich ziemlich nahe. Ersteres hat etwas feinere Poren und ein homogeneres Gefüge. Die Kokusnußkernkohle ist spröder und läßt sich weniger leicht, ohne zu splittern, schneiden. Das bei weitem geringste Volumgewicht besitzt die Holundermarkkohle. Das Gefüge ist bei ihr gegenüber den anderen Sorten am lockersten, ihre Poren sind die größten.

Bei den Versuchen wurde das Kohlerohr *E* möglichst immer bis zur gleichen Höhe angefüllt, um die Erhitzung in allen Fällen möglichst gleich zu gestalten. Die Höhe der Kohlensäule war bei Holundermarkkohle allerdings um 1 bis 2 cm größer als bei Kokusnußkern und Lindenholz, bei Kokusnußschale andererseits um etwa 2—3 cm kleiner. Diese Differenzen sind durch das verschiedene Volumgewicht bedingt, welches die Messung der Adsorption, insbesondere des Wasserstoffs bei der Holundermarkkohle wegen der geringen Mengen erschwerte, bei Kokusnußschale und Stickstoff so erhebliche Adsorptionsmengen lieferte, daß der Apparat nicht mehr ausgereicht haben würde, wenn eine gleich hohe Kohlensäule, wie bei Lindenholz- und Kokusnußkernkohle angewandt worden wäre. Die Gewichtsmengen waren in den im folgenden angegebenen Versuchen für Kokusnußschale etwa 9 g, Lindenholz 2 g, Kokusnußkern 0,7 g, Holundermark 0,2 g.

Mittels dieser Versuche konnte möglicherweise der Einfluß der Oberflächen auf die Adsorption festgestellt werden. Variationen in der Größe derselben, d. h. Variationen, die durch Zerschneiden größerer würfelförmiger Stücke in acht kleinere, oder auch durch weitergehende Unterteilungen hervorgerufen waren, hatten in den Vorversuchen keine Änderung der Adsorptionsmenge ergeben. Das war einleuchtend, denn die Adsorption ist durch die inneren Kohleteilchen ebenso bedingt wie durch die äußeren, da die große Porosität der Kohle die Gaszufuhr in das Innere nicht hemmt, zumal der volle Atmosphärendruck als treibende Kraft wirkt. Es wird also

gleichgültig sein, ob durch Führung von Schnitten einige innere Teilchen zu äußeren werden, oder nicht, selbst dann gleichgültig, wenn die Gasdiffusion etwas gehemmt sein sollte. Denn durch Zerteilung von Kohlestücken werden sich schwerlich so große Differenzen in den Adsorptionsmengen herausstellen, daß sie die Fehlergrenze der Versuche überschritten und erkennbar würden.

Es kann sich also hier nur um eine Art qualitativen Einflusses der Oberfläche, nämlich der Konstitution der betreffenden Kohlensorte auf die Adsorption handeln. Insofern die mehr oder minder große Porosität das Hauptmerkmal der Kohlebeschaffenheit abgibt, werden die etwaigen Änderungen der Adsorption durch verschiedene Porosität wesentlich bedingt erscheinen. Der Beweis für diese Tatsache ist schon in den ersten Arbeiten über die Gasadsorption an den Oberflächen fester Körper erbracht worden.[1])

Tabelle 2.

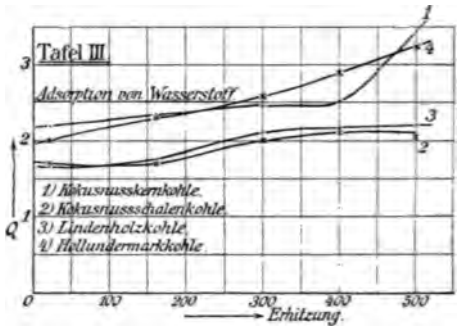
T	Kokusnußschale	Lindenholz	Holundermark
500	2,03	2,18	3,24
400	2,10	2,13	2,88
300	1,97	2,10	2,59
160	1,69	1,73	2 30
20	1,67	1,65	2,00

Tabelle 3.

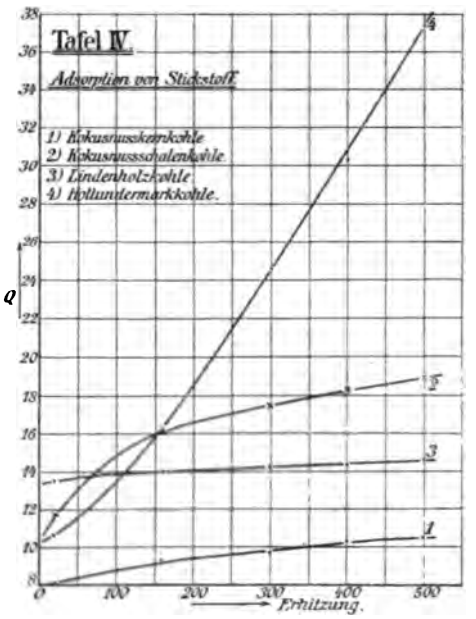
T	Kokusnußschale	Lindenholz	Holundermark
500	18,97	14,59	37,46
400	18,30	14,38	30,38
300	17,46	14,20	24,77
160	16,18	14,03	16,31
20	11,73	13,58	10,77

1) Saussure, Gilb. Ann. 47. p. 113. 1814. Darüber berichtet P. Chappuis, Wied. Ann. 12. p. 161. 1881.

Tab. 2 stellt die Ergebnisse der Adsorption von Wasserstoff, Tab. 3 die von Stickstoff dar; in Tafel III und IV sind sie als Funktion von T aufgetragen.



Ähnlich wie bei der Kohlensäure bemerkt man bei der Adsorptionskurve von Stickstoff in Kokusnußschale in Tafel IV,



Nr. 2 einen starken Abfall des letzten Wertes gegenüber den vier anderen, die eine durchaus lineare Beziehung ergeben. Dieser Abfall läßt sich ebenso wie dort erklären, das Verhalten

ist durchaus das gleiche. Schon wenige Grade können den Adsorptionswert verhältnismäßig stark steigern. Offenbar verhält sich der Stickstoff zu der engporigen, harten Kokusnußschalenkohle, wie die Kohlensäure zur lockeren Kokusnußkernkohle. Obgleich ein schwer zu verflüssigendes Gas, ist der Stickstoff gegenüber der dichten Schalenkohle im Verhältnis zum Wasserstoff doch schwer genug, um eine merklich langsamere Diffusion vom Innern des Kohlestücks nach außen deutlich hervortreten zu lassen. Dies kennzeichnet sich auch in der längeren Adsorptionszeit. Größere oder geringere Flüchtigkeit des Gases, größere oder geringere Dichtigkeit der Kohlekonstitution, das sind die beiden, für die Entgasung sowohl, wie die Adsorption maßgebenden Faktoren. Die schon in den orientierenden Vorversuchen konstatierte Tatsache, daß Kohlepulver erheblich weniger adsorptionsfähig ist, als Stückenkohle der gleichen Sorte, findet hier bei Kohlen verschiedener Herkunft und von verschiedener Dichte ihre Bestätigung.

Entsprechendes gilt von der Adsorptionszeit. Wie das flüchtigere Gas von einer Kohlesorte rascher aufgenommen wird als das schwerere, so vollzieht sich die Adsorption desselben Gases in um so kürzerer Zeit, je leichter die Konstitution der Kohle ist.

Bei Holundermark ist der sehr große Adsorptionswert für Stickstoff bei 500° Entgasung auffallend. Der Temperaturkoeffizient ist groß, aber regelmäßig, die Kurve durchaus linear. Die Adsorption bei 20° hat einen den Messungen an den übrigen Kohlen entsprechenden Wert. Die Holundermarkkohle nimmt den Stickstoff also ebenso leicht auf, wie die Kokusnußkohle den Wasserstoff.

Wenn also offenbar die aufgenommene Gasmenge mit zunehmender Porosität wächst, so hätten wir diese uns nach Saussure in der Tat nicht bloß als eine Funktion der Oberflächengröße, sondern auch ihrer Gestalt, d. h. ihrer Bildung von Porenhöhlungen zu denken. Diese Vermutung findet durch die Ergebnisse der Versuche über die Adsorption bei tiefen Temperaturen ihre Bestätigung.

III.

Den Versuchen über Entgasung mit zunehmender, reihten sich solche über die Adsorption mit abnehmender Temperatur an. Beide Reihen gestatten erst, das Adsorptionsphänomen in seiner Abhängigkeit von der Temperatur zu begreifen.

Der Plan zu den Abkühlungsversuchen ist dem für die Erhitzungsversuche analog. Kokusnußkernkohle wurde in ihrer Adsorptionsfähigkeit mit Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Luft und Kohlensäure in dem Temperaturintervall von $+20°$ C. bis zur Temperatur der flüssigen Luft bez. bei Kohlensäure bis $-70°$ C. untersucht. Mit Stickstoff verglich ich dann die Adsorption bei der Kokusnußschalen-, Lindenholz- und Holundermarkkohle.

Die zu untersuchende Kohle wurde zwei- bis dreimal auf 500—525° erhitzt und vor dem ersten Versuche mit dem Versuchsgase gesättigt. Dabei war es nicht nötig, die Beendigung dieses Prozesses abzuwarten, da allein in Betracht dasjenige Gasquantum kam, welches nach erfolgter Abkühlung in der Kohle verdichtet war. Für diese stand mir flüssige Luft zur Verfügung, und mit ihr wurde das Rohr *E* 1—2 Stunden lang gekühlt. Nach dieser Zeit durfte die Adsorption, die auch hier bei Atmosphärendruck erfolgte, als beendet angesehen werden.[1])

Zwischentemperaturen wurden durch mehr oder weniger tiefes Eintauchen in den Dampf der flüssigen Luft gewonnen. Auf den Boden eines etwa 40 cm hohen Dewargefäßes wurde eine ungefähr 10 cm hohe Schicht flüssiger Luft gebracht. Durch einen Stelltisch wurde das Gefäß allmählich gehoben und so die Kohle in *E* der flüssigen Luft genähert. Oben wurde das Gefäß mit einem Wattebausch verschlossen, die Temperatur an einem geprüften Pentanthermometer abgelesen, dessen Gefäß sich, eng anliegend, stets auf gleicher Höhe mit der Kohle im Rohr befand.

Die zur Erreichung einer bestimmten Temperatur notwendige Eintauchtiefe wurde markiert und bei Wiederholungen wie Parallelversuchen ohne Kohle zur Bestimmung der Volum-

1) Genaueres über die Meßmethode vgl. Diss. p. 51 ff.

verminderung des Gases genau reproduziert. Die Methode stellte sich hierbei als ausreichend exakt heraus.

Die Ablesungen erfolgten bei der Abnahme der Zwischentemperaturen in Intervallen von 10° im allgemeinen; vor jeder wurde 15—20 Min. gewartet. Da nach 10 Min. die Quecksilberkuppe sich ziemlich fest einstellte, dürfte jene Wartezeit als ausreichend zu betrachten sein; denn ein zu langes Warten hätte die Versuchsreihe zu weit ausgedehnt und die Versuchsbedingungen wegen der durch Verdampfen sinkenden Oberfläche der flüssigen Luft zu sehr verändert.

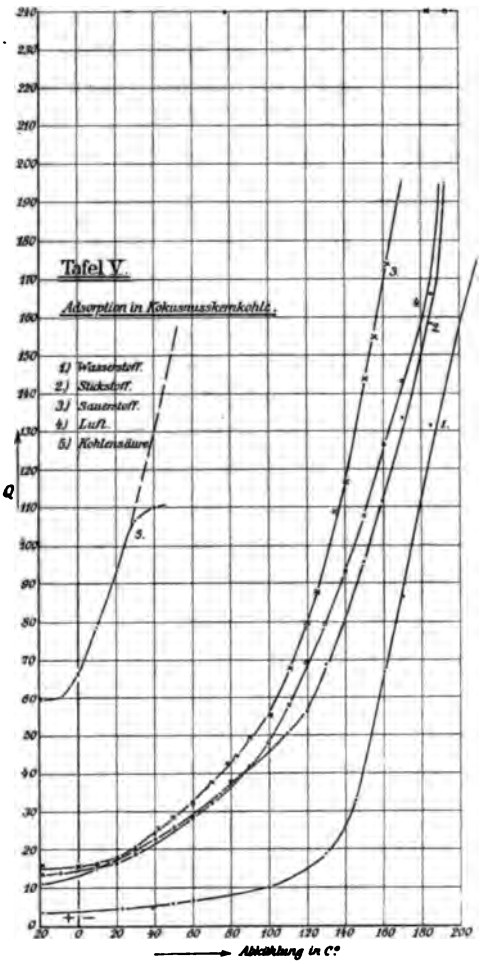
Tabelle 4.

H_2		N_2		O_2		Luft		CO_2	
T	*Q*	*T*	*Q*	*T*	*Q*	*T*	*Q*	*T*	*Q*
−23	4,42	−10	15	0	14,8	+10	13,8	+10	60,0
39	4,61	16	16,4	−10	16,3	0	14,9	0	66,9
50	5,73	20	17,1	20	17,8	−10	15,7	−10	78,7
60	6,91	30	20,7	30	20,0	20	16,2	20	93,1
100	10,00	40	23,9	42	25,2	30	18,5	30	106,9
130	18,82	50	28,2	50	28,1	40	22,8	40	110,0
145	32,91	60	31,1	60	31,9	50	25,5		
160	66,20	75	34,6	70	37,4	60	28,1		
170	86,50	85	39,3	78	42,2	70	32,3		
185	131,47	90	41,1	82	44,4	80	37,8		
		100	46,5	90	49,3	90	41,5		
		110	50,5	100	55,1	100	47,9		
		120	56,2	110	67,4	110	58,0		
		130	68,7	120	79,3	120	69,1		
		140	80,1	125	87,8	130	79,1		
		150	95,7	135	108,5	140	92,7		
		160	111,3	140	116,3	150	107,2		
		170	133,8	150	143,7	160	126,0		
		185	158,0	155	154,5	170	142,8		
				162	173,3	185	165,7		

Tafel V veranschaulicht die Messungsergebnisse. Die abnehmenden Temperaturen sind als Abszissen, die pro Kubikzentimeter Kohle aufgenommenen Gasmengen *Q* als Ordinaten aufgetragen. Sämtliche Kurven ähneln sich in ihrem Verlaufe; anfangs flach, steigen sie weiterhin steiler an, und zwar bei

einem Punkte, der abgesehen vom Wasserstoff ungefähr bei der kritischen Temperatur liegt.

Man darf vermuten, daß bei Erreichung der kritischen Temperatur sich eine feine Schicht flüssigen Gases an der Oberfläche des adsorbierenden Körpers bildet. Zu einer Unstetigkeit im Kurvenverlaufe kommt es nicht, weil diese Schicht eben wohl so fein ist, daß selbst bei großen Kohlenmengen die durch Verflüssigung entstandene Raumverringerung als solche nicht zu konstatieren sein wird, sondern sich nur in einem stärkeren, aber kontinuierlichen Anstieg der Kurve kundgibt.



Wir müssen darauf verzichten, auf diesem Wege einen Einblick in die Größenverhältnisse der hier wirkenden kapillaren Kräfte zu erhalten. Eine Unstetigkeit in der Kurve bei der kritischen Temperatur hätte bedeutet, daß sie größer sind, als der kritische Druck. Aus dem eben Gesagten erhellt, daß wir sie trotz des stetigen Verlaufes der Kurve nicht ohne weiteres als kleiner anzusehen berechtigt sind.

Bedenkt man, wie große Gasmengen von verhältnismäßig wenig Kohle mit fallender Temperatur aufgenommen werden,

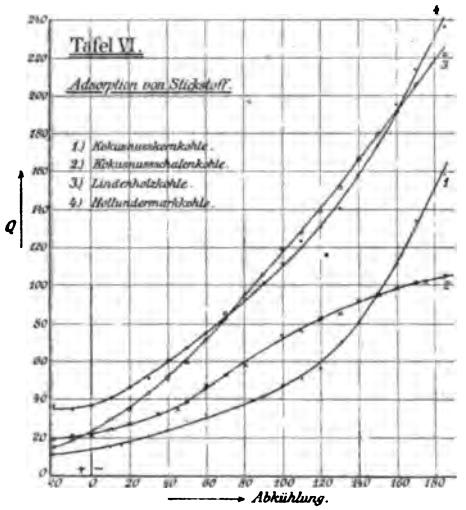
daß die Adsorptionskurve durchaus nicht linear, sondern ähnlich wie eine Adiabate verläuft, und daß ihr Knie ungefähr wenigstens bei der kritischen Temperatur, oder doch so liegt, daß von ihm an bis zum kritischen Punkte die Adsorption bedeutend rascher zunimmt, ziehen wir endlich die bei der Kohlensäure in den Erhitzungsversuchen gewonnenen Resultate hinzu, so wird man vermuten dürfen, daß die kapillaren Kräfte in ihrer Größe den kritischen Druck der Gase übersteigen. Hierfür spricht noch der Umstand, daß mit zunehmender Kondensierbarkeit nicht nur die absoluten Werte der Adsorptionsmengen steigen, sondern die Kurven auch einen steileren Verlauf nehmen.

Vergleichende Versuche an den oben genannten verschiedenen Kohlesorten mit Stickstoff als Adsorptionsgas hatten das in Tab. 5 zusammengefaßte Ergebnis.

Tabelle 5.

Kokusnußschale		Lindenholz		Holundermark	
T	*Q*	*T*	*Q*	*T*	*Q*
+10	20,3	+10	19,3	+10	35,0
0	21	0	23,9	0	36,3
−10	24,2	−10	29,3	−10	41,3
20	27,2	20	35,4	20	46,3
35	32,1	30	43,9	30	51,3
45	35,2	40	51,1	40	60,0
50	38,2	50	58,9	50	66,3
60	47,5	60	71,3	60	78,8
70	52,5	70	84,6	70	82,5
80	57,9	80	94,6	80	92,5
100	72,5	90	105,4	90	101,3
110	76,3	100	119,6	100	111,3
120	82,6	110	127,6	110	122,5
130	85,0	120	139,3	120	130,0
140	91,1	130	151,3	130	141,3
150	94,3	140	165,9	140	157,5
160	98,3	150	178,5	150	172,5
170	100,8	160	190,7	160	195,0
175	101,3	170	205,0	170	212,5
185	104,5	185	220,7	185	235,0

Aus Tafel VI ist ersichtlich, daß die Adsorption bei allen Kohlenarten mit fallender Temperatur zunimmt, so zwar, daß sich ihre Abhängigkeit von der Porosität der Kohle deutlich verfolgen läßt. Die Dichte und sehr feinporige Kokusnußschalenkohle vermag schon bei hohen Adsorptionstemperaturen vermöge ihrer Konstitution große Gasmengen aufzunehmen.



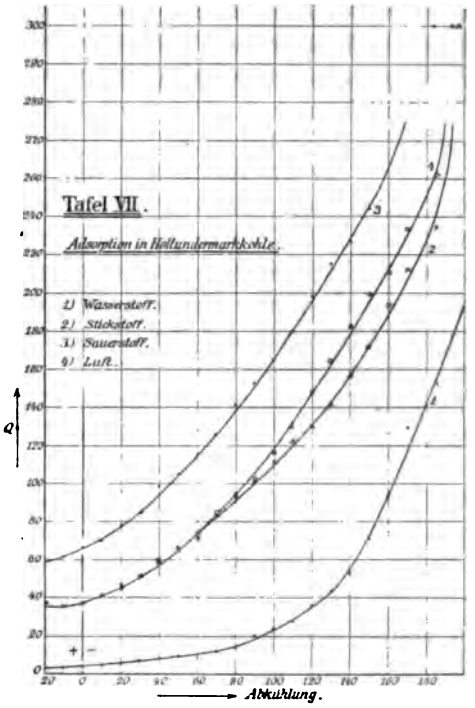
Diese nehmen bei Abkühlung wohl noch zu, entsprechen aber doch schon soweit dem Sättigungsgrade, daß starke Abkühlungen nicht mehr so wirken, wie bei weitporigen Kohlesorten. Die Adsorption bei tiefen Temperaturen gestattet dann vielleicht den Schluß, den wir bei den Adsorptionserscheinungen bei Zimmertemperatur schon andeuteten, daß die Aufnahmefähigkeit der Holzkohle eine Funktion der Porenbeschaffenheit ist. Enge Poren sind schneller gefüllt als weite. Ein Blick auf die anderen Kurven gibt dieser Vermutung weitere Bekräftigung.

Bei Anwendung der Dewarschen Methode zur Herstellung hoher Vakua müßte demnach die Wahl auf möglichst poröse und schwammige Kohle treffen, wie z. B. die des Holundermarks. Um Sicherheit über ihre hohe Adsorptionsfähigkeit auch gegenüber anderen Gasen als Stickstoff zu erlangen, wurden drei weitere Messungsreihen mit Wasserstoff, Sauerstoff

und Luft vorgenommen, deren Resultate hier folgen. Die Angaben beziehen sich, wie vorher, auf die Adsorption pro Kubikzentimeter Kohle.

Tabelle 6.

T	H_2	O_2	Luft	T	H_2	O_2	Luft
+10	3	61,7	35,0	90	20	153,3	103,3
0	4	66,7	36,7	100	24	165,0	116,7
−10	4	70,0	40,0	110	28	180,0	130,0
20	5	78,3	45,0	120	36	198,3	149,3
30	7	85,0	51,7	130	44	215,0	165,0
40	8	98,3	58,3	140	54	226,7	183,3
50	9	105,0	65,0	150	76	245,0	200,0
60	9	115,0	71,7	160	97		211,7
70	12	125,0	85,0	170	130		235,0
80	14	141,7	95,0	185	153		262,3



In Tafel VII liegen die für Holundermarkkohle aufgezeichneten Kurven durchweg höher, als die für Kokusnußkernkohle in Tafel V gegebenen. Insofern werden die eben erkannten vorzüglichen Eigenschaften der Holundermarkkohle bestätigt. Ihre Verwendung im Laboratorium wäre aber erst dann zu empfehlen, wenn die in einem Rezipienten enthaltene Luftmenge von einem Volum Holundermarkkohle aufgenommen werden kann, welches das der Kokusnußkernkohle nicht sehr übertrifft. Hierin liegt nun der Nachteil der großporigen, schwammigen Kohle. Sie ist relativ adsorptionsfähiger als die engporigen Kohlen, dafür enthält sie in der Raumeinheit so viel weniger Kohlematerial, daß zur Aufnahme ein und desselben Gasvolumens ein erheblich größerer Raum Holundermarkkohle gehört, als etwa Kokusnußkernkohle.

Zerteilen in sehr kleine Stücke oder Pulvern hilft nichts. Das Gas wird durch die dicht gelagerte Kohle an der Diffusion gehindert, und das Resultat ist eine erhebliche Verringerung der aufgenommenen Gasmenge. Dies zeigte sich in einigen Versuchen, in denen ich Holundermarkkohle, gepulvert, Luft bei -185^{0} C. adsorbieren ließ. Die pro Kubikzentimeter verdichtete Menge betrug 115,4 ccm, in einem zweiten Versuche 114,6 ccm, also etwa nur die Hälfte von der, welche Stückenkohle aufnahm. Ähnliches fand sich bei den anderen Sorten im gepulverten Zustande. Da nun jedes Pulverkörnchen noch als ein, wenn auch sehr kleines, so doch immer noch poröses Kohlestückchen anzusehen ist, so bleibt nichts übrig, als die Verminderung der Adsorption der Hemmung der Gasdiffusion zuzuschreiben. Dafür spricht auch das in den Vorversuchen gewonnene Resultat, daß, sofern die Gasdiffusion gesichert ist, die Größe der Kohlestücke keinen Einfluß auf die adsorbierte Gasmenge ausübt.

Zur Herstellung hoher Vakua wird man zweckmäßig Kohlen von mittlerer Porosität und Volumendichte verwenden. Die sehr dichte Kohle erlaubt zwar, viel Material in einem verhältnismäßig kleinen Raum unterzubringen, hat aber den Nachteil geringerer Aufnahmefähigkeit gegenüber den weniger dichten Arten. Kohlesorten von der Beschaffenheit des Holundermarks adsorbieren zwar stark, sind aber viel zu volumiös, um praktische

Verwendung finden zu können. Kokusnußkern, Lindenholz geben die geeignetsten Holzkohlen.

IV.

Die angeführten Versuchsergebnisse bestätigen in ihrer Gesamtheit die Annahme, daß die Fähigkeit, Gase an ihrer Oberfläche zu verdichten, eine vornehmlich porösen Körpern zukommende Eigentümlichkeit sei, aufs Neue. Auch die enorme Steigerung der Adsorption mit sinkender Temperatur scheint nur bei der Holzkohle vorzukommen. Ich habe Palladium bei Zimmertemperatur, Wasserstoff nach Erhitzung im Vakuum auf 500° okkludieren lassen und fand im Mittel aus drei Versuchen die pro Kubikzentimeter aufgenommene Menge zu 920 ccm. In flüssige Luft getaucht ergab sich nicht die geringste Steigerung. Platinasbest wurde in zwei Messungen untersucht. Die aufgenommene Wasserstoffmenge ergab sich bei Zimmertemperatur zu 4,5 ccm, bei −185° zu 4,7 ccm. Die geringe Steigerung ist vielleicht nicht einmal der Abkühlung, sondern der Tatsache zuzuschreiben, daß beim Eintauchen in die flüssige Luft die Okklusion noch nicht beendigt war.

Jedenfalls ist sie mit der, bei der Kohle konstatierten Steigerung nicht zu vergleichen.

Die Ansicht, es handle sich bei der Steigerung der Adsorption durch Holzkohle bei tiefen Temperaturen um eine spezifische Eigenschaft, findet eine Stütze in dem Verlauf der in Tafel V und VII dargestellten Kurven, über den noch eine Bemerkung gemacht sei. Handelt es sich nämlich um solche, die Kohle charakterisierenden Kräfte, so darf man annehmen, daß sie auf die Gase, sofern sie sich in gleichen Zuständen befinden, die gleichen Wirkungen haben, d. h. sie in gleicher Stärke zur Adsorption zwingen werden. Der gleiche Zustand für alle Gase wäre ihre Siedetemperatur, die für Wasserstoff bei −252,6°, für Stickstoff bei −195,7°, für Sauerstoff bei −182,8° und für Kohlensäure bei −78° C. liegt. In Tafel V und VII bemerkt man nun, daß die Kurven der verschiedenen Gase, bis zu der Abszisse verlängert, die ihrem Siedepunkte entspricht, verhältnismäßig genau ein und dieselbe Höhe erreichen, nämlich die Ordinate, welche bei Kokusnuß-

kernkohle etwa die Adsorptionsmenge 240 ccm, bei Holundermarkkohle die Adsorptionsmenge 300 ccm bezeichnet. Ist das kein Zufall, dann können wir aus der Gleichheit der Adsorption bei Gasen in gleichen Zuständen auf gleiche Kräfte schließen. Diese Kräfte werden es sein, welche die Wendung zum steileren Verlaufe in der Nähe der kritischen Temperatur bei allen dargestellten Kurven bewirken. Sie sind in ihrer Größe offenbar der Kohle eigentümlich und charakterisieren in ihrer Größenvariation jede einzelne Sorte.

Für die Anregung zu dieser, im physikalischen Institute der Universität Freiburg i. B. ausgeführten Arbeit, sowie die mir gewährte wertvolle Unterstützung sage ich Hrn. Geheimrat Prof. Dr. F. Himstedt an dieser Stelle nochmals meinen ehrerbietigen Dank.

Berlin, im März 1907.

(Eingegangen 29. März 1907.)

6. *Lichtelektrische Entladung und durch Bestrahlung erzeugtes Leitvermögen*[1]*;* *von W. Wilson.*

Einleitung.

Lenard hat nachgewiesen[2]), daß die von Hallwachs entdeckte lichtelektrische Entladung auch im Vakuum in Form von Kathodenstrahlen vor sich geht, daß also in der jetzt allgemein angenommenen Ausdrucksweise Elektronen von dem Licht durch die Bestrahlung frei gemacht werden, welche eine derartig große Geschwindigkeit besitzen, daß sie den bestrahlten Körper verlassen können. Freie Elektronen sind es auch, welche nach unseren heutigen Vorstellungen das metallische Leitvermögen bedingen. Man sollte also erwarten, daß den lichtelektrisch reagierenden Körpern durch die Bestrahlung zu gleicher Zeit ein metallisches Leitvermögen erteilt werde.

Nun hat bereits K. Bädeker[3]) vor einiger Zeit im Leipziger physikalischen Institut experimentelle Versuche dahingehend angestellt, ob Metallen durch geeignete Bestrahlung ein vermehrtes Leitvermögen erteilt werden könne. Diese Versuche ließen indes keine derartige Steigerung des Leitvermögens erkennen. Man wird vielleicht zunächst versucht sein, dies Ergebnis durch die Annahme zu erklären, daß die Zahl der im Metall freien Elektronen schon so groß ist, daß die etwa durch die Bestrahlung noch frei gemachten eine der Beobachtung nicht mehr zugängliche verhältnismäßige Vermehrung, d. h. also eine zu kleine verhältnismäßige Leitfähigkeitszunahme bedingen. Von diesem Gesichtspunkte aus schien es lohnend, den in Rede stehenden Zusammenhang bei schlechten Leitern zu suchen.

Nun ist schon lange bekannt, daß der im Dunkeln sehr schlechte Leiter Jodsilber im Lichte ein merkliches Leit-

1) Auszug aus der Leipziger Inaugural-Dissertation.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 2. p. 359. 1900.
3) K. Bädeker, Leipz. Ber. 55. p. 198. 1903.

vermögen erhält und Scholl[1]) hat nachgewiesen, daß dies durch elektrische Träger bedingt sein muß, denen eine weit größere Beweglichkeit als den bekannten elektrolytischen Ionen zukommt, daß mithin diese Träger wahrscheinlich nichts anderes sind als freie Elektronen. Besteht der gesuchte Zusammenhang, so mußte Jodsilber das Hallwachs-Lenardsche Phänomen zeigen.

Die im folgenden mitgeteilten Versuche lehren, daß in der Tat Jodsilber einen hohen lichtelektrischen Effekt gibt und zwar im Vakuum einen etwa 10mal so starken als Aluminium. Dieser Effekt läßt sich aber nur durch ultraviolette Bestrahlung erzielen, während es nicht gelang, einen solchen unter Abwesenheit der ultravioletten Strahlen nur durch violette und die anderen Strahlen des sichtbaren Spektrums nachzuweisen. Die von Scholl beobachtete Leitfähigkeitszunahme des Jodsilbers geht im Gegensatz dazu mit der Lichtabsorption parallel, welche nach seinen Beobachtungen im Violetten ein Maximum erreicht, gegen das Ultraviolette aber wieder abfällt. Über das Verhalten von Absorption und Leitfähigkeitszunahme im Ultravioletten lagen bisher keine Beobachtungen vor. Ich habe diese nachgeholt und erstens festgestellt, daß die Absorption im Ultravioletten jedenfalls nicht viel größer ist als im Violetten, zweitens, daß auch im Ultravioletten eine Leitfähigkeitszunahme eintritt, welche aber so klein ist, daß ich sie gerade eben noch mit meinen Hilfsmitteln feststellen konnte.

Demnach vermehren die Strahlen von größter Entladungswirkung die Leitfähigkeit am wenigsten, während die Strahlen, welche die Leitfähigkeit am stärksten vermehren, gar keine Entladungswirkung erkennen lassen.

Verfolgt man die lichtelektrischen Vorgänge in Gedanken genauer, so erscheint dieser Befund nicht so verwunderlich. Damit die Elektronen den bestrahlten Körper verlassen können, müssen sie nach Lenard[2]) sehr große Geschwindigkeiten besitzen; Elektronen von solcher Geschwindigkeit können aber durch äußere Kräfte nur verhältnismäßig wenig auf gegebener

1) H. Scholl, Habilitationsschrift; Ann. d. Phys. **16**. p. 193. 417. 1905.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **8**. p. 149. 1902.

Strecke aus ihrer Bahn abgelenkt werden. (Vgl. auch Drude.[1]) Die durch die Bestrahlung in dem Körper erzeugte ungeordnete Elektronenbewegung kann also durch die an ihn angelegte elektromotorische Kraft nur viel weniger beeinflußt werden, als bei Elektronen von geringerer Geschwindigkeit. Deren Geschwindigkeit wird aber dann weniger leicht ausreichen, ihnen das Austreten aus dem Körper zu ermöglichen. So erklärt sich also der obige Befund und so ist es auch zu verstehen, daß die durch Elektronenbewegung leitenden Metalle nicht der Ursprung einer bedeutenden Elektronenstrahlung sind. Die neuerdings behauptete geringe Radioaktivität gewisser Metalle würde sich aber in diesem Zusammenhang ohne weiteres begreifen lassen als bedingt durch Elektronen, welche ausreichende Geschwindigkeit besitzen, um ihnen das Austreten aus dem metallischen Verbande zu gestatten.

Im Gegensatz zu dem Verhalten kohärenter Schichten wird man bei unzusammenhängenden, gekörnten oder granulären Schichten ein durch Bestrahlung erhöhtes Leitvermögen erwarten dürfen, welches mit der entladenden Wirkung der Bestrahlung parallel läuft. Denn hier kann die Leitung als eine Entladung von Teilchen zu Teilchen aufgefaßt werden. Diese Erwartung hat sich in der Tat bei körnigen Schichten sowohl von Silber als von Jodsilber durch die Versuche bestätigt.

Es gibt auch Oxyde, welche nach den bisherigen Untersuchungen metallisches Leitvermögen besitzen, wie das Bleisuperoxyd[2]), von denen man also ein ähnliches Verhalten bezüglich der lichtelektrischen Wirkung erwarten darf. In der Tat fand ich auch bei Bleisuperoxyd eine besonders hohe lichtelektrische Konstante.

Auch vollkommenen Isolatoren müßte unter Umständen durch Belichtung ein Leitvermögen erteilt werden können. Ich stellte bei Schellack fest, daß es, in dünner Schicht auf Metalle aufgebracht, die lichtelektrische Entladung nicht hintanhält, so daß es also den Elektronen freien Durchgang gestattet. Dagegen konnten meine Versuche nicht entscheiden, ob es selbst sich durch Belichtung entladet. Wenn eine

---

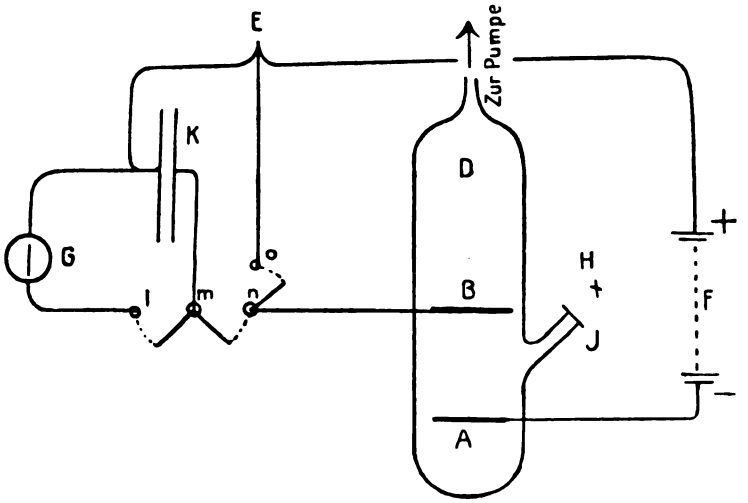
1) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 575. 1900.
2) Vgl. F. Streintz, Ann. d. Phys. 9. p. 854. 1902.

Wirkung vorhanden ist, ist sie jedenfalls nur schwach, entsprechend der geringen Absorption der sichtbaren und ultravioletten Strahlen. Es müßte also der Versuch mit einem stärker absorbierenden Isolator wiederholt werden.

A. Lichtelektrische Entladung bei Jodsilber.

1. Versuchsanordnung.

Zur Messung der lichtelektrischen Entladung wurde die in Fig. 1 dargestellte Anordnung angewandt: Die zu untersuchende Substanz befand sich auf der einen Seite einer Metallscheibe *A*, auf deren anderer Seite sich die Vergleichs-



A Metallscheibe mit Jodsilberschicht.
B Empfangende Elektrode.
K Kondensator.
D Evakuiertes Gefäß.
E Erde.
F Akkumulatorenbatterie.
G Panzergalvanometer.
H Bogenlampe.
J Quarzfenster.
l, *m*, *n*, *o* Quecksilbernäpfe.

Fig. 1.

substanz befand. Diese Scheibe *A* wurde derart in ein Glasgefäß *D* eingesetzt, daß sie sich umdrehen ließ, so daß bald die eine, bald die andere Seite dem Quarzfenster *J* nach Belieben zugewandt werden konnte. Gegenüber *A* befand sich in demselben Gefäß eine Elektrode *B*, welche dazu diente, die während Bestrahlung von *A* kommende Elektrizitätsmenge

aufzufangen. Während des Versuches wurde die Scheibe *A* mittels einer Akkumulatorenbatterie, deren positiver Pol geerdet war, auf −1000 Volt gehalten. Die empfangende Elektrode *B* blieb immer nahezu auf dem Potential Null. Das Gefäß *D*, welches mit einer auf konstantem Potential gehaltenen Stanniolhülle umgeben war, wurde möglichst vollkommen evakuiert. Die von *B* empfangene Elektrizitätsmenge sammelte sich in dem Kondensator *K* und wurde mittels eines Panzergalvanometers *G* gemessen. Letzteres hatte eine Dauerstromempfindlichkeit von 4.10^{-10} Amp. pro Millimeter Ausschlag. Der Kondensator hatte 1 Mikrof. Kapazität; als Lichtquelle wurde eine Hefner-Alteneckscbe Bogenlampe *H* benutzt. Die Messungen fanden auf folgende Weise statt: Zur Zeit *o* wurde *no* unterbrochen, während *mn* geschlossen blieb. Am Ende eines gemessenen Zeitraums wurde nun *lm* geschlossen und der stattfindende Galvanometerausschlag abgelesen. Selbstverständlich waren sämtliche Verbindungen *Bn*, *mK*, *lG*, das Galvanometer und die Quecksilbernäpfe sorgfältig isoliert.

2. Lichtelektrische Entladung bei ultravioletter Bestrahlung.

Eine oberflächlich jodierte Silberscheibe wurde mittels der in Fig. 1 beschriebenen Anordnung auf ihre lichtelektrische Empfindlichkeit untersucht. Als Normalsubstanz diente Bleisuperoxyd. Für die lichtelektrische Konstante des Jodsilbers bezogen auf Bleisuperoxyd[1]) (d. h. die Elektrizitätsmenge, die vom Kondensator *K* während einer gemessenen Zeit bei Bestrahlung des Jodsilbers empfangen wurde, dividiert durch die bei Bestrahlung des Bleisuperoxyds empfangene Menge) wurden folgende drei Werte gefunden: 13,5, 10,7 und 8,04, welche den Mittelwert 10,9 ergeben.

Eine Bestimmung der lichtelektrischen Konstante des Silbers, bezogen auf Bleisuperoxyd lieferte die Werte: 3,89, 3,24, also im Mittel 3,56.

---

1) Bleisuperoxyd ermüdet nicht merklich, wie ich konstatierte, bei andauernder ultravioletter Bestrahlung. Seine lichtelektrische Empfindlichkeit ist gleich der des Aluminiums. Als Vergleichssubstanz hat es den Vorzug, daß man bei ihm stets eine gleich beschaffene Oberfläche herstellen kann.

Hieraus ersieht man, daß das Jodsilber gegenüber ultravioletten Strahlen in einem sehr hohen Grad empfindlich ist.

Eine Silberschicht wurde auf einer Platinscheibe elektrolytisch hergestellt und ganz jodiert. Für die lichtelektrische Konstante dieses Jodsilbers ergab sich der mittlere Wert 10,60, der also innerhalb der Fehlergrenzen mit dem Werte des aus massivem Silber hervorgegangenen Jodsilbers übereinstimmt.

3. Versuche bei violetter Bestrahlung.

Scholl[1]) hat Versuche ausgeführt, nach denen es wahrscheinlich ist, daß die Zunahme des Leitvermögens, welche das feuchte Jodsilber bei violetter (nicht ultravioletter) Bestrahlung erleidet, wenigstens zum größten Teil Elektronen zuzuschreiben ist, welche von den Strahlen frei gemacht werden. Ich fand hierin die Veranlassung zu untersuchen, ob nicht durch violette Bestrahlung ein dem Hallwachs-Lenardschen ähnliches Phänomen zustande gebracht werden kann.

Als Lichtquelle wurde eine mit Linsen versehene Differentiallampe benuzt. Zwischen letzterer und dem Fenster J befand sich zur Absorption der Wärmestrahlen ein mit Wasser gefüllter Glastrog. Die Scheibe A wurde, wie bei den oben beschriebenen Versuchen, auf -1000 Volt gehalten. Bei einer Bestrahlungsdauer von 5 Min. erhielt der Kondensator keine nachweisbare Ladung, gleichviel ob ein Violettfilter benutzt wurde oder nicht. Sobald aber ultraviolette Strahlen hinzu gelassen wurden, konnte in wenigen Sekunden dem Kondensator eine verhältnismäßig beträchtliche Ladung erteilt werden.

4. Lichtelektrische Entladung bei dem mit Salzen getränkten Jodsilber.

Bekanntlich wird das Leitvermögen des Jodsilbers und anderer Elektrolyte durch Beimischung kleiner Mengen anderer Salze bedeutend erhöht.[2]) Es war deshalb von Interesse zu erfahren, welchen Einfluß eine solche Behandlung des Jodsilbers auf die lichtelektrische Empfindlichkeit hat.

---

1) H. Scholl, Habilitationsschrift, l. c.
2) C. Fritsch, Wied. Ann. 60. p. 300. 1897.

Eine Jodsilberschicht auf Platin wurde mit Kalziumnitrat lösung getränkt. Das auf diese Weise behandelte Jodsilber war ebenfalls ganz unempfindlich gegenüber violetten Strahlen. Dagegen war ultravioletten Strahlen gegenüber seine Empfindlichkeit bedeutend größer als die des ungetränkten Jodsilbers. Der Kondensator erhielt die folgenden in Millimetern des Galvanometerausschlages gemessenen Ladungen:

Bei einer 40 Sek. langen Bestrahlung des Bleisuperoxyds — 9, 9, 11,5.
„ „ 20 „ „ „ „ Jodsilbers 255, 270.

Diese Zahlen ergeben für die auf Bleisuperoxyd lichtelektrische Konstante des getränkten Jodsilbers den auffallend großen Wert von rund 54.

Einen wichtigen Schluß kann man aus den vorangehenden Versuchen ziehen: Die von *ultravioletten Strahlen* im Jodsilber befreiten Elektronen haben eine *größere Geschwindigkeit* als diejenigen Elektronen, die von violetten Strahlen befreit werden, indem ja letztere noch nicht eine ausreichende Geschwindigkeit besitzen, um das Jodsilber verlassen zu können.

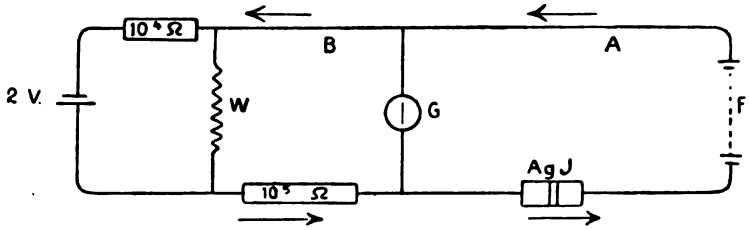
B. Einfluß ultravioletter und violetter Bestrahlung auf das elektrische Leitvermögen des Jodsilbers.

1. Versuche in der Luft.

Bei diesen Versuchen wurden dünne Jodsilberschichten in Anwendung gebracht. Es wurde auf eine Glas- bez. Quarzplatte Silber chemisch oder mittels kathodischer Zerstäubung niedergeschlagen und alsdann jodiert. Die Glasplatten (10×5 qcm) wurden, mit Ausnahme eines 2 — 3 mm breiten quer durch die Mitte hindurchgehenden Streifens platiniert. Nach Bildung der Jodsilberschicht wurde jedesmal das Jodsilber von den Platinenden mit Cyankali abgewaschen, so daß dieselben als Elektroden dienen konnten. Bei den Quarzplatten wurde jedesmal, nachdem die Silberschicht hergestellt worden war, ein 2—3 mm breiter Streifen jodiert. Als Elektroden dienten die auf beiden Seiten des Jodsilberstreifens befindlichen nicht jodierten Silberschichten.

Die zu untersuchende Platte nebst Jodsilberschicht wurde in einen Stromkreis, in welchem sich das vorhinerwähnte Galvanometer befand, eingesetzt und mittels eines Holzkastens

gegen das diffuse Licht des Zimmers geschützt. Damit eine über den Meßbereich des Galvanometers hinausgehende Stromstärke in Anwendung gebracht werden konnte, wurde die in Fig. 2 illustrierte Kompensationsmethode benutzt.



G Galvanometer. *W* Variabler Widerstand.
A Hauptstromkreis. *F* Akkumulatorenbatterie.
B Hilfsstromkreis.

Fig. 2.

Die Anordnung war (wie aus der Figur ersichtlich ist) so getroffen, daß das Galvanometer mittels eines Hilfsstromkreises stromlos gemacht werden konnte. Ferner gestattete sie, indem der Galvanometerwiderstand (ca. $4 . 10^8\ \Omega$) gegen den im Hilfsstromkreise befindlichen Widerstand (ca. $10^5\ \Omega$) sehr klein ist, daß eine Änderung des Widerstandes des Jodsilbers vom Galvanometer angezeigt wurde.

Die Beobachtung einer durch *ultraviolette* Bestrahlung verursachten Zunahme des Jodsilberleitvermögens wurde durch den Umstand sehr erschwert, daß eine bedeutende plötzliche Zunahme desselben bei Einwirkung *violetter* Strahlen stattfindet. Die Intensitätsschwankungen des Bogenlichts (welches als ultraviolette Quelle angewandt wurde) verursachte also fortwährend Galvanometerschwankungen, welche die Beobachtung der ultravioletten Wirkung sehr schwierig machten.[1]) Ferner fanden bei violetter Bestrahlung (wenigstens in der Luft) zeitliche Änderungen, vermutlich chemischer Natur, im Zustande des Jodsilbers statt, welche ebenfalls mit Leitfähigkeitsände-

1) Ein Woodsches Filter stand mir zur Zeit dieser Untersuchungen nicht zur Verfügung. Die Anwendung eines solchen Filters hätte übrigens den großen Nachteil gehabt, die Intensität der ultravioletten Strahlen beträchtlich zu verringern, wenn es entladend wirksame Strahlen überhaupt durchläßt.

rungen verbunden waren. Auf diese letzteren ist in der Dissertation näher eingegangen.

Eine erhöhende plötzliche Wirkung der ultravioletten Strahlen auf die Leitfähigkeit des Jodsilbers wurde dadurch konstatiert, daß der bei Entfernung eines zwischen Strahlungsquelle (Bogenlampe) und Jodsilberschicht befindlichen Glasschirms bewirkte Galvanometerstoß größer war, als der entsprechende bei Entfernung eines Quarzschirms stattfindende Stoß. Jeder dieser Schirme reflektiert violette Strahlen gleich stark. Ferner schließt der Glasschirm durch Absorption die ultravioletten Strahlen aus. Es muß also der Unterschied zwischen den bei Entfernung dieser Schirme bewirkten Galvanometerausschlägen dem Einfluß ultravioletter Strahlen zugeschrieben werden.

Der größte Galvanometerausschlag, den es mir bei Entfernung eines Glasschirms zu beobachten gelang, betrug etwa 2 mm. Der unter gleichen Umständen bei Entfernung eines Quarzschirms beobachtete Ausschlag war merklich kleiner. Noch deutlicher trat der Unterschied zwischen den bei Entfernung eines Glas- und eines Quarzschirms erzielten Wirkungen zutage, als der betreffende Schirm derart entfernt und wieder eingesetzt wurde, daß Schwingungen des Galvanometermagnetensystems zustande gebracht wurden. Die maximale Amplitude, die durch Benutzung eines Glasschirms erzielt werden konnte, war entschieden größer als die, welche bei Anwendung des Quarzschirms erreicht wurde (vgl. folg. Abschnitt).

2. Versuche an dem in einer trocknen Wasserstoffatmosphäre befindlichen Jodsilber.

Um die in der Dissertation hervorgehobenen Widerstandsänderungen beseitigen zu können, welche bei violetter Bestrahlung des Jodsilbers in Anwesenheit des Sauerstoffs und des Wasserdampfes stattfinden, wurden Versuche gemacht, wobei sich die Jodsilberschicht in einem dicht verschlossenen, mit Quarzfenster versehenen Holzkasten befand, welcher mit gut getrocknetem Wasserstoff durchströmt wurde. In dieser Wasserstoffatmosphäre blieb der Widerstand des Jodsilbers, sowohl im unbestrahlten als im violett bestrahlten Zustande, vollkommen

konstant. Beim Übergang vom unbestrahlten zum bestrahlten Zustand fand stets eine *plötzliche* Widerstandsabnahme statt.

Das Entfernen eines zwischen Strahlungsquelle und Quarzfenster des Kastens befindlichen Glasschirms bewirkte einen kleinen Galvanometerstoß im Sinne einer Leitfähigkeitszunahme. Dieser Stoß war ungefähr doppelt so groß, als der unter sonst gleichen Umständen bei Benutzung eines Quarzschirms hervorgerufene Stoß. Zum Vergleich der ultravioletten Wirkung mit der violetten dienen folgende Zahlen. Die an die Jodsilberschicht angelegte Spannung war 60 Volt. Die Dunkelstromstärke (in Millimetern des Galvanometerausschlags gemessen) war 38, also 1,5 10^{-8} Amp. Die bei violetter Bestrahlung stattfindende *plötzliche* Zunahme des Stroms betrug 23—24 mm. Das Entfernen eines Glasschirms bewirkte einen Ausschlag von 5—6 mm, das eines Quarzschirms einen solchen von 2—3 mm. Als Oszillationen des Galvanometermagnetensystems auf die schon beschriebene Weise hervorgerufen wurden, erreichte die maximale Amplitude

bei Glas . . . . . 22—25 mm,
bei Quarz etwa . . . 10 mm.

Die ultraviolette Wirkung ist also ungefähr so groß wie die der vom Quarz bez. vom Glas reflektierten violetten Strahlen, d. h. sie beträgt etwa 8—10 Proz. der violetten Wirkung.

3. Absorptionskoeffizient des Jodsilbers für ultraviolette Strahlen.

Es war von Interesse zu erfahren, wie sich der Absorptionskoeffizient des Jodsilbers für die bei der lichtelektrischen Entladung wirksamen Strahlen zu denjenigen desselben Körpers für violette Strahlen verhält. Zu diesem Zwecke stellte ich durch kathodische Zerstäubung und nachträgliche Jodierung von Silber zwei Jodsilberschichten nebeneinander auf einer Quarzplatte her. Die Dicke der einen Schicht wurde nach der Wienerschen Methode bestimmt; sie betrug 30,4 $\mu\mu$. Die Dicke der dünneren Schicht konnte ich nur aus der Zeitdauer der Zerstäubung schätzen. Sie dürfte ungefähr 10 $\mu\mu$ betragen. Die Intensität der durch jede Schicht hindurchgelangenden ultravioletten Strahlen wurde mittels der in Fig. 1 beschriebenen Anordnung gemessen.

Das Verhältnis der beiden Intensitäten betrug:

$\frac{J_d}{J_D} = e^{k(D-d)} = 1{,}365$, Mittelwert mehrerer Messungen,

woraus sich für den auf das Millimeter bezogenen Absorptionskoeffizienten der Wert 15000 berechnen läßt. Scholl[1]) hat nun für die vom Jodsilber am stärksten absorbierten Strahlen ($\lambda_0 = 423\ \mu\mu$) den Absorptionskoeffizienten $k = 13000$ gefunden. Es kann daher der große Unterschied zwischen der Wirkung der ultravioletten und derjenigen der violetten Strahlen wohl nicht dadurch erklärt werden, daß Jodsilber für violette einen größeren Absorptionskoeffizienten besitzt.

Nimmt man an, daß die entladend wirksame Wellenlänge bei $\lambda_0 = 180\ \mu\mu$ liegt, und berechnet man nach der Formel

$$\frac{J_d}{J_D} = e^{2\pi n K \frac{(D-d)}{\lambda_0}} = 1{,}365$$

den Wert des auf die Luftwellenlänge bezogenen Absorptionskoeffizienten nK, so ergibt sich $nK = 0{,}44$. Der Absorptionskoeffizient des Silbers für gelbes Licht ist nach Drude[2]) ungefähr 3,7.

Demnach war trotz nicht merklich verschiedener Absorption von ultravioletten Strahlen und insbesondere trotz des Fehlens der entladenden Wirkung durch violette Bestrahlung die widerstandsändernde Wirkung der ultravioletten Strahlen zwar deutlich nachweisbar, aber doch verhältnismäßig nicht beträchtlich. Diese Verhältnisse sind aber ganz ungezwungen zu erklären, wenn wir uns daran erinnern, daß die von den ultravioletten Strahlen frei beweglich gemachten Elektronen eine (vermutlich viel) größere Geschwindigkeit besitzen als die von den violetten Strahlen frei gemachten Elektronen. Nach Drude[3]) gilt nämlich für die in der Richtung x gerichtete Geschwindigkeit u_x eines frei beweglichen Elektrons unter dem Einfluß einer nach der Richtung x wirkenden elektrischen Kraft X die Beziehung

$$u_x = {}^1/_2 \frac{e X l}{m u},$$

1) H. Scholl, Habilitationsschrift, l. c.
2) P. Drude, Optik. p. 338.
3) P. Drude, Ann. d. Phys., l. c

wobei e die Ladung des Elektrons, l die mittlere Weglänge desselben, m seine Masse und u seine mittlere ungeordnete Geschwindigkeit bezeichnet. Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß bei gleichbleibender Weglänge und Verhältnis von Ladung zur Masse die gerichteten Geschwindigkeiten der Elektronen unter der Einwirkung einer gegebenen elektrischen Kraft sich umgekehrt verhalten, wie ihre ungeordneten Geschwindigkeiten. Es ist demgemäß das durch die frei beweglichen Elektronen verursachte Leitvermögen eines Körpers um so kleiner, je größer ihre ungeordneten Geschwindigkeiten sind. Die stark entladend wirksamen Strahlen brauchen also nicht zugleich entsprechend große Leitvermögensvermehrung hervorzubringen, während umgekehrt die Strahlen, welche das Leitvermögen am stärksten verändern, nicht kräftig entladend wirksam zu sein brauchen, denn die für das Leitvermögen günstige kleine Elektronengeschwindigkeit genügt nicht, um die Elektronen aus dem Metallverbande austreten zu lassen. Demnach werden meine Beobachtungen verständlich, wonach die stark entladend wirksamen ultravioletten Strahlen eine viel kleinere Leitvermögensänderung am Jodsilber hervorrufen als die nicht entladend wirksamen violetten Strahlen.

Außer den oben beschriebenen bei ultravioletter bez. violetter Bestrahlung stattfindenden vermutlich rein physikalischen Widerstandsänderungen des Jodsilbers sind noch andere beobachtet worden, welche bei violetter Bestrahlung des Jodsilbers in Anwesenheit von Sauerstoff und Wasserdampf stattfinden. Diese letzteren sind jedenfalls mit chemischen Vorgängen verbunden. Sie sind in der Dissertation genauer besprochen worden und sollen hier nicht näher erörtert werden.

C. Einfluß ultravioletter Strahlen auf das Leitvermögen des granulären Silbers.

1. Herstellung und Eigenschaften des granulären Silbers.

Eine Beobachtung von Scholl lieferte mir ein Mittel granuläres Silber herzustellen.[1]) Scholl fand, daß, wenn eine auf einer dünnen Silberunterlage ruhende Jodsilberschicht mit Bogenlicht bestrahlt wurde, erstere nach und nach verschwand,

1) H. Scholl, Inaug.-Diss.; Wied. Ann. **68**. p. 149. 1899.

während sich eine Silberschicht oberhalb, d. h. auf der Luftseite des Jodsilbers bildete. Das auf diese Weise entstehende Silber besitzt eine äußerst geringe Leitfähigkeit und es war deshalb zu meinem Zweck sehr geeignet. Ich stellte solche Silberschichten auf Quarzplatten[1]) her und ehe ich sie in Anwendung brachte, entfernte ich jedesmal die Jodsilberunterlage durch Behandlung mit Natriumthiosulfatlösung.

Dieses Silber hat folgende Eigenschaften:

1. Sein elektrischer Widerstand ist sehr groß. Bei Anwendung von 1000 Volt konnte in 20 bis 60 Sek. einem Kondensator durch eine solche Silberschicht von etwa 1 cm Länge und 2 cm Breite (falls dieselbe nicht schon früher hohen Spannungen ausgesetzt war) eine zwar deutlich erkennbare, dennoch äußerst geringe Ladung erteilt werden. Wenn der Kondensator durch das Galvanometer entladen wurde, so erfolgte meistens ein Stoß von wenigen Millimetern.

2. Der Widerstand der Schicht blieb in der Luft nicht konstant. Er nahm ab und zu von einem Tag zum anderen, vermutlich infolge von Änderungen im Feuchtigkeitsgehalt der Luft.

3. Eine Schicht, welche in der Luft eine deutlich erkennbare Leitfähigkeit besaß, leitete überhaupt nicht mehr, nachdem sie mit einer Lösung von Schellack in Alkohol bedeckt und wieder an der Luft getrocknet worden war. Sobald aber der Schellack entfernt wurde, erhielt die Schicht wieder die Fähigkeit zu leiten.

4. Eine Schicht im besonderen besaß ein „kritisches" Potential.[2]) Während z. B. dem Kondensator in 20 Sek. mit 200 Volt keine beobachtbare Ladung durch die Schicht erteilt werden konnte, erhielt er mit 500 Volt in 10 Sek. eine Ladung, welche einen Galvanometerstoß von 55 mm bewirkte. Während eines gleich darauf folgenden Versuches mit derselben Spannung erhielt der Kondensator in 10 Sek. eine Ladung, welche schon über den Meßbereich des Galvanometers hinausging. Indem ich nun auf 100 Volt zurückging, konnte ich jetzt dem Konden-

---

1) Wegen seiner verhältnismäßig gut leitenden Oberflächenschicht war Glas zu diesem Zweck nicht zu gebrauchen.

2) Vgl. P. E. Robinson, Ann. d. Phys. **11**. p. 754. 1903.

sator in 20 Sek. eine kleine, aber merkliche Ladung erteilen. Diese letzten Versuche (4) fanden im Vakuum statt. Das Gefäß war so weit evakuiert, daß eine Entladung durch dasselbe auch in längeren Zeiträumen nicht zu beobachten war.

Aus diesen Tatsachen ist zu schließen, daß das Silber eine *granuläre Struktur* besitzt. Der große Widerstand der Schicht ist dem losen Kontakt zwischen den einzelnen Silberteilchen zuzuschreiben.

Die in der Luft ausgeführten Vorversuche ergaben unzweifelhaft, daß ultraviolette Bestrahlung eine Zunahme der Stromstärke in dem die Silberschicht enthaltenden Stromkreis bewirkte. Indessen vermutete ich, daß diese Zunahme nicht allein die Folge einer verbesserten Leitfähigkeit der Silberschicht war, daß vielmehr bei dieser Erscheinung die von der ultravioletten Bestrahlung hervorgerufene Jonisation der Luft und das Hallwachssche Phänomen eine Rolle spielten.

Um die beiden Störungen zu beseitigen, wurden die weiteren Versuche im Vakuum ausgeführt. Der Einfluß des jeweiligen Zustandes der Atmosphäre wurde ebenfalls hierdurch beseitigt. Aber auch im evakuierten Raume wird man eine scheinbare Vergrößerung der Leitfähigkeit der Schicht beobachten müssen. Denn die von den ultravioletten Strahlen erzeugten Kathodenstrahlen werden eine dem Strom in der Schicht parallele Elektrizitätsströmung durch den luftleeren Raum bilden, etwa wie in Fig. 3 veranschaulicht wird.

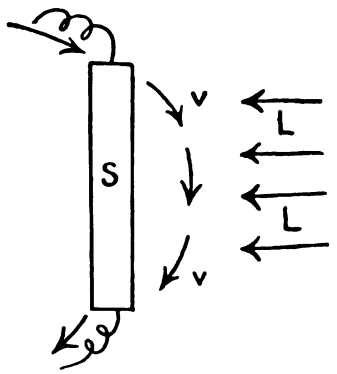


Fig. 3.

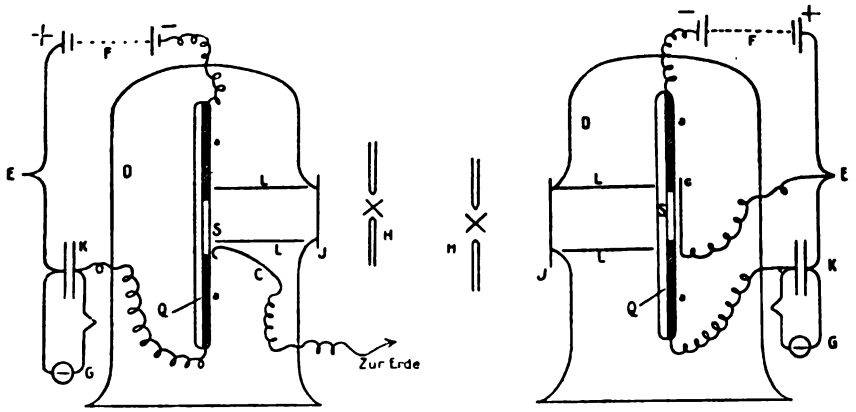
Das ultraviolette Strahlenbündel ist durch Pfeile $L\,L$, die Elektrizitätsströmung[1]) durch die Pfeile $v\,v$, angedeutet. Wie die weiter unten angegebenen Zahlen zeigen werden, kann

1) Für diese Erscheinung werde ich im folgenden von dem Ausdruck „Vakuumströmung“ Gebrauch machen.

diese Vakuumströmung sehr viel größer sein als der in der unbestrahlten Silberschicht stattfindende Strom.

2. Versuchsanordnung.

Um die Vakuumströmung abzulenken, habe ich die in den Fig. 4 I und II schematisch dargestellten Anordnungen angewandt. Dies geschah in beiden Fällen mittels einer isoliert aufgestellten Kupferplatte *c*, welche drei- bis viermal so breit war wie die zu untersuchende Silberschicht, und möglichst nahe an diese herangebracht wurde. Die Schicht selbst hatte eine Länge von etwa 10 mm und war ungefähr 5 mm breit.



D Evakuiertes Gefäß.
J Quarzfenster.
F Akkumulatorenbatterie.
s Granuläre Schicht.
c Kupferplatte.
Q Quarzplatte.
H Bogenlampe.
a a Kontakte aus kohärentem Silber.
K Kondensator.
G Galvanometer.
L L Grenzen des Strahlenbüschels.
E Erde.

Fig. 4 I und II.

Bei der in Fig. 4 I beschriebenen Anordnung wurde die Schicht direkt bestrahlt, d. h. nicht durch die Quarzunterlage. Die Kupferplatte war, wie in Fig. 4 I angedeutet ist, 1—2 mm oberhalb des unteren Randes der Silberschicht aufgestellt, um möglichst zu vermeiden, daß ein Teil der Vakuumströmung letzteren erreichen sollte. Die beiden aus chemisch niedergeschlagenem Silber bestehenden Kontakte *a a* sowie auch die Platte *c* waren mit nach außen führenden Drähten in metallischer Verbindung. Was die andere Anordnung anbelangt, so sieht man aus der

Fig. 4 II, daß die Schicht durch die Quarzunterlage bestrahlt werden mußte. Es war dadurch möglich, die Kupferplatte viel näher an die Schicht *s* heranzubringen, so daß das Antreffen der Vakuumströmung auf den unteren Kontakt *a* mit größerer Sicherheit vermieden war.

Um eine bei ultravioletter Bestrahlung stattfindende Erhöhung der Leitfähigkeit des Silbers beobachten zu können, wurde die während eines gemessenen Zeitraumes von einem Kondensator *K* (Fig. 4), dessen Belegungen mit dem einen (unteren) Kontakt *a*, bez. mit der Erde verbunden waren, während ultravioletter Bestrahlung bez. während Dunkelheit empfangene Ladung durch das Galvanometer *G* ballistisch gemessen. Während Aufladung des Kondensators wurde der andere (obere) Kontakt (*a*) mittels einer Akkumulatorenbatterie mit geerdetem + Pol auf einem bestimmten *negativen* Potential gehalten. Während derselben Zeit blieb die schon erwähnte Kupferplatte (*c*) geerdet. Auf diese Weise wurde es vermieden, daß die in Gestalt der Vakuumströmung in den Raum des evakuierten Gefäßes *D* hinaustretende Elektrizitätsmenge mit in die Ladung des Kondensators aufgenommen wurde.

Der größeren Klarheit halber werde ich im folgenden die während ultravioletter Bestrahlung durch die Silberschicht hindurchgelangende Elektrizitätsmenge jedesmal die Menge *A*; die unter denselben Bedingungen, aber unter Ausschluß ultravioletter Strahlen durch dieselbe hindurchgehende Menge die Menge *B* bezeichnen.

Die während des gemessenen Zeitraumes auf die Platte *c* gelangende Elektrizitätsmenge wurde auf die folgende Weise nachträglich gemessen: Diejenige Seite des Kondensators, welche bisher mit dem unteren Kontakt (*a*) verbunden war, wurde jetzt mit der nunmehr nicht geerdeten Platte (*c*) verbunden, während der untere Kontakt (*a*) geerdet wurde. Die vom Kondensator jetzt empfangene Ladung, welche im folgenden als die Elektrizitätsmenge *C* bezeichnet wird, besteht aus den während ultravioletter Bestrahlung in den Raum des Gefäßes hinaustretenden Elektronen.

3. Messungen.

Es mögen nun die Ergebnisse der Versuche mitgeteilt werden, welche auf die oben beschriebene Weise ausgeführt

wurden. Diese beziehen sich alle auf ein und dieselbe Schicht. Zunächst wurde die Anordnung 4 I angewandt. Das Potential am oberen Kontakt (a) betrug -100 Volt. Während eines Zeitraumes von 20 Sek. erhielt der Kondensator die Ladungen:

$$A = 8, \quad B = 2, \quad C = 28{,}5.$$

Aus diesem Versuch ist zu schließen, daß die Schicht s während ultravioletter Bestrahlung besser leitet als im unbestrahlten Zustand. Die wirkliche Leitfähigkeitszunahme wird übrigens größer sein müssen als die scheinbar beobachtete. Denn die verhältnismäßig große Elektrizitätsmenge, welche die Platte c erreicht, muß den Spannungsabfall zwischen den unteren Teilen der Schicht s und dem untern Kontakt (a) bedeutend herabsetzen.

Mehrere Versuche wurden mit den Anordnungen Fig. 4 I und II ausgeführt. Es ergab sich, daß $A - B$, also die bei Bestrahlung stattfindende Zunahme der Stromstärke in der Schicht von der Spannung (wenigstens für Spannungen oberhalb 100 Volt) unabhängig war. Es verhält sich also diese Zunahme genau wie ein *unselbständiger gesättigter Strom* in einem Gas. Die Erklärung der Unabhängigkeit von der Spannung ist auch in beiden Fällen die gleiche: es können nämlich in der Zeiteinheit nur so viele Ionen (Elektronen) verzehrt werden, als neu erzeugt werden.[1])

Während die Zunahme der Stromstärke in der Richtung der Schicht innerhalb weiter Grenzen als unabhängig von der Spannung angesehen werden kann, liegt die Sache anders mit dem Elektrizitätsweggange senkrecht zur Schicht, ganz besonders da, wo die Schicht durch die Quarzunterlage bestrahlt wird, also wo der Elektrizitätsweggang durch die Schicht senkrecht hindurch stattfindet. Hier wird die in der Zeiteinheit entweichende Elektrizitätsmenge sehr von der Geschwindigkeit der Elektronen, also von der Spannung abhängen. Man würde also erwarten, daß das Verhältnis $(A-B)/C$ mit abnehmender Spannung zunimmt. Dies ist in der Tat der Fall. Während oberhalb 100 Volt $(A-B)/C$ ungefähr $^1/_4$ beträgt, beträgt es bei 2 Volt $^2/_3$.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 8. p. 815. 1902.

D. Einfluß violetter und ultravioletter Strahlen auf das Leitvermögen des granulären Jodsilbers.

Die Strahlen des ganzen sichtbaren Spektrums bewirken eine Zunahme der Leitfähigkeit des durch Jodierung des granulären Silbers hergestellten Jodsilbers. Die Wirkung der violetten Strahlen ist bei weitem am kräftigsten. Das Jodsilber bleibt in diesem besser leitenden Zustand mehrere Minuten, nachdem die violetten Strahlen abgeschirmt werden. Das „granuläre" Jodsilber verhält sich also gegenüber violetter Bestrahlung wesentlich anders als die kohärente Substanz. Die Leitfähigkeitszunahme, die diese letztere bei violetter Bestrahlung erfährt, verschwindet sobald die Strahlen abgeschirmt werden.

Eine geringe Zunahme der Leitfähigkeit des granulären Jodsilbers bei ultravioletter Bestrahlung ließ sich beobachten. Aus den Versuchen konnte nicht entnommen werden, ob diese Zunahme eine plötzlich stattfindende ist, weil der große Widerstand der Schicht eine Anhäufung der Elektrizität im Kondensator verlangte. Aus demselben Grunde konnte nicht festgestellt werden, ob violette Bestrahlung eine plötzliche Leitfähigkeitszunahme bewirkt, obwohl eine solche vorhanden sein kann. Genauere Angaben über diese Versuche sind in der Dissertation enthalten.

E. Lichtelektrische Entladung bei Bleisuperoxyd und Schwefelsilber.

Es gibt eine Anzahl meistens dunkelgefärbter Oxyde, welche nach den bisherigen Untersuchungen metallisch leiten. Unter diesen ist vielleicht das merkwürdigste das Bleisuperoxyd. Diese Verbindung leitet außerordentlich gut, fast so gut als die schlecht leitenden Metalle. Sie wird dabei, wenn überhaupt, jedenfalls sehr wenig zersetzt. Sie zeigt ferner die den Metallen innerhalb gewisser Temperaturgrenzen charakteristische Erscheinung der Zunahme des Widerstandes mit der Temperatur, wie aus der von Streintz aufgestellten empirischen Formel

$$10^4 \sigma_t = 2{,}3\,(1 + 0{,}00065\, t)$$

(wo t die Temperatur und σ_t den dieser Temperatur ent-

sprechenden spezifischen Widerstand bezeichnet) hervorgeht.[1]) Es war daher von Interesse, das Bleioxyd hinsichtlich seiner lichtelektrischen Eigenschaften zu untersuchen.

1. Herstellung des Superoxyds.

Versuche, eine Bleisuperoxydschicht auf Gold und Platin elektrolytisch herzustellen, waren nicht erfolgreich. Wurde eine verdünnte mit einigen Tropfen Salpetersäure angesäuerte Bleinitratlösung elektrolysiert, indem als Anode eine Gold- bez. Platinscheibe und als Kathode eine Bleistange benutzt wurde, so bildete sich sehr wenig Oxyd auf der Scheibe, während viele Blasen — jedenfalls Sauerstoffblasen — von derselben fortkamen. Dagegen bildete sich, wenn statt der Gold- oder Platinscheibe eine solche aus Messing benutzt wurde, eine sehr schöne schwarzbraune Superoxydschicht, welche eine vollkommen glatte etwas schwach spiegelnde Oberfläche besaß. Bei der Bildung dieser Schicht traten Blasen überhaupt nicht auf.

Da das Messing notwendigerweise von der angesäuerten Lösung angegriffen wird, so ist die absolute Reinheit des auf die oben beschriebene Weise hergestellten Oxyds fraglich.

2. Versuchsanordnung.

Die Untersuchung der entladenden Wirkung der ultravioletten Strahlen auf Bleisuperoxyd geschah auf ähnliche Weise wie beim Jodsilber. Als Vergleichssubstanz wurde Aluminium mit glatter aber unpolierter Oberfläche benutzt. Die untersuchten Oxydschichten hatten eine Dicke von mindestens 14 μ.

3. Lichtelektrische Messungen.

Die ersten Messungen der auf Aluminium bezogenen lichtelektrischen Konstante des Oxyds ergaben verschiedene Werte. Die Ursache dieser Verschiedenheit war nicht weit zu suchen. Beim Herausnehmen der Oxydschicht aus dem Gefäß hatte die Oberfläche ein weißgraues Aussehen. Das Oxyd hatte

---

1) F. Streintz, Ann. d. Phys. **9.** p. 854. 1902.

sich zersetzt.[1]) Die Zersetzung fand nur dann statt, wenn mit Unterstützung eines Induktoriums evakuiert wurde. Ich fand nämlich, daß die lichtelektrische Konstante einer Oxydschicht, nachdem der Strom eines großen Induktoriums das Gefäß einige Minuten durchsetzt hatte (wobei intensive Kathodenstrahlen auf die Schicht fielen) den erstaunend hohen Wert von 45,3 hatte. Die lichtelektrische Konstante derselben Schicht vor Benutzung des Induktoriums betrug 1,01.

Es mußte also das Gefäß ohne Hilfe des Induktoriums evakuiert werden. Ich bekam dann für die lichtelektrische Konstante verschiedener Schichten die folgenden, nahezu gleichen Werte: 0,94; 1,01; 0,92; 0,97; 1,16; 1,02; 0,99. Diese Zahlen ergeben den Mittelwert 1,00.

Längere Bestrahlung bewirkte keine merkliche Ermüdung des Bleisuperoxyds.

4. Eindringungstiefe der lichtelektrischen Wirkung der ultravioletten Strahlen.

Unter der Eindringungstiefe der lichtelektrischen Wirkung verstehe ich diejenige Dicke der Schicht, bei welcher die lichtelektrische Wirkung merklich konstant wird. Bleisuperoxydschichten von verschiedener Dicke wurden auf gleichgroßen Messingoberflächen durch Elektrolyse des Bleinitrats hergestellt und die lichtelektrische Konstante jeder Schicht gemessen. Die Resultate stehen in der folgenden Tabelle.

Dicke der Superoxydschicht		Lichtelektrische Konstante
Stromstärke in Milliamp. mal Dauer der Herstellung in Sek. gemessen	Millionstel-millimeter	
0	0	0,35
180	59	0,38
900	297	0,78
1100	363	0,84

Die Dickenzahlen in der ersten Kolumne bedeuten jedesmal das Produkt aus der Dauer der Herstellung des Oxyds

1) Bleisuperoxyd hat mit den meisten Peroxyden die Fähigkeit gemein, leicht Sauerstoff abzugeben. Vgl. Holleman, Lehrbuch der anorganischen Chemie p. 258.

in Sekunden und der mittleren Stromstärke in Milliampère gemessen.

Zur Umrechnung der zuerst ermittelten Schichtdicken dienten folgende Daten:

Durchmesser der Messingscheiben . . . . 2,3 cm
Spezifisches Gewicht des Superoxyds . . . 9[1])
In einer Ampèresekunde wird 1,237 mg PbO_2 aus der Lösung ausgeschieden.

Die lichtelektrische Konstante der 363 $\mu\mu$ dicken Schicht beträgt 0,84, also etwas weniger als die Konstante einer unendlich dicken Schicht. Die entladende Wirkung der Strahlen ist demgemäß noch bis zu dieser Tiefe zu spüren.[2])

5. Lichtelektrische Empfindlichkeit des Schwefelsilbers.

Zur Bestimmung der lichtelektrischen Konstante dieser ebenfalls metallisch leitenden Verbindung benutzte ich eine mir von Hrn. Bädeker gütigst zur Verfügung gestellte, auf massivem Silber gelagerte Schicht. Es erwies sich das Schwefelsilber als 2,7 mal so empfindlich als das Silber. Letzteres hat die auf Bleisuperoxyd bez. auf Aluminium bezogene lichtelektrische Konstante 3,5 (vgl. p. 111), woraus sich für die Konstante des Schwefelsilbers der Wert 9,5 berechnen läßt.

F. Lichtelektrische Versuche an Schellack.

Das Lenardsche Phänomen ist für Metalle bez. metallisch leitende Körper nicht besonders charakteristisch. Jodsilber z. B. leitet im Dunkeln elektrolytisch und ist ein lichtelektrisch sehr empfindlicher Stoff. Durch die schon besprochene (vgl. p. 126) Zersetzung des Bleisuperoxyds entsteht ein wohl nicht metallisch leitendes Produkt, welches ebenfalls lichtelektrisch äußerst empfindlich ist.

Es entsteht also die Frage, ob nicht vielleicht auch Isolatoren lichtelektrisch empfindlich sind. Gerade bei Isolatoren sind die Elektronen „gebunden", und es sind ja nur diese und unter diesen namentlich diejenigen, die die Schwingungsperiode

---

1) F. Streintz, l. c.
2) Vgl. E. Ladenburg, Ann. d. Phys. 12. p. 558. 1903.

der wirksamen Strahlen besitzen, welche von denselben ausgelöst werden.[1])

Eine mit einer Schellackschicht überzogene Aluminiumscheibe erwies sich als nur $^1/_{40}$ so empfindlich als das unüberzogene Aluminium, während eine mit einer gleichdicken Schellackschicht überzogene Quarzplatte $^1/_{12}$ der wirksamen Strahlen hindurch ließ. Eine mit einer Schellackschicht von solcher Dicke, daß nur $^1/_{100}$ bis $^1/_{150}$ der wirksamen ultravioletten Strahlen durch sie hindurch gelangen konnte, überzogene Aluminiumscheibe erwies sich als ganz unempfindlich. Es scheint also, als ob bei ultravioletter Bestrahlung einer mit einer hinreichend dünnen Schellackschicht überzogenen Aluminiumscheibe die im Aluminium erzeugten Elektronen zum Teil durch den Schellack gelangen. Der letztere ist jedenfalls wenig, wenn überhaupt lichtelektrisch empfindlich.

Schellack ist übrigens für ultraviolette Strahlen verhältnismäßig sehr durchlässig, wie ich durch Beobachtungen an Quarzplatten, welche mit Schellackschichten überzogen waren, konstatierte. Man muß also einen anderen Isolator suchen, der ultraviolette Strahlen stark absorbiert, um eine etwaige lichtelektrische Empfindlichkeit beobachten zu können.

Zusammenfassung.

Die Versuche haben ergeben:

1. a) Daß Jodsilber gegenüber ultravioletten Strahlen außerordentlich lichtelektrisch empfindlich — ungefähr zehnmal so empfindlich als Aluminium — ist.

b) Daß andererseits bei violetter Bestrahlung des Jodsilbers keine lichtelektrische Wirkung zu spüren ist, trotzdem violette Strahlen vom Jodsilber stark absorbiert werden und in demselben nach Scholls Untersuchungen wahrscheinlich freie Elektronen erzeugen.

c) Daß ultraviolette Strahlen das Leitvermögen des Jodsilbers erhöhen, wie auch zu erwarten ist, indem bei ultra-

1) Inzwischen ist eine Arbeit von Reiger erschienen, in der er das Hallwachssche Phänomen bei Glas beobachtet zu haben glaubt. Indessen ist zu bemerken, daß Glas meistens mit einer verhältnismäßig gut leitenden Schicht überzogen ist, welche bei dem Phänomen jedenfalls die Hauptrolle spielt. Vgl. R. Reiger, Ann. d. Phys. 17. p. 935. 1905.

violetter Bestrahlung Elektronen im Jodsilber frei werden. Die die Leitfähigkeit erhöhende Wirkung der ultravioletten Strahlen ist verhältnismäßig klein im Vergleich zu der Wirkung der violetten Strahlen, ihr Verhalten also gerade umgekehrt wie das der entladenden Wirkung der ultravioletten und violetten Strahlen. Dieses Verhalten wird verständlich durch die Beachtung des Umstandes, daß das Hallwachs-Lenardsche Phänomen große Elektronengeschwindigkeit verlangt, das durch Elektronen bedingte Leitvermögen dagegen kleine (man denke auch an die Abnahme des Leitvermögens der Metalle durch die die Elektronengeschwindigkeit steigernde Temperaturwirkung).

d) Der auf die Luftwellenlänge bezogene Absorptionskoeffizient (nK) des Jodsilbers für die entladend wirksamen Strahlen ist zu 0,44 bestimmt worden.

2. Bei gekörnten oder granulären Schichten (sowohl von Silber als von Jodsilber) ist eine das Leitvermögen erhöhende Wirkung ultravioletter Bestrahlung beobachtet worden. Bei solchen Schichten geht die leitfähigkeitserhöhende Wirkung wahrscheinlich parallel der entladenden Wirkung; denn es ist (bei Silber wenigstens) beobachtet worden, daß die bei ultravioletter Bestrahlung eintretende Zunahme der Stromstärke von der Spannung in weiten Grenzen unabhängig ist.

3. Es sind am Jodsilber einige bei vornehmlich violetter Bestrahlung *allmählich* stattfindende Widerstandsänderungen beobachtet worden, welche darauf hindeuten, daß bei Bestrahlung mehrere Vorgänge (jedenfalls chemischer Natur) sich gleichzeitig abspielen, von denen je nach den Umständen der eine oder der andere überwiegt. Unter diesen allmählich stattfindenden Widerstandsänderungen ist eine sehr auffallende Widerstandsabnahme des *granulären* Jodsilbers zu nennen, worüber die Dissertation genauere Angaben enthält.

4. Die auf Aluminium bezogene lichtelektrische Konstante des Bleisuperoxyds und die des Schwefelsilbers, zweier nach den bisherigen Untersuchungen metallisch leitender Verbindungen, sind gemessen worden. Erstere beträgt 1, letztere 9,5.

5. Die sehr große lichtelektrische Wirkung ultravioletter Strahlen auf Jodsilber verdient Beachtung, und es ist der

Untersuchung wert, ob auch andere Elektrolyte mit starker Absorption eine starke lichtelektrische Wirkung aufweisen.

6. Versuche an einem Isolator, Schellack, zeigten keine entladende Wirkung ultravioletter Strahlen. Schellack aber stellte sich deswegen als schlecht gewählt heraus, weil er für ultraviolette Strahlen verhältnismäßig sehr durchlässig ist. Obwohl nicht selbst lichtelektrisch empfindlich, läßt Schellack in dünnen auf Metall gelagerten Schichten den lichtelektrischen Strom durch.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. O. Wiener für die mir stets zuteil gewordene Unterstützung und Ratschläge meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen. Ebenso bin ich den Herren Assistenten des genannten Instituts und ganz besonders Hrn. Privatdozenten Dr. Scholl zu größtem Dank verpflichtet.

London, 21. März 1907.

(Eingegangen 27. März 1907.)

7. *Über adiabatischen und isothermen Halleffekt in Wismut; von H. Zahn.*

In einer Arbeit[1]) „Zur Elektronenbewegung in Metallen" behandelt Hr. Gans die in einer stromdurchflossenen Wismutplatte durch ein äußeres Magnetfeld hervorgerufenen Erscheinungen, wobei er seinen Untersuchungen die Anschauungen von Hrn. Lorentz zugrunde legt. Hr. Gans konnte nun zeigen, daß man, selbst wenn man nur Metalle mit negativem Halleffekt wie Wismut betrachtet, mit der Lorentzschen Annahme einer einzigen beweglichen Elektronenart — und zwar der negativen — die Erscheinungen nicht darstellen kann. Er schließt dies einerseits aus dem Umstande, daß sowohl Halleffekt wie Leitvermögen in ganz anderer Weise von der Feldstärke abhängen als es sich aus der Theorie ergibt, andererseits aber daraus, daß sich für den galvanomagnetischen Temperatureffekt das positive Vorzeichen berechnet, während es negativ beobachtet wird.

Ich möchte dem Umstande, daß die berechnete Abhängigkeit des Rotationskoeffizienten und des Leitvermögens von der Beobachtung so stark abweicht, für die Entscheidung der obigen Frage nicht allzuviel Gewicht beilegen. Denn die Berechnungen des Hrn. Gans sind ja allgemein für Metalle mit negativem Halleffekt aufgestellt; die spezifisch starken diamagnetischen Eigenschaften des Wismuts finden in ihnen keine Berücksichtigung. Es wäre wohl denkbar, daß sich dieselben für die Abhängigkeit der Effekte von der Feldstärke in hohem Maße geltend machten. Hingegen scheint mir der zweite Grund, den Hr. Gans anführt, das positive Vorzeichen des Koeffizienten P — nach der Drudeschen Bezeichnung[2]) — hinreichend und ausschlaggebend zu sein, ganz abgesehen von dem Umstande, daß die nicht modifizierte Lorentzsche Annahme ja nur für

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **20.** p. 293. 1906.
2) P. Drude, Ann. d. Phys. **3.** p. 380. 1900.

Metalle mit negativem Rotationskoefizienten anwendbar ist. Es dürfte also die in den Theorien von Riecke und Drude durchgeführte Anschauung zweier beweglicher Elektronenarten doch wohl erforderlich sein. Wahrscheinlich aber werden dann die Rechnungen unter Zugrundelegung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes außerordentlich kompliziert, wie dies Hr. Lorentz[1]) schon für die Wärmeleitung, den Peltier- und Thomsoneffekt hervorgehoben hat.

Ich möchte nun im folgenden auf einen Punkt näher eingehen, den Hr. Gans in seiner Betrachtung besonders hervorhebt, nämlich auf die Frage, ob die im Magnetfeld auftretenden elektrischen und thermischen Erscheinungen einander in merklicher Weise beeinflussen oder nicht, mit anderen Worten, ob die elektromotorische Kraft des Halleffektes — um diesen handelt es sich in erster Linie — unter sonst gleichen Bedingungen verschieden gefunden wird, je nachdem man die gleichzeitig auftretende galvanomagnetische Temperaturdifferenz der Plattenränder zur Ausbildung kommen läßt — adiabatischer Fall — oder unterdrückt — isothermer Fall. Hr. Gans hat für kleine Magnetfelder gültige Formeln[2]) abgeleitet, die das Verhältnis der adiabatischen zur isothermen Hallkonstante darstellen; man könnte aus diesem Verhältnis ein Urteil darüber gewinnen, wie sich die Anzahl der frei beweglichen Elektronen mit der Temperatur ändert. Bei der Bedeutung, die dieser Umstand für die Elektronentheorie der Metalle hätte, schien mir trotz der unzulänglichen Grundannahme einer einzigen Elektronenart die experimentelle Vergleichung des adiabatischen und isothermen Falles wünschenswert zu sein. Das Resultat dieser Untersuchungen bildet den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit.

Wie schon v. Ettingshausen[3]) gezeigt hat, erhält man den Rotationskoeffizienten für Wismut unter sonst gleichen Bedingungen verschieden, je nachdem die untersuchte Wismutplatte von Luft bez. Watte oder von Wasser umgeben ist. Dies rührt davon her, daß zu der elektromotorischen Kraft

1) H. A. Lorentz, Arch. Néerl. 2. X. p. 371. 1905.
2) l. c. p. 305 u. p. 306.
3) A. v. Ettingshausen, Wied. Ann. 31. p. 754. 1887.

des Halleffektes sich eine Thermokraft Wismut-Elektrodenmaterial addiert, die durch die in Luft sehr viel stärker als in Wasser auftretende galvanomagnetische Temperaturdifferenz der Plattenränder bedingt ist. Man vermeidet diese Fehlerquelle, indem man Wismutelektroden anwendet, oder man berücksichtigt sie rechnerisch, wie ich es in einer früheren Arbeit[1]) tat, durch die Gleichung

$$R = R' + \Theta P.$$

Hierin bedeutet R den korrigierten, R' den unkorrigierten Rotationskoeffizienten, Θ die Thermokraft Wismut-Elektrodenmaterial, P die Konstante des galvanomagnetischen Temperatureffektes, alle Größen im absoluten elektromagnetischen Maßsystem gemessen.

Natürlich hat diese Erscheinung mit der in Frage stehenden der Sache nach nichts zu tun, aber sie zeigt den Weg, wie der adiabatische und isotherme Effekt miteinander zu vergleichen sind. Taucht man nämlich die Platte in Wasser und sorgt durch reichliche Bewegung desselben dafür, daß die Temperaturdifferenz der Ränder völlig verschwindet, so erhält man die richtige isotherme Hallkonstante. Die oben erwähnte Methode der Berechnung führt hingegen auf die adiabatische Hallkonstante, ebenso wie die Messung mit Wismutelektroden. Natürlich gilt dies nur näherungsweise; denn genau genommen ist die Wärmeleitfähigkeit der Luft bez. Wattepackung ebensowenig zu vernachlässigen, wie die des Wassers als unendlich groß anzusehen; es läßt sich also weder der adiabatische noch der isotherme Fall streng realisieren. Nun hat Boltzmann[2]) angegeben, wie man die Temperaturdifferenz der Ränder berechnen kann, die sich ohne Wärmeabgabe nach außen herstellen würde, wenn man nur außer den Plattendimensionen noch das Wärmeleitvermögen der Plattensubstanz und das der Plattenumgebung kennt. Mit Hilfe dieser Boltzmannschen Formel sind in meiner schon zitierten Arbeit sämtliche Koeffizienten P korrigiert[3]), d. h. nach der hier gebrauchten Aus-

1) H. Zahn, Ann. d. Phys. **14.** p. 905. 1904.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. **31.** p. 755. 1887, in der Arbeit von v. Ettingshausen mitgeteilt.

3) H. Zahn, l. c. p. 900.

drucksweise für den adiabatischen Fall berechnet worden. Lege ich im folgenden die Dimensionen der damals mit I bezeichneten Wismutplatte zugrunde, so zeigt sich, daß die Temperaturdifferenz wegen der endlichen Leitfähigkeit der angewendeten Wattepackung etwa um 9 Proz. zu klein beobachtet wird. Andererseits läßt sich auf gleiche Weise berechnen, daß in ruhender Wasserumgebung die Temperaturdifferenz der Ränder nicht völlig verschwindet, sondern etwa $^1/_7$ der in Watte beobachteten betragen würde.

Indessen erscheint es wohl zweifellos, daß sich der isotherme Fall experimentell sehr nahe wird realisieren lassen, wenn man nur genügend kleine Primärstromstärken anwendet und durch stark fließendes Wasser für hinreichende Wärmeabfuhr sorgt. Den adiabatischen Fall etwa durch Einbringen in Vakuum genau zu verwirklichen, dürfte sehr schwierig sein, ist aber auch zunächst wohl gar nicht nötig, da man ihn, wie die Rechnung zeigt, bei Verwendung der Wattepackung schon so nahe erreicht hat, daß etwa bestehende Unterschiede zwischen dem isothermen und adiabatischen Fall sich erkennen lassen müßten. Die Korrektion des R' für die gleichzeitig auftretende Thermokraft wird aber gar nicht davon berührt, wie nahe man dem adiabatischen Fall kommt, indem R' genau um soviel größer oder kleiner gefunden wird, als ΘP unter den gegebenen Verhältnissen kleiner oder größer ausfällt.

Das Prinzip der Untersuchung ist also sehr einfach. Die Ausführung gestaltete sich jedoch recht umständlich, da die Effekte ziemlich stark von der Temperatur abhängig sind und diese Abhängigkeit daher genau bestimmt werden mußte. Auch sonst machten sich einige Fehlerquellen störend bemerkbar, so daß ich glaube, etwas näher auf die Einzelheiten der Messungen eingehen zu sollen.

Es wurden zwei Platten aus reinem Kahlbaumschen Wismut untersucht. Die eine derselben war mit Wismutelektroden versehen; ihre Dimensionen waren Länge = 3,20 cm, Breite = 1,55 cm, Dicke = 0,12 cm. Die Platte war aus einer ursprünglich viel größeren herausgeschnitten, so daß die Elektroden aus demselben Stück waren; ihre Länge betrug 3,0 cm bez. 2,6 cm, ihre mittlere Breite etwa 0,25 cm. Die andere Wismutplatte hatte eine Länge von 3,98 cm, eine Breite von

2,50 cm, eine mittlere Dicke von 0,056 cm; als Elektroden dienten die Kupferdrähte der Thermoelemente. Die im folgenden ausführlicher beschriebenen Versuche beziehen sich auf diese Platte. Um alle Effekte möglichst stark zur Geltung kommen zu lassen, wurde der Primärstrom meistens so zugeführt, wie dies aus Fig. 1 ersichtlich ist, bei einer Versuchsreihe wurde er jedoch durch die Breitseiten ein- bez. abgeführt. Die Platte selbst war in ein starkwandiges Messinggefäß mit abschraubbarer Vorderseite luftdicht eingeschlossen. Die Länge und Breite dieses Gefäßes waren innen gemessen 12 bez. 7 cm, seine Dicke 1,3 cm. Die Elektroden waren mit Hartgummi isoliert eingeführt und mit Bleiglätte und Glyzerin eingekittet.

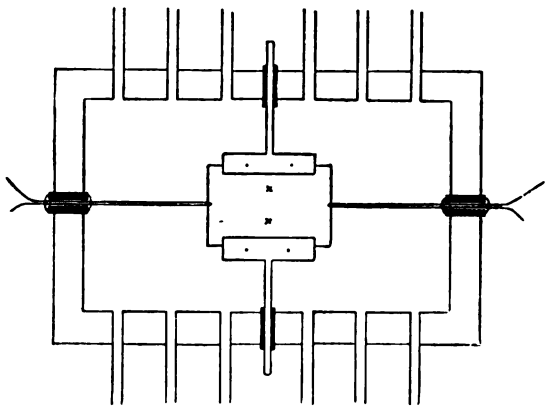


Fig. 1.

Die zwölf Röhrchen von 0,4 cm innerem Durchmesser dienten dazu, einen kräftigen Wasserstrom ein- bez. austreten zu lassen Da, wie Vorversuche gezeigt hatten, in dem abgeschlossenen Raum die galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen sich in Luft völlig ungestört ausbildeten, konnte auf die sonst verwendete Wattepackung verzichtet werden, was den Vorteil bot, daß die Platte in unveränderter Stellung zum Magnetfeld nacheinander in Luft und Wasserumgebung untersucht werden konnte.

Zur Erzeugung des Magnetfeldes diente ein großer Halbringelelektromagnet nach du Bois von Hartmann & Braun; er wurde von einer Akkumulatorenbatterie gespeist.

Die verwendeten ca. 50 cm langen Thermoelemente bestanden aus Kupferdraht von 0,13 mm und Konstantandraht von 0,10 mm Durchmesser; der Konstantandraht war in einiger Entfernung von der Lötstelle zur Erzielung kleineren Widerstandes zwölffach genommen. Die Thermokraft der Kombination läßt sich zwischen 0° und 100° darstellen durch die Gleichung $\Theta = (36{,}513\ t + 0{,}0323\ t^2)$ Mikrovolt.

Zur Berechnung der Korrektion für den adiabatischen Fall ist, wie oben ausgeführt wurde, die Kenntnis der Thermokraft Wismut–Kupfer erforderlich. Zu diesem Zweck wurde die Wismutplatte in zwei Röhren so eingekittet, wie dies im Durchschnitt Fig. 2 zeigt. Durch die Röhren wurde Dampf, bez. verschieden temperiertes Wasser in kräftigem Strahle geleitet, und dabei die Thermokraft zwischen den Kupferdrähten der Thermoelemente gemessen. Die Röhren waren sorgfältig mit Watte umgeben; die Temperaturmessung geschah thermometrisch zu beiden Seiten der Röhren. Es ergab sich für die Thermokraft Wismut–Kupfer der Wert $\Theta = (67{,}96\ t - 0{,}00207\ t^2)$ Mikrovolt.

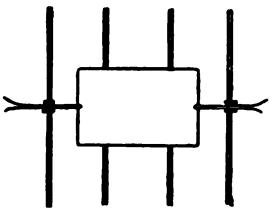


Fig. 2.

Messung des Koeffizienten P. Die galvanomagnetische Temperaturdifferenz wurde auf zweierlei Weise gemessen. Entweder wurde die ganze Differenz der Ränder gleichzeitig gemessen, wobei ein Drehspulengalvanometer mit zwei voneinander unabhängigen Spulen verwendet wurde; jedes der beiden Elemente wurde dann auf eine Spule geschaltet, wie dies in einer früheren Arbeit[1]) ausführlich beschrieben ist. Oder aber es wurde erst die Temperaturänderung an einem Plattenrand allein gemessen, dann die des anderen, indem beide Thermoelemente nacheinander auf dasselbe Galvanometer geschaltet wurden. Letztere Methode war mit Rücksicht auf die verfügbaren Galvanometer[2]) die empfindlichere, erforderte aber eine

---

1) H. Zahn, l. c. p. 891.

2) Das bei den Temperaturmessungen vorwiegend benutzte Drehspulengalvanometer war nach meinen Angaben in der Werkstätte des hiesigen Instituts verfertigt worden. Es besitzt eine Schwingungsdauer

große Konstanz der Versuchsbedingungen. Dieselbe ließ sich indessen leicht erreichen, wenn man einen schwachen Primärstrom — 0,5 Amp. — anwendete und denselben hinreichend lange vor Beginn der Messungen einschaltete. Diese Methode wurde daher vorwiegend benutzt. Bei beiden Methoden befanden sich die nicht eingezeichneten zweiten Lötstellen der Thermoelemente in einem gemeinsamen Petroleumbade von Zimmertemperatur.

Es zeigte sich nun, daß die galvanomagnetische Temperaturdifferenz auch in Wasser nicht nur bestand, sondern auch einen sehr viel höheren Betrag zu erreichen schien, als nach der früher gemachten Überschlagsrechnung zu erwarten war. Bei genauerer Untersuchung erwies sich jedoch, daß der beobachtete Ausschlag jedenfalls nicht von einer noch bestehenden Temperaturdifferenz der Ränder herrühren konnte. Dies folgte erstens aus dem Umstande, daß die Strömungsgeschwindigkeit des fließenden Wassers keinen oder doch höchstens einen sehr kleinen Einfluß auf die Größe des Ausschlages ausübte, zweitens aber daraus, daß die Größe des Ausschlages bei den beiden Thermoelementen sehr verschieden war. Während nämlich in Luft die Ausschläge der Elemente angenähert gleich waren, ergaben sie sich in Wasser sehr verschieden, der eine etwa dreimal größer als der andere, beide natürlich bedeutend kleiner als in Luft.

Eine Erklärung dieser Erscheinung ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, daß es wohl kaum möglich ist, ein Thermoelement absolut punktförmig auf eine Platte aufzulöten. Die Befestigung war in meinem Falle derartig erfolgt, daß beide Drähte ein kleines Stück zusammengedrillt wurden und dieses zusammengedrillte Ende durch ein feines Loch in der Platte gesteckt war. Das Anlöten erfolgte von der Rückseite der

---

von 4 Sek., einen inneren Widerstand von etwa 7,8 Ohm und erfordert einen äußeren Widerstand von ca. 10 Ohm, bei welchem sich das System nach einer Umkehr einstellt. Bei einem Skalenabstand von 1 m entspricht 1 mm Ausschlag einer Stromstärke von etwa $3{,}5 \cdot 10^{-9}$ Amp. Das ebenfalls im Institut gebaute Differentialgalvanometer besitzt zwar ungefähr die gleiche Stromempfindlichkeit, doch erfordert es, wenn beide Spulen gleichzeitig verwendet werden, wegen der starken Dämpfung einen Ballastwiderstand von mindestens 50 Ohm pro Spule.

Platte aus mit leichtflüssigem, stark wismuthaltigem Lot, das die Öffnung völlig ausfüllte; der Kupfer- und Konstantandraht trennten sich unmittelbar an der Plattenoberfläche. Trotz dieser sehr sauber aussehenden Befestigung gelang es nicht, den oben erwähnten Ausschlag in Wasser völlig zum Verschwinden zu bringen. Nimmt man nun an, daß beide Drähte auf verschiedenen Punkten der Platte liegen, so erklärt sich der Ausschlag leicht als eine Störung durch den Halleffekt, d. h. durch die Drehung der Äquipotentiallinien. Dies ist deutlich aus nebenstehenden Figuren zu ersehen, in denen die kleinen Kreise in stark übertriebenem Maße die Punkte bezeichnen sollen, an denen der Kupfer- bez. der Konstantandraht die Platte berühren. Man kann dabei zwei Lagen als wesentlich unterscheiden, auf die sich alle übrigen zurückführen lassen: 1. die beiden Kreise liegen auf dem gleichen Stromfaden, 2. sie liegen auf der gleichen Äquipotentiallinie. In Fall 1 wird durch das Magnetfeld nichts geändert, die Kreise kommen auf andere Niveaulinien zu liegen, ihre Potentialdifferenz wird aber durch das Feld nicht geändert. Im Fall 2 ist dies anders; die beiden Kreise, die ursprünglich auf einer Äquipotentiallinie lagen, kommen durch die Drehung auf zwei verschiedene zu liegen, d. h. es tritt ein Ausschlag auf, der eine Temperaturänderung der Platten durch das Feld vortäuscht.

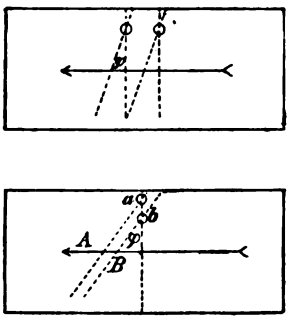


Fig. 3.

Kommutiert man den Primärstrom sehr schnell, so erfolgt eine Nullpunktsverschiebung des Galvanometers, die sich viel rascher einstellt, als daß sie durch Temperaturänderungen bedingt sein könnte; erst allmählich vollzieht sich hinterher eine zweite Verschiebung, die kleinen Temperaturänderungen infolge der Inhomogenität der Platte zuzuschreiben ist. Diese Erscheinung spricht in der Tat dafür, daß die Punktförmigkeit der Lötstellen eine unvollkommene ist. Daß die Erklärung der scheinbaren galvanomagnetischen Temperaturdifferenz in Wasser durch Hallstörungen zutreffend ist, wird

aus folgendem Versuch wahrscheinlich, den ich mit einer anderen Wismutplatte angestellt habe. Ein Thermoelement war in gleicher Weise, jedoch etwas mehr vom Rande entfernt, angebracht. Die Potentialdifferenz, die a und b durch Drehung der Äquipotentiallinien um den Winkel φ erhalten, läßt sich leicht berechnen; sie ist gleich der Potentialdifferenz, die ohne Feld zwischen AB bestand. Diese ist aber gleich $iw = iAB/\beta\delta\sigma$, worin i den Primärstrom, $\beta\delta$ den Plattenquerschnitt, σ das Leitvermögen von Wismut ohne Feld bedeuten. $AB = ab\,\mathrm{tang}.\varphi$, also die Potentialdifferenz zwischen $ab = iab\,\mathrm{tang}.\varphi/\beta\delta\sigma$; der Winkel φ ist aber mit dem Rotationskoeffizienten R verbunden durch die Gleichung $\mathrm{tang}.\varphi = R\sigma\mathfrak{H}$. Der Abstand ab läßt sich gleichfalls elektrisch messen, wenn man einen Strom senkrecht zu der bisherigen Stromrichtung schickt, wobei für Parallelität der Stromlinien zu sorgen ist. Man kann dann aus der bekannten Galvanometerempfindlichkeit den Widerstand zwischen ab und hieraus, dem Leitvermögen und den Plattendimensionen, den Abstand ab finden. Die auf diesem Wege gefundene elektromotorische Kraft zwischen ab ergab sich für die betreffende Platte für einen Primärstrom von 1 Amp. zu etwa 11 Mikrovolt, während an derselben Platte in Wasser das Magnetfeld in dem Thermoelement eine elektromotorische Kraft von ca. 7 Mikrovolt hervorrief. Berücksichtigt man, daß in der Rechnung absolute Parallelität der Stromlinien und Homogenität der Platte vorausgesetzt sind, so erscheint die Übereinstimmung als völlig genügend, um die obige Erklärung zu rechtfertigen.

Ich bin auf diese Erscheinung, die ja nur eine Korrektion einer Korrektion bedingt, etwas näher eingegangen, als für den Zweck dieser Arbeit vielleicht nötig war; ich wollte aber auf diese Fehlerquelle aus dem Grunde besonders hinweisen, weil ich dieselbe in meiner früheren Arbeit übersehen habe. Es sind also meine Bestimmungen für P in meiner früheren Arbeit mit einer größeren Unsicherheit behaftet, als ich dies damals annahm; dieselbe läßt sich schwer schätzen, da sich nicht mehr feststellen läßt, wie sehr die verwendeten Thermoelemente von der Punktförmigkeit abwichen, doch glaube ich nicht, daß sie den Betrag von 20 Proz. erreicht. Für die vorliegende Arbeit

kann man aus den Versuchen schließen, daß in stark fließendem Wasser eine merkliche Temperaturdifferenz der Plattenränder nicht mehr auftritt, daß also der isotherme Fall genügend realisiert ist. Andererseits müssen die in Luft beobachteten galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen um die scheinbar in Wasser auftretenden verkleinert werden, da diese Störung durch den Halleffekt natürlich auch in Luft stattfindet.

Messung des Koeffizienten R. Über die Messung der elektromotorischen Kraft des Halleffektes ist nichts Besonderes zu erwähnen. Die Bestimmung geschah mit einem Drehspulengalvanometer der Firma Siemens & Halske von 1000 Ohm innerem Widerstand; ein Skalenteil entsprach bei dem verwendeten Skalenabstand von 5 m im Mittel 1,17 Mikrovolt. Da mit Ausschlagsmessung gearbeitet wurde, war die Proportionalität des Ausschlages mit der Stromstärke kontrolliert worden; dieselbe war bis zu 200 Skt. streng vorhanden.

Für den isothermen Fall wurde auch der Temperaturkoeffizient von R bestimmt, indem Wasser verschiedener Temperatur durch die Kassette geleitet wurde. Bei einem Versuch wurde die Platte in einem anderen Gefäß abwechselnd in Eis und Wasser verglichen. Als Mittel ergab sich $\alpha = -0{,}00344$. Für den adiabatischen Fall wurde der Temperaturkoeffizient, der nur durch Stromheizung und zwar viel ungenauer hätte bestimmt werden können, überhaupt nicht gemessen, sondern nur die Plattentemperatur. Dieselbe blieb während der Messungen — der Strom wurde etwa 6 Stunden vorher eingeschaltet — auf wenige Zehntelgrade konstant, so daß P und R hintereinander bei der gleichen Temperatur gemessen wurden. Auf diese Temperatur mußte dann zur Vergleichung der isotherme Wert umgerechnet werden.

Zur Bestimmung der Plattentemperatur wurden ursprünglich die beiden angelöteten Thermoelemente verwendet, indem der Temperaturunterschied gegen das gemeinsame Petroleumbad gemessen und aus beiden Beobachtungen das Mittel genommen wurde. Diese Methode dürfte jedoch, ganz abgesehen von den Fehlern, die durch die nicht völlig erreichte Punkt-

förmigkeit der Lötstellen bedingt sind, aus dem Grunde unzuverlässig sein, weil sie nur die Temperatur an der Plattenoberfläche ergibt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß zumal beim adiabatischen Fall das Platteninnere eine wesentlich andere Temperatur besitzt, als sie an der Oberfläche gefunden wird. Ich habe es daher vorgezogen, bei den definitiven Messungen die mittlere Plattentemperatur aus dem Plattenwiderstand zu ermitteln, zu welchem Zweck an den in Fig. 1 mit Kreuzen bezeichneten Stellen der Platte Wismutdrähte und an denselben in 2 cm Abstand Kupferdrähte angelötet wurden. Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes wurde durch Einbringen der Platte in Dampf bez. Eis bestimmt, er ergab sich zu +0,00434.

Während beim isothermen Fall die so ermittelte Temperatur über die ganze Platte gleichförmig verteilt sein dürfte, ist dies beim adiabatischen nicht genau der Fall. Es wird nämlich wegen der Wärmeabgabe an die dicken Stromzuführungen die durch den Strom geheizte Platte in der Mitte, wo der Halleffekt gemessen wird, eine etwas höhere Temperatur besitzen als zu beiden Seiten, also auch eine höhere als die Widerstandsmessung sie liefert. Die für die gemessene Temperatur zum Vergleich beigezogene isotherme Hallkonstante wird daher wegen des negativen Temperaturkoeffizienten dieses Effektes zu groß berechnet. Ich habe diese Fehlerquelle jedoch nicht näher untersucht, da aus den Resultaten folgt, daß sie für den vorliegenden Fall kaum in Frage kommt.

Die Widerstandselektroden konnten zugleich dazu benutzt werden, um die Änderung des Widerstandes durch das Magnetfeld zu bestimmen, was insofern von Interesse war, als Hr. Gans auch für die Leitfähigkeitsänderung einen isothermen und einen adiabatischen Fall unterscheidet.

Die Messungen an der Platte mit Wismutelektroden gestalteten sich sehr viel einfacher als die im vorstehenden beschriebenen, da die Korrektionen, die durch die galvanomagnetische Temperaturdifferenz bedingt sind, in Wegfall kamen. Eine Temperaturänderung an der Stelle, wo an die Wismutelektroden Kupferdrähte angelötet waren, konnte nicht festgestellt werden.

Es ergab sich nun, daß bei Messung der Plattentemperatur mit Thermoelementen der isotherme Halleffekt stets um 3 bis 4 Proz. größer gefunden wurde als der adiabatische; wurde die Plattentemperatur durch Widerstandsbestimmung ermittelt, so erhielt ich Gleichheit der beiden Effekte auf ± 1 Proz., und zwar bei beiden Platten.

Den absoluten Wert von R habe ich nur für die dünnere Platte bestimmt für die Lage, bei der der Strom in Richtung der Längsseite floß. R fand ich für $\mathfrak{H} = 4670$ bei 18° zu $-4{,}795$ (in Wasser gemessen). Der entsprechende in Luft gemessene Wert bei 19,9° war gleich $-4{,}550$, der zugehörige Wert von $P = 3{,}70 \cdot 10^{-5}$. Die Thermokraft $\Theta = 6790$ abs. Einh., so daß der korrigierte Wert von R sich berechnet zu $-(4{,}550 + 6790 \cdot 3{,}70 \cdot 10^{-5}) = -4{,}801$; der auf gleiche Temperatur umgerechnete isotherme Wert wird gleich $-4{,}766$. Die Werte stimmen mit denen in meiner früheren Arbeit gefundenen Zahlen für Kahlbaumsches Wismut so gut überein, als man es bei der Veränderlichkeit der Effekte gerade bei Wismut erwarten kann.

Über den etwaigen Einfluß des adiabatischen bez. isothermen Falles auf die Widerstandsänderung im Felde habe ich nur einen einzigen sorgfältigen Versuch gemacht, der sich an den oben erwähnten anschloß. Es war bei der gleichen Feldstärke von 4670 Einheiten und bei 19,1°.

$\Delta w/w_0 = 0{,}1298$ in Luft und $= 0{,}1286$ in Wasser, also auch hier Gleichheit der Effekte.

Man ersieht aus diesen Versuchen, daß — wenigstens für Wismut — die Unterscheidung einer adiabatischen und einer isothermen Hallkonstante bez. Leitfähigkeitsänderung keine praktische Bedeutung hat. Für die Theorie des Hrn. Gans würde daraus folgen, daß die Größe [1]) $b = 2 \cdot T \partial \log N / \partial T$, welche die Abhängigkeit der Anzahl der freien Elektronen von der Temperatur darstellt, gleich -1 zu setzen ist, da ja die adiabatische Hallkonstante zur isothermen sich wie $(b+9):8$ verhalten soll. Es müßte also die Elektronenzahl der Größe $1/\sqrt{T}$ proportional sein.

1) R. Gans, l. c. p. 306, Gleichung (42).

Für das Verhältnis der isothermen zur adiabatischen Leitfähigkeitsänderung findet Hr. Gans den Wert[1]) 0,21/0,12 = 1,75, was mit der Beobachtung unvereinbar ist. Die Einführung von $b = -1$ in die Betrachtung des adiabatischen Falles ändert nichts an diesem Verhältnis, da bei der Ableitung der Gleichung (47) die Größe b herausfällt.

Im folgenden möchte ich noch einen Punkt in der Arbeit des Hrn. Gans besprechen, der mit dem vorstehend behandelten Gegenstand zusammenhängt. Hr. Gans kommt zu dem Schluß, daß nach seiner Theorie der Halleffekt immer von gleichem Betrage gefunden werden muß[2]), gleichviel ob er galvanometrisch oder elektrometrisch gemessen wird. Es ist wohl keine Frage, daß hiermit die elektromotorische Kraft des Halleffektes nicht etwa die Klemmenspannung an den Plattenrändern gemeint ist; das Resultat des Hrn. Gans erscheint dann durchaus plausibel.

Nun will Hr. Gans für die Drudesche Theorie die Möglichkeit gelten lassen, daß sich ein Unterschied ergibt, je nachdem man den Effekt mit einem Galvanometer oder Elektrometer mißt. Ich zitiere im folgenden Hrn. Gans wörtlich. „Nach der Drudeschen Theorie werden die in der x-Richtung sich bewegenden Elektronen infolge des Magnetfeldes seitlich abgedrängt, denn es wirkt auf sie eine Kraft $e(\mathfrak{H} v_x)$, wo v_x die Geschwindigkeitskomponente in der x-Richtung bedeutet. Diese Kraft wird kompensiert, erstens durch die infolge der Abdrängung entstehende transversale elektrische Kraft und zweitens durch die Diffusionskraft oder osmotische Kraft, die infolge des Konzentrationsgefälles $\partial N/\partial y$ auftritt. Es wäre also hier sehr wohl ein Unterschied zwischen der galvanometrisch und der elektrometrisch gemessenen Hallkonstante möglich. Bei der elektrometrisch gemessenen Hallkonstante muß nach Drude nämlich auf jeden Fall von einem zum anderen Rande ein Konzentrationsgefälle auftreten; mißt man dagegen galvanometrisch, so ist gar kein Rand im eigentlichen Sinne vorhanden, die Elektronen können in geschlossenen

1) Folgt aus Gleichung (40′) und Gleichung (47).
2) R. Gans, l. c. p. 309.

Bahnen im Transversalkreis wandern, die osmotische Kraft *fällt fort*[1]) und zwar gleichgültig, ob im Transversalkreis die Hallkraft kompensiert wird oder nicht, denn nirgends wird ein $\partial N/\partial y$ entstehen. Anders ausgedrückt: Elektrometrisch gemessen ist die Hallkraft anders, da noch eine kompensierende Kraft proportional

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{dN}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}$$

auftritt; es wird sich nach der Drudeschen Auffassung notwendig das transversale Temperaturgefälle bilden müssen; dagegen liegt bei der galvanometrisch gemessenen Hallkraft gar kein Grund zur Stauung der Elektronen vor, da überhaupt keine seitliche Bewegung bei Kompensation auftritt, und ohne Kompensation ein Abfließen in geschlossenen Bahnen möglich ist; hier wird der Vorgang also *isotherm*[1]) vor sich gehen."

Ich muß gestehen, daß mir dieser Passus nicht ganz klar geworden ist. Denn man muß doch wohl annehmen, daß die Diffusionskraft in einem gewissen Zusammenhang mit der durch Abdrängung entstehenden elektrischen Kraft steht, da ja beide durch Konzentrationsänderungen in der Platte hervorgerufen sind. Verbindet man die Plattenränder durch einen Draht, so daß ein Strom zustande kommt, so wird die elektrische Kraft durchaus nicht gleich Null, sondern es sinkt nur die Klemmenspannung an den Plattenrändern. Ebensowenig wird wohl auch die Diffusionskraft gleich Null werden, sondern nur sinken, und zwar natürlich um so mehr, je kleiner der Widerstand des Verbindungsweges ist, je mehr Elektronen abfließen können. Man könnte also geneigt sein, der Größe der Diffusionskraft eine gleiche Abhängigkeit vom äußeren Widerstand zuzuschreiben wie der Klemmenspannung.

Von diesem Gesichtspunkte aus kann man gar nicht erwarten, daß die Versuche des Hrn. Gans, die Frage zu entscheiden, ein positives Ergebnis liefern können. Denn wenn man eine Elektrizitätsquelle von so kleinem innerem Widerstand wie sie eine Wismutplatte im Magnetfeld darstellt, durch einen Widerstand von 70 oder auch 35 Ohm schließt, wie

1) Von mir ausgezeichnet.

dies Hr. Gans tat, so wird man die Klemmenspannung immer noch gleich der elektromotorischen Kraft messen. Das ist es, was man aus dem Versuch, den Hr. Gans auf p. 314 beschrieben hat, schließen muß, nicht aber, daß sich daselbst keine Elektronen gestaut hätten. Ebensowenig ist natürlich ein Unterschied der elektromotorischen Kraft des Halleffektes zu erwarten, wenn man dieselbe durch Ausschlag eines Galvanometers von 70 Ohm oder mit dem Elektrometer bez. durch Kompensation mißt. Hr. Gans hat ja allerdings Unterschiede gefunden, denen er jedoch selbst wenig Wert beilegt; die elektromotorischen Messungen erforderten nämlich einen etwa 5 mal so starken Primärstrom als die galvanometrischen, wodurch die Plattentemperatur eine höhere wurde. Leider hat es Hr. Gans unterlassen, sein Galvanometer durch einen geeigneten Nebenschluß so unempfindlich zu machen, daß er es bei der gleichen Primärstromstärke hätte verwenden können.

Es wäre, wenn man von der Drudeschen Auffassung ausgeht, immerhin denkbar, daß sich bei genügend kleinem äußerem Widerstande eine Änderung der elektromotorischen Kraft ergäbe, wenn man annimmt, daß die Diffusionskraft in anderer Weise vom äußeren Widerstande abhängt wie die Klemmenspannung. Um hierüber Aufschluß zu gewinnen, habe ich bei einer früheren Gelegenheit den Halleffekt in Tellur einmal mit einem Galvanometer von 1000 Ohm, dann mit dem schon erwähnten Galvanometer von 7,75 Ohm innerem Widerstand gemessen. Dem letzteren wurden noch 9,9 Ohm vorgeschaltet und dem ganzen Komplex 0,1 Ohm parallel, so daß es ein Galvanometer von 0,0995 Ohm darstellte mit einer Empfindlichkeit von etwa $6{,}4 \cdot 10^{-7}$ Amp. pro Skalenteil. Vor jedem Versuch wurde das Verhältnis der Galvanometerempfindlichkeiten genau bestimmt.

Als Hallelektroden in die 0,15 cm dicke, 1,40 cm breite und 3,65 cm lange Tellurplatte waren $^1/_2$ cm lange, 0,1 cm starke Platindrähte eingeschmolzen, an welche dicke Leitungsschnüre angesetzt waren. Der Widerstand der Platte und Zuleitungen für den Hallstrom schwankte bei verschiedenen Versuchen zwischen 0,630 und 0,639 Ohm. Die Platte befand sich in einem Petroleumbade, der Primärstrom betrug im

Maximum etwa 10 Milliamp. Als Resultat zweier besonders zuverlässiger Messungsreihen ergab sich Gleichheit der mit beiden Galvanometern gefundenen Resultate; es wurde die elektromotorische Kraft bestimmt

	Mit 4,10 Milliamp.	Mit 10,50 Milliamp. Primärstrom
für das Galv. von 0,1 Ohm	= 27,94 Mikrovolt	= 57,10 Mikrovolt
„ „ „ „ 1000 „	= 28,36 „	= 56,76 „

Die Feldstärke war bei beiden Versuchen nicht genau identisch; eine Eichung des Magneten für den verwendeten Polabstand hatte nicht stattgefunden. Der Koeffizient R für das verwendete Tellur — von E. Merck bezogen — ist nach lange zurückliegenden, nicht veröffentlichten Messungen ca. $= +500$.

Hiernach scheint auch für einen kleinen äußeren Widerstand die Diffusionskraft, wenn man eine solche annehmen will, sich genau wie bei einem Element die Klemmenspannung zu verhalten. Eine direkte Methode, dies zu prüfen, ergibt sich vielleicht aus folgendem. Nach der Drudeschen Auffassung ist ein Konzentrationsgefälle notwendigerweise mit einem Temperaturgefälle verbunden, d. h. die galvanomagnetische Temperaturdifferenz ist durch das Konzentrationsgefälle bedingt. Man müßte also erwarten, daß eine Änderung der Klemmenspannung, bei der ja wohl auch das Konzentrationsgefälle geändert wird, von Einfluß auf die Größe der Temperaturdifferenz wäre: mit anderen Worten, letztere müßte abnehmen, wenn man die Plattenränder durch eine Leitung von genügend kleinem Widerstand — im Verhältnis zum Plattenwiderstand — verbindet. Ein Versuch, den ich früher einmal in dieser Richtung mit einer Wismutplatte anstellte, lieferte ein negatives Ergebnis, doch glaube ich jetzt, daß ich damals nicht genügend darauf geachtet habe, den äußeren Widerstand im Vergleich zum inneren hinreichend klein zu machen. Als Hauptfehlerquelle bei diesen Messungen käme wohl der Umstand in Betracht, daß durch die Verbindung ein Nebenschluß für den Primärstrom bewirkt werden kann, der den Strom in der Platte selbst schwächt. Leider fehlt mir augenblicklich die Gelegenheit, diesen Versuch sorgfältig zu wiederholen.

Ich möchte übrigens darauf hinweisen, daß ein etwaiges positives Ergebnis eines solchen Versuches durchaus nicht beweisend für das *Bestehen* einer Diffusionskraft im Sinne der Drudeschen Theorie wäre, sondern nur, wenn man eine solche annehmen will, entscheidend für ihr Verhalten. Eine Abhängigkeit der Temperaturdifferenz von dem Zustandekommen des Hallstromes ließe sich z. B. auch vom Standpunkte der Rieckeschen Theorie durch mit der Temperatur variable molekulare Geschwindigkeiten der Elektronen erklären.

Berlin, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 29. März 1907.)

8. *Über den Durchgang elektrischer Wellen durch nicht-metallische Gitter;* *von Max Laugwitz.*

Den Durchgang elektrischer Wellen durch Gitter hat man vielfach untersucht, denn abgesehen von der bequemen Demonstration der Transversalität der elektrischen Wellen, stellt das Hertzsche Drahtgitter in gewisser Hinsicht auch das Analogon dar zum Turmalin. Ein besonderes Interesse besaß das Hertzsche Gitter lange Zeit dadurch, daß man keine Gitter kannte, welche das sichtbare Licht in derselben Weise polarisierten, wie es das Hertzsche Gitter mit den Hertzschen Wellen tut. Ja, es schien auch wenig aussichtsreich zu sein, künstlich solche Gitter herzustellen, da man diese Erscheinungen ja erst erwarten durfte bei Gittern, deren Gitterkonstante klein ist gegenüber der Wellenlänge des angewandten Lichtes. In jüngster Zeit scheint jedoch die Überwindung dieser enormen technischen Schwierigkeit F. Braun[1]) gelungen zu sein. Braun zerstäubte durch Entladung einer Batterie Leidener Flaschen ganz dünne Platindrähte und erhielt hierdurch auf Glasplatten einen metallischen Niederschlag von gitterartiger Struktur. Braun wies nun nach, daß Licht nur schwach durch diese Platten hindurchgeht, falls der Vektor der elektrischen Kraft parallel den Streifen ist, daß dagegen die Transmission viel stärker ist, falls er senkrecht zu ihnen steht.

Bei all diesen Untersuchungen aber, auch bei denen von Braun, ist die Polarisationswirkung lediglich eine Folge der großen Leitfähigkeit der die Struktur bildenden Gitterelemente gegenüber dem umgebenden Medium. Auch die Theorie zeigt, daß für das Zustandekommen der bekannten Gitterwirkung die große Leitfähigkeit *ausreichend* ist. Gerade das analoge Verhalten des Turmalins aber — der doch ein Nichtleiter ist — legte es nahe zu untersuchen, ob diese Bedingung — der großen Leitfähigkeit — auch eine *notwendige*

1) F. Braun, Ann. d. Phys. 16. p. 1. 1905.

sei, oder ob man auch auf andere Weise Polarisationswirkung erhalten könne. Ich baute daher auf Veranlassung von Hrn. Privatdozenten Dr. Schaefer ein Gitter, dessen Stäbe aus dielektrischem Material — und zwar zunächst aus Wasser — bestanden. Auf etwaige Bedenken wegen der Leitfähigkeit des Wassers wird im zweiten Teil der Arbeit genauer eingegangen werden, bei einem ersten Versuch indessen konnten dieselben wohl unberücksichtigt bleiben.

I. Versuchsanordnung.

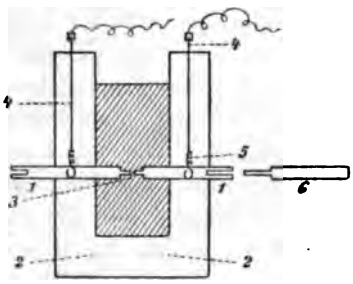
1. **Erreger.** Zur Erzeugung der elektrischen Wellen diente ein Erreger, der in folgender Weise konstruiert war. Er bestand aus zwei gleichlangen, horizontalen Messingstiften, die fest in einen hohlen Hartgummizylinder eingeschraubt waren. Der Funke sprang in Petroleum über, welches sich im Hohlraum des Zylinders befand. An der Funkenstrecke zwischen den beiden Messingstäben befand sich je ein kurzer, etwa 1—2 mm langer Stift aus Aluminium [1]) von ca. 1 mm Stärke. Man konnte infolge dieser Einrichtung die Funkenstrecke viel kleiner und damit auch den Widerstand und die Dämpfung geringer machen, wodurch die Eigenperiode des Erregers schärfer ausgeprägt wird. Auch die Justierung der Funkenstrecke konnte man jetzt genauer vornehmen; bei Kuppen, Kugeln etc. nutzen sich die einzelnen Stellen ungleichmäßig ab, der Funke springt bald an dieser, bald an jener Stelle über, wodurch der Wert jeder feineren Einstellung oft illusorisch gemacht wird.

Da die Zuleitung zum Hertzschen Sender womöglich an der Funkenstrecke erfolgen soll, so waren feste Messingstäbe senkrecht zu dem eigentlichen Erreger, und zwar vertikal, in den Kautschukzylinder eingebohrt; diese waren ursprünglich fest an die horizontalen Zylinder angedrückt, um unkontrollierbare Funkenbildung zu vermeiden. Es zeigte sich aber, daß infolge dieses starken Andrückens bald das Gewinde im Kautschuk undicht wurde. Da aber wegen der Petroleum-

1) Aluminium wurde aus dem Grunde gewählt, weil die Vorversuche ergeben hatten, daß es sich noch bedeutend weniger abnutzt wie das von Himstedt empfohlene Zink; eine Platin–Iridiumlegierung sowie Platin selbst erwiesen sich als ungeeignet.

füllung der Dichtung besondere Rechnung getragen werden mußte, so wurde der oben beschriebene Zuleitungsdraht nicht direkt mit dem Staboszillator, sondern vermittelst einer dünnen Spiralfeder verbunden. Hierdurch vermied man jenen starken Druck und das Gewinde blieb selbst nach wiederholten Schraubenregulierungen dicht. Die vertikalen Zuleitungsdrähte waren von *oben* in den Kautschuk gebohrt, so daß durch ihre Bohrungen Petroleum nicht abfließen konnte.

Durch Steckkontakte an die horizontalen Metallzylinder kann man in der bekannten Weise die Wellenlänge des Senders variieren und sich somit einen ganzen Wellenbereich herstellen. In vorliegender Arbeit handelt es sich um Wellen von 6—20 cm Länge.



1 Metallischer Staboszillator.
2 Kautschukzylinder, innen Petroleum.
3 Aluminiumstifte.
4 Die vertikalen festen Zuleitungsdrähte.
5 Metallische Spiralfeder.
6 Steckkontakt.

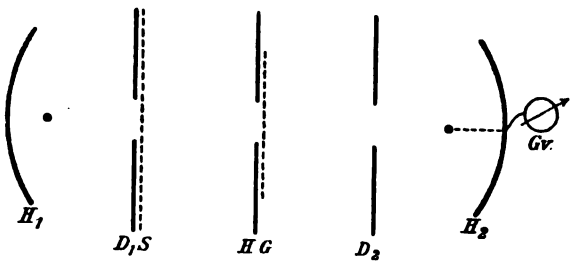
Fig. 1.

Dieser Erreger befand sich im Brennpunkt eines Hohlspiegels, dem gegenüber sich ein zweiter Hohlspiegel in ungefähr 250 cm Entfernung befand.

2. **Thermoelement.** Im Brennpunkt dieses zweiten Spiegels war ein Klemenčičsches Thermoelement angebracht als Meßapparat für die Intensität der elektrischen Wellen. Sender und Empfänger waren aufeinander abgestimmt.

3. **Diaphragmen.** Um vor etwaigen seitlichen Strahlen geschützt zu sein und um möglichst mit Zentralstrahlen zu arbeiten, waren noch zwei große Metallschirme mit je einer Öffnung von 24×32 cm eingeschaltet. In einem Abstande von je 50 cm zwischen diesen Diaphragmen befand sich ein Holz-

gestell, an welches die zu untersuchenden Gitter aufgehängt wurden. Den Aufbau zeigt Fig. 2.



H_1 Hohlspiegel, in seinem Brennpunkte der Sender.
H_2 Hohlspiegel, im Brennpunkte das Thermoelement.
D_1, D_2 Metalldiaphragmen.
S Drahtgitter zum Schutz.
H Holzgestell.
Gv Galvanometer.
G Das zu untersuchende Gitter.

Fig. 2.

4. **Galvanometer.** Das Thermoelement war an ein äußerst empfindliches Du Bois-Rubenssches Kugelpanzergalvanometer angeschlossen[1]), welches durch drei Panzer geschützt war. Es befand sich in der Juliusschen Aufhängung.

Die Zuleitungsdrähte vom Thermoelement zum Galvanometer waren zum Schutze gegen diffuse Strahlung mit Stanniol umhüllt, das leitend mit der Erde verbunden wurde.

5. **Gitter.** Um nun ein Gitter zu erhalten, bei dem die Metalldrähte durch Wasserfäden ersetzt wären, stellte ich mir zunächst ein Gitter aus Glasröhren her, die mit Wasser gefüllt waren. Die Länge jeder Röhre betrug 48 cm, ihre Lichtweite 0,4 cm und ihr gegenseitiger axialer Abstand 1 cm. 48 Röhren waren in dieser Weise in einem Holzrahmen eingespannt.

6. **Beobachtungsmethode.** Die Beobachtung geschah in der Weise, daß man zunächst die freie Strahlung maß, dann das Gitter einschob und feststellte, welcher Bruchteil der Gesamtstrahlung durch das Gitter zurückgehalten wurde. Natürlich machte man eine alternierende Reihe von Beobachtungen.

1) Die halbe Schwingungsdauer betrug 8 Sek. bei dem schweren Magnetsystem.

7. **Ergebnis der Beobachtung.** Waren die Gitterstäbe vertikal, also senkrecht zum elektrischen Vektor, so ging die gesamte auffallende Energie ungeschwächt durch das Gitter hindurch. Drehte man dagegen das Gitter um 90° in seiner Ebene, so daß die Gitterstäbe horizontal standen, so ließ es fast nichts von der auffallenden Strahlung hindurch. Das Wassergitter zeigte also dasselbe Verhalten wie ein Gitter aus Metalldrähten.[1]) Dieses Ergebnis hat gewisse Berührungspunkte mit einer Arbeit von F. Braun[2]), in der *Doppelbrechung* bei Körpern nachgewiesen wird, die aus *isotropem* Material geschichtet sind. Braun gibt dort auch den von mir beschrittenen Weg der mit Wasser gefüllten Glasröhren an, ohne ihn indessen auszuführen. Meine Versuche aber sind völlig unabhängig von denen Brauns, da mir seine Arbeit erst später bekannt wurde und meine Beobachtungen an diesem Wassergitter beim Erscheinen der Braunschen Arbeit bereits abgeschlossen waren.

Ehe wir indessen näher auf die Wirkung dieses Wassergitters eingehen, ist es notwendig, nachzuweisen, daß diese polarisierende Wirkung des Gitters tatsächlich dem *Wasser* und nicht etwa den Glasröhren zukommt. Zu dem Zwecke untersuchte ich ein ganz konformes Gitter, das aber leer war. Es zeigte sich indessen ohne merkbaren Einfluß auf die elektromagnetischen Wellen; es ließ in jeder Stellung, jedem Inzidenzazimut, so gut wie alles hindurch. Zu berücksichtigen ist hierbei, daß die Röhren sehr dünnwandig waren. Damit war bewiesen, daß die Polarisationswirkung dem in den Röhren befindlichen, in Stabform angeordneten Wasser zugeschrieben werden muß.

8. **Problemstellung.** *Es handelte sich nun darum, festzustellen, welcher physikalischen Größe des Wassers diese polarisierende Wirkung zuzuschreiben ist.* Das Verhalten eines Körpers einer elektromagnetischen Strahlung gegenüber ist nach der ursprünglichen Maxwellschen Theorie durch drei Körper-

1) Die Reflexionsversuche sind nicht so genau, weshalb ich sie hier auch nicht näher beschreibe. Es ergab sich aber auch für die Reflexion ein übereinstimmendes Verhalten mit dem Hertzschen Gitter, also starke Reflexion, falls die Röhren parallel dem elektrischen Vektor sind.

2) F. Braun, Phys. Zeitschr. 5. p. 199. 1904.

konstante charakterisiert, durch seine Leitfähigkeit σ, seine Permeabilität μ und seine Dielektrizitätskonstante (D.K.) ε. Bei allen Metallen ist nun der Einfluß der D.K. gegen den der Leitfähigkeit zu vernachlässigen; da ferner die Permeabilität, außer bei den ferromagnetischen Substanzen, durchweg gleich 1 gesetzt werden kann, so unterscheiden sich somit alle Metalle lediglich durch ihre Leitfähigkeit voneinander und vom Äther. Dieser eine Unterschied genügt aber auch, um ihr Verhalten gegen elektrische Wellen zu erklären.

Aus unseren Versuchen ergibt sich nun, daß das Wassergitter insbesondere auch in bezug auf die Durchlässigkeit sich genau so verhält wie ein Hertzsches Drahtgitter. Es liegt daher nahe, die oben beschriebenen Erscheinungen auf Rechnung der Leitfähigkeit des Wassers zu setzen. Es ist nun ein wesentlicher Teil der folgenden Untersuchung zu zeigen, daß die Leitfähigkeit des Wassers nicht in Betracht kommt, sondern daß der überwiegende Einfluß der hohen D.K. des Wassers zuzuschreiben ist. Zunächst führt zu diesem Resultat eine einfache Berechnung des Verhältnisses von Leitungs- zu Verschiebungsstrom; ferner ergibt es sich aus dem speziellen Verhalten von kurzen Wasserfäden, die man nach Art metallischer Resonatorengitter zu einem Gitter angeordnet hat; drittens kann man sich durch einen Vergleich des Wassergitters mit Gittern aus anderen Substanzen überzeugen, daß die Leitfähigkeit eine untergeordnete Rolle spielen muß, wenn nämlich diese Substanzen ebenfalls eine hohe D.K., aber so gut wie gar keine Leitfähigkeit besitzen und doch denselben Effekt zeigen.

Ich habe im folgenden Teil meiner Arbeit alle drei Beweise geführt, weil sich zeigen wird, daß keiner von ihnen ganz überflüssig ist, hauptsächlich aber, weil einige weitere Fragen sich systematisch anschließen und erledigen lassen.

II. Beweisführung.

Bedeutet $\mathfrak{E}$ den elektrischen Vektor, so ist die Größe des Verschiebungsstromes

$$J = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

und die des Leitungsstromes:

$$J' = \sigma \mathfrak{E}.$$

J und $\mathfrak{E}$, sowie die Leitfähigkeit σ seien elektrostatisch gemessen. $\mathfrak{E}$ kann gesetzt werden gleich

$$e^{2\pi i\left(\frac{t}{T}-\delta\right)},$$

wo T die Schwingungsdauer und δ die Phasenkonstante bedeutet. Führt man noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c und die Wellenlänge λ ein, so wird

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 2\pi i \frac{c}{\lambda} \cdot \mathfrak{E},$$

und daher das Verhältnis der beiden Stromstärken (absolut genommen):

$$|J/J'| = \left|\frac{\varepsilon c}{2\lambda\sigma}\right|.$$

Das heißt, das Verhältnis von Verschiebungs- zu Leitungsstrom ist unabhängig von der Feldintensität und bei demselben Körper umgekehrt proportional der Wellenlänge. Bei verschiedenen Körpern und konstanter Wellenlänge ist es proportional der D.K. und umgekehrt proportional der Leitfähigkeit.

Aus obiger Formel ergibt sich folgende Tabelle für $\lambda = 3$ cm.

	σ	$2\lambda\sigma$	J/J'
Cu	$5{,}4 \cdot 10^{17}$	$3{,}2 \cdot 10^{18}$	10^{-8}
Hg	$9{,}4 \cdot 10^{15}$	$6 \cdot 10^{16}$	$5 \cdot 10^{-6}$
H_2SO_4	$6{,}3 \cdot 10^{11}$	$3{,}8 \cdot 10^{12}$	$6{,}4 \cdot 10^{-1}$
H_2O	$9 \cdot 10^{5}$	$5{,}4 \cdot 10^{6}$	$4{,}5 \cdot 10^{+5}$

Aus dieser Tabelle folgt, daß bei allen Metallen, auch bei den am schlechtesten leitenden, der Verschiebungsstrom vollständig vernachlässigt werden kann, daß er bei den gut leitenden Elektrolyten sehr wohl Einfluß haben kann, daß hingegen Wasser sich wie ein Nichtleiter verhalten muß, bei ihm also der *Leitungs*strom zu vernachlässigen ist. *Mithin ergibt sich auch, daß die Leitfähigkeit nicht die Ursache für die oben beschriebenen Erscheinungen des Wassergitters sein kann.*

Durch die obigen Ausführungen ist *rechnerisch* festgestellt, daß beim Wassergitter die Leitfähigkeit keine Rolle mehr spielt, sobald es sich um Hertzsche Wellen handelt. Es soll

im folgenden diese theoretische Überlegung auch *experimentell* bestätigt werden; außerdem soll festgestellt werden, ob die gut leitenden Elektrolyte in der Tat noch für solch schnelle Schwingungen als Leiter zu betrachten sind, wie es nach der Rechnung zu erwarten steht.

Zu diesem Zweck erinnere ich an einige Tatsachen der elektrischen Resonanz. Ordnet man eine Anzahl gleichlanger Metalldrähte parallel zueinander in einer Ebene an, so erhält man ein sogenanntes Resonatorengitter. Bringt man ein solches Gitter in den Strahlengang, so werden die einzelnen Resonatoren mehr oder weniger gut zu Schwingungen angeregt, je nachdem das Gitter auf die ankommende Welle abgestimmt ist oder nicht. Schaltet man ein Resonatorengitter zwischen Sender und Empfänger, so haben die Arbeiten von Garbasso, Aschkinass und Cl. Schaefer ergeben, daß, um so weniger Energie an den Empfänger gelangt, je besser das Gitter in Resonanz steht mit dem Empfänger. Im Falle der Resonanz besitzt also die durchgelassene Strahlung ein Minimum, aber die reflektierte ein Maximum, und die Summe von reflektierter und transmittierter Strahlung ist ihrer Größe nach gleich der gesamten auffallenden Strahlung. Kennt man daher bei einem Gitter das Reflexionsvermögen, so weiß man sofort, wieviel von der gesamten Strahlung hindurchgeht; es genügt somit die Kenntnis einer dieser beiden Größen. Hervorzuheben ist aber ganz besonders, daß ein Resonatorengitter auf eine ganz bestimmte Wellenlänge am besten anspricht. Mißt man daher die durch ein Gitter transmittierte Energie, so erhält man bei den verschiedenen Wellenlängen verschiedene Werte und im Falle der Resonanz den kleinsten Wert.

Diese selektiven Eigenschaften der Resonatorengitter sind nun bei metallischen Leitern so scharf ausgeprägt, daß sie zu quantitativen Messungen verwendet werden können, so z. B. zur Bestimmung der D.K. von Flüssigkeiten[1]), und die auf diese Weise gefundenen Werte stimmen mit denen anderer Methoden vorzüglich überein.

Im folgenden wird untersucht, wie sich eine Anzahl ebenso angeordneter Wasserfäden einem elektrischen Wellenzuge gegen-

1) E. Aschkinass u. Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 5. p. 489. 1901.

über verhält. Es ist unmittelbar klar, daß diese Gitter ebenfalls die Erscheinungen der Resonanz zeigen müßten, falls die Leitfähigkeit einen überwiegenden Einfluß besäße, denn die Resonanz ist eine *notwendige* Folge der Leitfähigkeit. Wenn dagegen bei unserem Wassergitter diese Resonanzerscheinungen *fehlen*, so ist damit auch experimentell bewiesen, daß eine etwa vorhandene Leitfähigkeit keine Rolle spielt, daß daher auch die Polarisationserscheinungen bei dem ursprünglichen Gitter nicht auf dessen Leitfähigkeit beruhen.

Einige weitere Versuche schließen sich unmittelbar hieran an; es war oben gezeigt, daß bei gut leitenden Elektrolyten der Leitungsstrom auch noch bei Hertzschen Wellen in Betracht komme; bei Gittern aus H_2SO_4 also müssen demzufolge „Resonanzerscheinungen" erwartet werden.

Angeregt durch eine inzwischen von Aschkinass[1]) veröffentlichte Arbeit über das Reflexionsvermögen der Kohle, stellte ich mir als dritte Aufgabe, zu untersuchen, ob gut leitende Kohle (Retortenkohle, wie sie bei Bogenlampen verwendet wird), auch Resonanzerscheinungen zeigt oder nicht. Aschkinass hat unter anderem dort gezeigt, daß man auch aus Kohlestäben, z. B. aus Graphitbleistiften, Polarisationsgitter herstellen kann, und hat umgekehrt aus der Gitterwirkung auf große Leitfähigkeit schließen zu können geglaubt. Indessen ist dieser Schluß im allgemeinen nicht zulässig, wie meine Beobachtungen am Wassergitter zeigen. In der betreffenden Arbeit von Aschkinass spielt dies allerdings keine Rolle, weil seine Ausführungen in anderer Weise vollständig sichergestellt sind.

Es soll also jetzt festgestellt werden, ob Gitter aus nichtmetallischen Leitern, ferner aus gut leitenden Elektrolyten und aus schlecht leitenden Elektrolyten Resonanzerscheinungen zeigen oder nicht. Als Vertreter dieser drei Kategorien wählte ich Kohle, bestleitende Schwefelsäure und Wasser.

Zur Entscheidung obiger Frage baute ich drei Gitter, die in ihren Dimensionen übereinstimmten, von denen das erste aus Kohle, das zweite aus Schwefelsäure und das dritte aus Wasser bestand. Bei diesen Gittern waren die einzelnen

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 18. p. 373. 1905.

Stäbe von derselben Größenordnung wie die Wellenlänge; da wir in diesem Falle bei metallischen Stäben Resonanzerscheinungen erhalten, so will ich der Einfachheit halber und im Gegensatz zum ursprünglichen „Polarisations"-Gitter diese drei Gitter kurz als „Resonatorengitter" bezeichnen. Dabei soll selbstverständlich die Frage etwaiger Resonanz noch völlig offen gelassen werden.

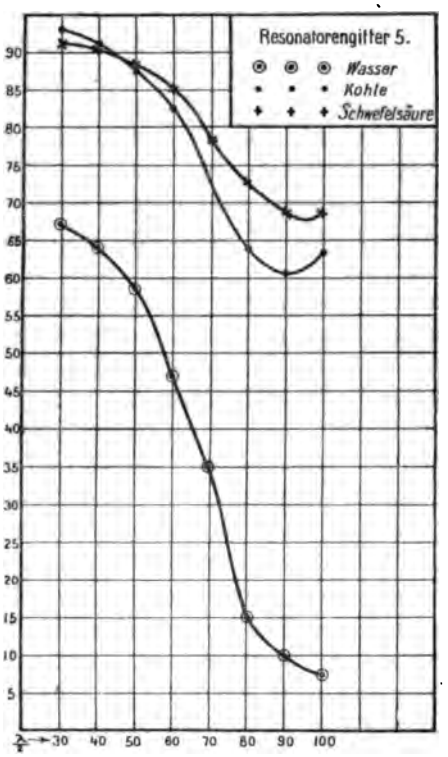


Fig. 3.

An jedem Gitter waren 69 Stäbe angebracht, und zwar in drei Vertikalreihen zu je 23. Die Länge der einzelnen Stäbe betrug *5 cm*, ihr gegenseitiger Abstand in vertikaler und horizontaler Richtung je 10 mm. Nennen wir den Bruchteil, um welchen die Gesamtenergie am Empfänger vermindert wird durch Einschalten des Gitters, die „Undurchlässigkeit" des be-

treffenden Gitters [1]), so müßten sich Extremwerte der Undurchlässigkeit ergeben, falls Resonanz vorhanden ist. Einem Minimum der Undurchlässigkeit würde alsdann Dissonanz und einem Maximum die größte Resonanz zwischen Gitter und Sender entsprechen. Ein einziger derartiger Extremwert wäre also entscheidend.

Zeichnet man die Wellenlänge als Abszisse und die „Undurchlässigkeit" als Ordinate auf, so ergibt sich zunächst für dieses Gitter, daß sämtliche Kurven mit wachsender Wellenlänge fallen. Gleichzeitig aber ersieht man, daß die Kohle ein deutliches Minimum etwa bei $\frac{1}{2}\lambda = 9$ cm besitzt — die Oszillatorlänge gleich 2λ gesetzt —, für Schwefelsäure ist es nicht gut genug ausgeprägt, um bindende Schlüsse hieraus ziehen zu können. Dagegen fällt beim Wasser die Kurve beständig ab, ohne irgend ein Maximum oder Minimum auch nur anzudeuten.

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich unmittelbar, daß Kohle Resonanzerscheinungen zeigt, sich im wesentlichen also wie ein Metall verhält. Daß das Minimum nicht so scharf ausgeprägt ist wie bei den Metallen, hat seinen Grund in der geringeren Leitfähigkeit und der notwendig damit verbundenen größeren Dämpfung. Daß die Kurve kein Maximum besitzt, liegt an der etwas dichten Anordnung der Gitterstäbe, wodurch sich das Maximum meistens stark nach kleinen Wellen verschiebt. [2])

Diese drei Gitter liefern also für Wasser und H_2SO_4 noch keine Entscheidung der aufgeworfenen Frage. Nur so viel geht aus den Versuchen hervor: *Wenn* ein Maximum vorhanden sein sollte, so muß es stark nach links verschoben sein. Um dieses eventuelle Maximum zu erhalten, mußte man zu Gittern mit längeren Stäben übergehen.

Zu diesem Zwecke baute ich wiederum drei in ihren Dimensionen übereinstimmende Gitter; die Stäbe waren bei ihnen in einer Vertikalreihe angeordnet und die Länge jedes einzelnen Stabes betrug *15 cm* und ihr gegenseitiger Abstand 3 cm.

Die hiermit gemessenen Kurven zeigen nun für *Schwefelsäure*, daß mit wachsender Wellenlänge die Undurchlässigkeit

1) Ohne Rücksicht darauf, wodurch diese Verringerung der Intensität verursacht wird.

2) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. **16**. p. 106. 1905.

des Gitters im Anfang größer wird, bis sie etwa bei 9 cm ihr Maximum erreicht. Auf die Lage dieses Maximums will ich nicht näher eingehen, da der Verlauf der Kurve wiederum ziemlich flach ist. Wichtig aber ist, daß die Kurve überhaupt einen anderen Verlauf zeigt wie bei 5 cm langen Stäben, da sie nämlich jetzt in dem Wellenbereich von $\lambda/2 = 30$ bis $\lambda/2 = 90$ mm *steigt*, während sie vorher andauernd fiel. Aus

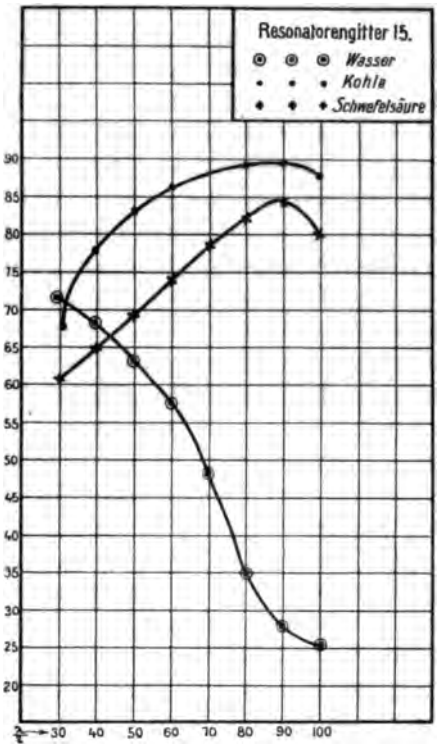


Fig. 4.

diesem Umstande allein würde schon mit Notwendigkeit folgen, daß Schwefelsäure Resonanzerscheinungen besitzt.

Die Kurven für die Undurchlässigkeit des Wassergitters zeigt dagegen denselben typischen Verlauf wie bei 5 cm langen Stäben; sie fällt mit wachsender Wellenlänge beständig ab, ohne irgend ein Maximum oder Minimum aufzuweisen. Wenn also das Wassergitter überhaupt ein Maximum besitzt, so müßte es

sich so weit verschoben haben, daß es bei $\lambda/2 < 3$ cm liegt. Dies ist aber nicht anzunehmen, denn auch bei einem Gitter aus 20 cm langen Stäben ergibt sich dasselbe typische Verhalten, ebenso bei dem ursprünglichen Polarisationsgitter, dessen Stäbe 48 cm lang sind.

In gleicher Weise wurden auch noch drei Gitter mit je 10 und 20 cm langen Stäben untersucht, die aber weitere charakteristische Eigentümlichkeiten nicht aufzuweisen hatten und deren Kurven ich daher nicht zeichne.

Wir sehen aus den Versuchen, daß die Undurchlässigkeit der Wassergitter im Gebiete der Hertzschen Wellen, soweit es hier untersucht wurde, für kleine Wellen am größten ist und daß die „Resonatorengitter" aus Wasser *keine* Resonanz zeigen. Wenden wir dies auf das ursprüngliche Polarisationsgitter aus Wasser an, so ergeben die mitgeteilten Untersuchungen in Übereinstimmung mit der Theorie, daß die Polarisationswirkung nicht auf die Leitfähigkeit des Wassers zurückgeführt werden darf. Falls man also die Erscheinung überhaupt durch die reine Maxwellsche Theorie erklären kann, kann nur noch die *Dielektrizitätskonstante* in Frage kommen.

Endlich suchte ich auf *direktem* Wege nachzuweisen, daß die polarisierende Wirkung des ursprünglichen Wassergitters auf der *hohen D.K.* beruht. Hierzu wählte ich Substanzen, die ebenfalls eine hohe D.K., aber verschwindend geringe Leitfähigkeit haben; zu ihnen gehört u. a. Aceton, dessen $\varepsilon = 21$ ist und Nitrobenzol mit $\varepsilon = 36$. Namentlich dieses letztere ist praktisch als Nichtleiter zu betrachten. Ich füllte nun mit diesen Substanzen je ein Gitter, das in seinen Dimensionen genau mit dem ursprünglichen „Polarisationsgitter" aus Wasser übereinstimmte. Auch die Messungen wurden in genau derselben Weise wie dort vorgenommen; man bestimmte also durch alternierende Beobachtungen die „Undurchlässigkeit" jedes Gitters in Prozenten der auffallenden Energie.

Die Versuche ergaben, daß bei beiden Gittern eine sehr deutliche Polarisation auftritt, d. h. daß die Undurchlässigkeit eines Gitters nach verschiedenen Richtungen eine ganz verschiedene ist. Nur wurde hier nicht alle Energie beim Durchgange durch das Gitter aufgehalten, wenn die Gitterstäbe

horizontal standen, sondern nur ein beträchtlicher Bruchteil. Dieser Bruchteil betrug beim Aceton 25 Proz.; beim Nitrobenzol dagegen war der Effekt bedeutend größer, wie infolge der größeren D.K. auch zu erwarten stand, es ergaben sich bei ihm 65 Proz. Stellte man die Gitterstäbe dagegen vertikal, also senkrecht zum elektrischen Vektor, so betrug die Undurchlässigkeit 3 bez. 6 Proz., d. h. es wurde ungefähr die ganze Energie durchgelassen.

Damit ist unzweideutig die Abhängigkeit der Polarisationswirkung von der D.K. gezeigt; denn die Leitfähigkeit ist sowohl beim Aceton wie beim Nitrobenzol sehr gering, bei ersterem aber größer als beim letzteren. *Würde die Leitfähigkeit eine Rolle spielen, so müßte* nach den obigen Ausführungen *die „Undurchlässigkeit" des Acetongitters größer sein als die des Nitrobenzolgitters*, das Gegenteil ist der Fall.

Je größer aber die D.K. eines Nichtleiters ist, um so mehr muß er reflektieren. Je größer aber sein Reflexionsvermögen ist, um so weniger Energie geht hindurch, um so größer ist seine „Undurchlässigkeit". Vergleicht man nach dieser Richtung hin das Wasser-, Nitrobenzol- und Acetongitter, so ist der Gang der Undurchlässigkeit tatsächlich der Größe der D.K. entsprechend.

Daß sich nicht die Zahlenwerte ergeben wie nach der gewöhnlichen Reflexionsformel, liegt natürlich daran, daß diese Formel für kontinuierliche Flächen gilt; die Ebene unseres Gitters ist aber nur zum Teil durch die betreffenden Dielektrika ausgefüllt.

Resultate.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind folgende:

1. Es ist ein Polarisationsgitter für Hertzsche Wellen konstruiert und nachgewiesen worden, daß seine Wirkung im Gegensatz zum Hertzschen Drahtgitter nicht auf der Leitfähigkeit, sondern auf der hohen D.K. beruht.

2. Dieses Gitter ist gleichfalls ein Analogon zu den dichroitischen Kristallen, besitzt aber als solches m. E. insofern größere Bedeutung als das Hertzsche Drahtgitter, weil letzteres nur äußerlich dieselben Erscheinungen aufweist, während die Ursachen für das Zustandekommen der Erscheinungen sicher ganz andere sind wie bei den dichroitischen Kristallen.

3. Es ist zum erstenmal der experimentelle Beweis erbracht, daß auch gut leitende Elektrolyte im Gebiete der Hertzschen Wellen Resonanzerscheinungen zeigen; das gleiche gilt von Kohle.

4. Gleichzeitig ist im Prinzip eine neue Methode zur Bestimmung der D.K. gegeben, indem man die Schutzwirkung eines Gitters, bez. einer einzelnen Röhre bestimmt, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist.

Zum Schlusse habe ich noch die angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Lummer für das wohlwollende Interesse meinen verbindlichsten Dank auszusprechen, ebenso Hrn. Privatdozenten Dr. Schaefer, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gegeben und mich während ihrer Ausführung durch mehrfache Ratschläge unterstützt hat.

Breslau, Physik. Institut d. Universität, im Dez. 1906.

(Eingegangen 7. April 1907.)

9. *Über die Wirkung dielektrischer Zylinder auf elektrische Wellen;* *von Clemens Schaefer.*

Durch die Versuche des Hrn. Laugwitz[1]), die auf meine Veranlassung hin unternommen wurden, ist gezeigt worden, daß Gitter aus dielektrischen zylindrischen Stäben — in der genannten Arbeit waren es dünnwandige, mit Wasser, Aceton, Nitrobenzol gefüllte Glasröhren — sich elektrischen Wellen gegenüber ähnlich verhalten wie Hertzsche Gitter.

Wenn nämlich der Abstand zwischen zwei Gitterstäben klein gegen die Wellenlänge ist, so lassen diese dielektrischen Gitter fast die gesamte auffallende Energie hindurch, falls der elektrische Vektor senkrecht zur Richtung der Stäbe orientiert ist; dagegen wird fast *nichts* hindurchgelassen, sondern fast alles reflektiert, wenn die beiden Richtungen übereinstimmen. Hr. Laugwitz hat des ferneren den Nachweis erbracht, daß diese Schirmwirkung *nicht*, wie man vielleicht vermuten könnte, auf der *Leitfähigkeit* der genannten Substanzen beruht, sondern wesentlich auf deren große Dielektrizitätskonstante zurückzuführen ist.

Es fragt sich nun, ob die Theorie Rechenschaft von diesem Verhalten geben kann; ich will im folgenden versuchen, einen Beitrag zur Lösung dieser Frage zu liefern.

Die gestellte Aufgabe wäre, die Störung zu untersuchen, die ein Gitter der beschriebenen Art auf ebene elektrische Wellen ausübt, die senkrecht auf dasselbe auffallen. Indes ist die exakte Lösung dieses Problems sehr schwierig. Ist ja doch nicht einmal für den klassischen Hertzschen Gitterversuch eine befriedigende Theorie vorhanden! Denn der Thomsonsche[2]) Versuch, dieses Problem theoretisch zu be-

1) M. Laugwitz, Inaug.-Diss. Breslau 1907; Ann. d. Phys. 28. p. 148. 1907.

2) J. J. Thomson, Recent researches in electricity and magnetism, p. 425 ff. Oxford 1893.

handeln, kann meiner Meinung nach nicht als eine endgültige Lösung betrachtet werden.

Thomson idealisiert zunächst die Aufgabe, indem er für die einzelnen Gitterdrähte unendlich große Leitfähigkeit voraussetzt; diese im Gebiet der elektrischen Wellen zulässige Annahme bringt eine bedeutende Vereinfachung in den Grenzbedingungen des behandelten Problems mit sich (die tangentielle Komponente der elektrischen Kraft verschwindet an der Drahtoberfläche); allein die von ihm abgeleiteten Resultate sind, wie ich[1]) kürzlich in Gemeinschaft mit Hrn. Laugwitz gezeigt habe, mit der Erfahrung nicht im Einklange. Aber selbst angenommen, die Thomsonsche Lösung wäre vollkommen exakt, so könnte sie doch nicht auf den hier vorliegenden Fall *dielektrischer* Gitter angewendet werden. Denn der Thomsonschen Annahme unendlich großer Leitfähigkeit würde, wie man leicht sieht, hier der Fall unendlich großer Dielektrizitätskonstante entsprechen. Auf ihn könnte die Thomsonsche Theorie, ihre Richtigkeit vorausgesetzt, ohne weiteres übertragen werden; aber das hätte kaum eine Bedeutung, da es auch nicht annähernd möglich ist, diesen Fall zu realisieren. Aus diesen Gründen erschien es mir aussichtslos, das Problem des dielektrischen Gitters in seiner allgemeinen Fassung anzugreifen.

Daher beschränke ich mich im folgenden auf die Behandlung der Störung, die ein *einzelner* dielektrischer Zylinder hervorruft, wenn ebene elektrische Wellen auf ihn fallen, wobei der Vektor der elektrischen Kraft parallel oder senkrecht zur Zylinderachse sein soll. Dieses Problem steht nämlich offenbar in sehr naher Beziehung zu dem des Gitters.

Man erkennt dies am besten, wenn man z. B. die Wirkung eines Hertzschen Drahtgitters vergleicht mit derjenigen eines zylindrischen *Metallstabes.*[2]) Haben nämlich Drahtachse und elektrischer Vektor die gleiche Richtung, so übt der Metall-

1) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **21.** p. 587. 1906.

2) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **18.** p. 495. 1905; vor ihm haben bereits J. J. Thomson (l. c. p. 428ff.) und W. Seitz (Ann. d. Phys. **16.** p. 747. 1905) dasselbe Problem behandelt; doch enthalten ihre Entwickelungen Fehler; Hr. Seitz hat dieselben später in einer zweiten Arbeit (Ann. d. Phys. **19.** p. 554. 1906) korrigiert.

stab *eine beträchtliche Schirmwirkung nach hinten zu* aus; bilden die beiden Richtungen einen rechten Winkel miteinander, so gehen die auffallenden Wellen fast ungestört weiter, d. h. ein einzelner Draht verhält sich qualitativ genau so wie ein Gitter.

Diese Tatsache legt die Auffassung nahe, daß die Wirkung eines Gitters sich zusammensetzt aus den Wirkungen der einzelnen Gitterdrähte.[1]) Diese Auffassung wird um so mehr der Wirklichkeit entsprechen, je größer der Abstand zweier benachbarter Gitterdrähte ist, d. h. je weniger sie sich *gegenseitig* zu beeinflussen vermögen. Bei den Gittern des Hrn. Laugwitz ist dieser Fall freilich nicht realisiert; immerhin aber erschien es mir wünschenswert, die Untersuchung der Störung durch einen einzelnen dielektrischen Zylinder im Hinblick auf die Laugwitzschen Versuche durchzuführen.

Die Wirkung eines *dielektrischen* Drahtes auf elektrische Wellen kann nun genau in derselben Weise behandelt werden, wie die eines *metallischen* Drahtes. Ich beschränke mich daher, zumal da Lord Rayleigh[2]), wie ich nachträglich fand, bereits im Jahre 1881 ein analoges Problem behandelt hat, auf die Angabe des Resultates und auf die Diskussion zweier Spezialfälle. Wenn ich daher auch zum Teil Bekanntes reproduziere, so ist doch jedenfalls die Anwendung, nämlich die Konstruktion *dielektrischer* Polarisationsgitter nach Art der Hertzschen, neu; auch scheinen die betreffenden Untersuchungen von Lord Rayleigh oder wenigstens die auf das vorliegende Problem bezüglichen Resultate derselben wenig bekannt zu sein; wenigstens ist auf sie in *keiner* der einschlägigen Arbeiten Bezug genommen.

Die Achse des dielektrischen Zylinders falle mit der z-Achse zusammen; parallel der x-Achse komme in Richtung der abnehmenden x ein ebener Wellenzug, wobei die elektrische Kraft parallel der z-Achse gerichtet sei. Da andere Komponenten der elektrischen Kraft nicht auftreten, wird sie im folgenden mit $\mathfrak{E}_1$ für den Außenraum, mit $\mathfrak{E}_2$ für den Innenraum des Drahtes bezeichnet. Es ist zweckmäßig, Zylinder-

1) Ein ähnlicher Gedankengang bei M. Planck, Wied. Ann. 57. p. 13. 1896.

2) Lord Rayleigh, Scientific papers 1. p. 518ff. Cambridge 1899; auch in Phil. Mag. 12. p. 81. 1881.

koordinaten (r, φ, z) einzuführen, die mit den cartesischen Koordinaten folgendermaßen zusammenhängen:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

Der Winkel φ wird gerechnet in Richtung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse. Der Radius des betrachteten Zylinders sei ϱ, seine Dielektrizitätskonstante ε; die des Außenraumes sei gleich 1.

Die elektrische Kraft im Außenraume $\mathfrak{E}_1$ besteht aus zwei Summanden, $\mathfrak{E}_e$ und $\mathfrak{E}_r$, wobei

$$\mathfrak{E}_e = Me^{i\left(nt+\frac{2\pi z}{\lambda}\right)} = Me^{i\left(nt+\frac{2\pi r\cos\varphi}{\lambda}\right)}$$

die ebene einfallende Welle bedeutet; $\mathfrak{E}_r$ dagegen bedeutet die durch den Zylinder hervorgerufene Störung.

Führt man folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$p_1 = \frac{2\pi r}{\lambda},$$

$$p_2 = \sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{2\pi r}{\lambda},$$

$$\pi_1 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda}, \quad \pi_2 = \frac{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon}}{\lambda},$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad k_2 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda},$$

so führt eine Rechnung, analog derjenigen von Ignatowsky, Thomson oder Seitz zu folgendem Resultat:

$$(1) \qquad \mathfrak{E}_r = e^{int}\sum_{m=0}^{m=\infty} a_m\left\{K_m(p_1) - \frac{i\pi}{2}J_m(p_1)\right\}\cos m\varphi;$$

für den Innenraum folgt:

$$(2) \qquad \mathfrak{E}_2 = e^{int}\sum_{m=0}^{m=\infty} b_m J_m(p_2)\cos m\varphi.$$

Die Konstanten a_m sind definiert durch folgende Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{2i^m M}{a_m} = \frac{\frac{k_1}{k_2}K_m'(\pi_1) - \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)}K_m(\pi_1)}{J_m(\pi_1)\frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2}J_m'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2};$$

für den Wert $m = 0$ ist der Faktor 2 auf der linken Seite zu unterdrücken; die Koeffizienten b_m interessieren uns hier nicht, da wir es nur mit der Störung im Außenraum zu tun haben. $J_m(p_1)$ und $K_m(p_1)$ bedeuten die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art; über ihre Definition vgl. z. B. die zitierte Arbeit von W. Seitz.[1])

Wir wenden uns jetzt zur Diskussion zweier Spezialfälle. Als ersten Fall betrachten wir den folgenden:

$\pi_1 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda}$ sei sehr klein;

$\pi_2 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda}\sqrt{\varepsilon}$ sei sehr groß, d. h. ε sei sehr groß.

Wir beschränken uns ferner auf die beiden ersten Glieder der Reihe (1), setzen also

$$\mathfrak{E}_r = \left[a_0\left\{K_0(p_1) - \frac{i\pi}{2}J_0(p_1)\right\} + a_1\left\{K_1(p_1) - \frac{i\pi}{2}J_1(p_1)\right\}\cos\varphi\right] e^{\frac{i2\pi}{\lambda}Vt},$$

wobei $n = (2\pi V/\lambda)$ gesetzt ist, und V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Nun ist nach Gleichung (3):

$$\frac{M}{a_0} = \frac{\frac{k_1}{k_2}K_0'(\pi_1) - \frac{J_0'(\pi_2)}{J_0(\pi_2)}K_0(\pi_1)}{J_0(\pi_1)\frac{J_0'(\pi_2)}{J_0(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2}J_0'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2};$$

unter den obigen vereinfachenden Annahmen sind nun die Glieder mit $k_1/k_2 = 1/\sqrt{\varepsilon}$ als sehr klein gegen die anderen zu vernachlässigen; ferner ist

$$K_0(\pi_1) = \log\frac{2}{\gamma\pi_1};$$

wo $\log\gamma = 0{,}5772157$ die Mascheronische Konstante bedeutet;

$$J_0(\pi_1) = 1.$$

Also ist:

$$\frac{M}{a_0} = \frac{-K_0(\pi_1)}{J_0(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2} = -\log\frac{2}{\gamma\pi_1} + \log i = \log\frac{\gamma\pi_1 i}{2};$$

also

$$\frac{a_0}{M} = \frac{1}{\log\frac{\gamma\pi_1 i}{2}} = \frac{1}{\log\frac{\gamma i 2\pi\varrho}{2\lambda}} = -\frac{1}{\log\frac{\lambda}{\pi\varrho\gamma i}}. \tag{4}$$

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 751—752. 1905.

Jetzt ist der Ausdruck $K_0(p_1) - (i\pi/2) J_0(p_1)$ zu bere
dies soll geschehen für Punkte, deren Abstand r v
Zylinderachse groß ist; es sind also die asymptotischen F
der Besselschen Funktionen zugrunde zu legen, denen

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} K_0(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_0(\pi_1) &= -i \sqrt{\frac{\pi}{2 p_1}}\, e^{-i(p_1 - \pi/4)} \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(r - \lambda/8)}. \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied wird demgemäß nach (4) und (5):

$$\frac{i/2\, M}{\log \frac{\lambda}{\pi \varrho \gamma i}} \sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(r - \lambda/8)}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda} V t},$$

oder

$$(6) \quad -\frac{M}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, \frac{1}{\log \frac{\lambda}{\pi \varrho \gamma i}}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)}.$$

Ebenso ergibt sich für a_1 nach Gleichung (3):

$$\frac{2 i M}{a_1} = \frac{\frac{k_1}{k_2} K_1'(\pi_1) - \frac{J_1'(\pi_2)}{J_1(\pi_2)} K_1(\pi_1)}{J_1(\pi_1) \frac{J_1'(\pi_2)}{J_1(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} J_1'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Im vorliegenden Falle ist nun

$$\frac{2 i M}{a_1} = -\frac{K_1(\pi_1)}{J_1(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2};$$

für kleines π_1, was vorausgesetzt ist, ist nun

$$K_1(\pi_1) = +\frac{1}{\pi_1};$$

ferner ist

$$J_1(\pi_1) = \frac{\pi_1}{2}.$$

Dann folgt:

$$\frac{2 i M}{a_1} = -\frac{2}{\pi_1^2} + \frac{i\pi}{2},$$

oder, unter konsequenter Vernachlässigung des letzten G

$$\frac{2 i M}{a_1} = -\frac{2}{\pi_1^2} = \frac{-2\lambda^2}{4\pi^2 \varrho^2};$$

also

$$(7) \quad \frac{a_1}{M} = -\frac{4\pi^2 \varrho^2 i}{\lambda^2}.$$

Für großes Argument wird

$$(8)\qquad \begin{cases} K_1(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_1(p_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}}\, e^{-i(p_1 - \pi/4)} \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(r - \lambda/8)}. \end{cases}$$

Also wird das zweite Glied:

$$-M\frac{i \cdot 4\pi^2\varrho^2}{\lambda^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(r-\lambda/8)} e^{\frac{2\pi i V t}{\lambda}} \cos\varphi,$$

oder

$$(9)\qquad +2M\frac{\pi \cdot \varrho^2\pi}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)} \cos\varphi.$$

Durch Zusammenfassen von (6) und (9) folgt für $\mathfrak{E}_r$ der Wert:

$$(10)\quad \mathfrak{E}_r = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)}\left[-\frac{1}{\log\frac{\lambda}{\pi\varrho\gamma i}} + \frac{4\pi^2\varrho^2}{\lambda^2}\cos\varphi\right].$$

Dies ist genau das nämliche Resultat, daß man für einen Metalldraht von unendlich großer Leitfähigkeit erhält.[1]) Dies war nach den allgemeinen Ausführungen auch nicht anders zu erwarten, und man hätte dieses Ergebnis natürlich auch auf direkterem Wege erhalten können, statt, wie hier, durch Spezialisierung des allgemeinen Falles.

Diese Übereinstimmung zwischen metallischem und dielektrischem Draht findet natürlich auch noch statt, wenn Drahtachse und elektrischer Vektor einen rechten Winkel miteinander bilden. Dann ist die magnetische Kraft im Außenraum parallel der Drahtachse, und man schließt deshalb die Rechnung bequemer an diese als an die elektrische Kraft an. Bezeichnet man die einfallenden ebenen Wellen mit

$$\mathfrak{H}_e = Me^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt + x)} = Me^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt + r\cos\varphi)},$$

so ist die Störung

$$(11)\qquad \mathfrak{H}_r = \frac{M\pi \cdot \varrho^2\pi}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)}\,[1 + 2\cos\varphi].$$

Durch Vergleich von (10) und (11) sieht man sofort, daß die Störung im Falle der Übereinstimmung von Drahtachse und

1) Vgl. z. B. W. v. Ignatowski, Ann. d. Phys. 18. p. 518. 1905; oder bei J. J. Thomson, l. c. p. 365 (nach Korrektur des erwähnten Fehlers!).

elektrischer Kraft unter den hier vorliegenden Umständen größer ist, als wenn beide Richtungen einen Winkel von 90° einschließen.

Auf diesen Fall könnte man die Thomsonsche Theorie, wie überhaupt jede Gittertheorie, bei der unendlich große Leitfähigkeit vorausgesetzt wird, ohne weiteres übertragen; freilich hat dieser Fall kaum praktische Bedeutung, da sich ∞ Dielektrizitätskonstanten nicht vorfinden.

Wir gehen daher zur Untersuchung eines zweiten Spezialfalles über, der durch die Annahmen charakterisiert ist, daß

$$\pi_1 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \frac{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}$$

beide sehr klein sind.

Unter diesen Annahmen ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} J_0(\pi_1) &= 1\,, \\ J_0'(\pi_1) &= -\frac{\pi_1}{2}\,, \\ \frac{J_0'(\pi_2)}{J_0(\pi_2)} &= -\frac{\pi_2}{2}\,, \\ K_0(\pi_1) &= \log\frac{2}{\gamma\pi_1}\,, \\ K_0'(\pi_1) &= -\frac{1}{\pi_1}\,, \end{aligned}\right\}$$

folglich, nach Gleichung (3):

$$\frac{M}{a_0} = \frac{\dfrac{1}{-\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{1}{\pi_1} + \dfrac{\pi_2}{2}\log\dfrac{2}{\gamma\pi_1}}{\dfrac{-\pi_2}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{\pi_1}{2}} + \frac{i\pi}{2}\,.$$

Der Ausdruck $\frac{\pi_2}{2}\log\frac{2}{\gamma\pi_1}$ kann im Zähler neben $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{1}{\pi_1}$ vernachlässigt werden, so daß folgt:

$$\frac{M}{a_0} = \frac{\dfrac{1}{-\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{1}{\pi_1}}{\dfrac{-\sqrt{\varepsilon}}{2}\pi_1 + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{\pi_1}{2}} + \frac{i\pi}{2} = \frac{2}{\pi_1^2(\varepsilon-1)} + \frac{i\pi}{2}\,,$$

oder, unter konsequenter Vernachlässigung des letzten Gliedes,

$$(12) \qquad \frac{M}{a_0} = \frac{2}{\pi_1^2(\varepsilon-1)}\,; \quad a_0 = \frac{M\pi_1^2(\varepsilon-1)}{2} = \frac{2M\pi^2\varrho^2(\varepsilon-1)}{\lambda^2}\,.$$

Der Ausdruck

$$K_0(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_0(p_1)$$

wird wieder für *großes* Argument gebildet, d. h. für einen Punkt des Außenraumes, dessen Abstand r von der Achse groß ist; dann ergibt sich das erste Glied der Störung zu:

$$-i \frac{M\pi^2 \varrho^3 (\varepsilon - 1)}{r^{1/2} \lambda^{3/2}} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(r - \lambda/8)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} V t},$$

oder

$$+\frac{M\pi \cdot \varrho^2 \pi}{r^{1/2} \lambda^{3/2}} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)}. \tag{13}$$

Zur Ausrechnung von a_1 haben wir nach unseren Voraussetzungen:

$$J_1(\pi_1) = \frac{\pi_1}{2} - \frac{\pi_1^3}{16}, \quad J_1'(\pi_1) = \frac{1}{2} - \frac{3\pi_1^2}{16},$$

$$\frac{J_1'(\pi_2)}{J_1(\pi_2)} = \frac{1}{\pi_2} - \frac{\pi_2}{4}, \quad K_1(\pi_1) = \frac{1}{\pi_1}, \quad K_1'(\pi_1) = -\frac{1}{\pi_1^2};$$

also

$$\frac{a_1}{2iM} = \frac{\left(\frac{\pi_1}{2} - \frac{\pi_1^3}{16}\right)\left(\frac{1}{\pi_2} - \frac{\pi_2}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{1}{2} - \frac{3\pi_1^2}{16}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{-\frac{1}{\pi_1^2} - \frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3\pi_1^2}{16}\right)\right\} - \left(\frac{1}{\pi_2} - \frac{\pi_2}{4}\right)\left\{\frac{1}{\pi_1} - \frac{i\pi}{2}\left(\frac{\pi_1}{2} - \frac{\pi_1^3}{16}\right)\right\}},$$

was unter den erlaubten Vernachlässigungen ergibt:

$$\frac{a_1}{2iM} = \frac{\pi_1^4}{16}(\varepsilon - 1),$$

oder

$$a_1 = 2Mi \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2}(\varepsilon - 1). \tag{14}$$

Nach Gleichung (8) wird

$$K_1(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_1(p_1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(r - \lambda/8)};$$

also wird das zweite Glied

$$Mi \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2}(\varepsilon - 1) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r + \lambda/8)} \cos\varphi,$$

oder

$$-M \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2}(\varepsilon - 1) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)} \cos\varphi. \tag{15}$$

Aus (13) und (15) ergibt sich endlich für $\mathfrak{E}_r$ der Wert:

$$\mathfrak{E}_r = \frac{M\pi \cdot \varrho^2\pi}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}(\varepsilon - 1) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)}\left[1 - \frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2}\cos\varphi\right]. \tag{16}$$

Betrachten wir nun die Störung, welche durch das zylindrische Hindernis hervorgebracht wird, wenn Drahtachse und elektrischer Vektor gekreuzt sind. Wir stellen die magnetische Kraft der einfallenden Welle wiederum dar durch die Gleichung

$$\mathfrak{H}_e = M e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt+x)} = M e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt+r\cos\varphi)};$$

die Störung ergibt sich dann, durch analoge Rechnungen, die ich deshalb übergehe, zu:

$$(17)\quad \mathfrak{H}_r = \frac{2M\pi \cdot \varrho^2\pi}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}(\varepsilon-1)\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt-r-\lambda/8)}\left[\frac{\varrho^2\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{1+\varepsilon}\cos\varphi\right].$$

Die Gleichungen (16) und (17) finden sich, wie ich nachträglich gesehen habe, in etwas anderer Form bereits bei Lord Rayleigh[1]); sie stellen, wie bereits vorher bemerkt, die Störung in dem Falle dar, der durch die Annahmen charakterisiert ist, daß

$$\frac{2\pi\varrho}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}$$

sehr klein sind.

Für die größte Wellenlänge ($\lambda = 30$ cm) in den Versuchen des Hrn. Laugwitz sind diese Bedingungen einigermaßen realisiert. Denn da bei seinen Versuchen $\varrho = 0{,}2$ cm ist, so würde sich beispielsweise für Nitrobenzol ($\varepsilon = 36$) ergeben:

$$\frac{2\pi\varrho}{\lambda} = 0{,}042\,; \qquad \frac{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} = 0{,}25\,.$$

Für Aceton würden die Werte etwas günstiger, für Wasser noch etwas ungünstiger liegen.

Vergleicht man nun das Resultat der Beobachtungen mit der Theorie, so ergibt sich *hier* ein vollkommener Gegensatz. Denn auch für $\lambda = 30$ cm hat Hr. Laugwitz eine deutliche *Schirmwirkung* des Gitters konstatiert. Bilden wir jedoch unter Benutzung von (16) die elektrische Kraft $\mathfrak{E}_1$ im Außenraume, so folgt:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r = M e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt+r\cos\varphi)} + \frac{M\pi\cdot\varrho^2\pi}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}(\varepsilon-1)\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt-r-\lambda/8)},$$

1) Lord Rayleigh, Scientific papers 1. p. 534 u. 535. 1899.

wenn wir Glieder von höheren als der zweiten Ordnung in $\varrho\,\pi/\lambda$ vernachlässigen.

Für $\varphi = \pi$, d. h. hinter dem zylindrischen Hindernis, ergibt sich:

$$\underset{\varphi=\pi}{\mathfrak{E}_1} = M e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt-r)} + \frac{M\pi\cdot\varrho^2\pi}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}(\varepsilon-1)e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt-r-\lambda/8)}.$$

Spalten wir hiervon den *reellen* Teil ab, so ist unter Benutzung der eingeführten Abkürzungen:

$$\underset{\varphi=\pi}{\mathfrak{E}_1} = M\cos(nt-p_1) + \frac{M\pi\cdot\varrho^2\pi}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}(\varepsilon-1)\cos(nt-p_1-\pi/4).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\frac{\pi\varrho^2\pi}{\lambda^{3/2}}(\varepsilon-1) = B,$$

$$p_1 + \pi/4 = \psi,$$

so folgt endlich

$$\underset{\varphi=\pi}{\mathfrak{E}_1} = M\cos nt\left\{\cos p_1 + \frac{B}{\sqrt{r}}\cos\psi\right\} + M\sin nt\left\{\sin p_1 + \frac{B}{\sqrt{r}}\sin\psi\right\},$$

bei den experimentellen Bestimmungen kommt es nun auf den Mittelwert von $\mathfrak{E}^2$ an; für den obigen Fall ergibt sich aus vorstehender Gleichung:

$$\underset{\varphi=\pi}{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{M^2}{2}\left\{1 + B\sqrt{\frac{2}{r}}\right\},$$

wobei ein Glied mit B^2 vernachlässigt worden ist; der nämliche Mittelwert, gebildet für den Fall, daß gar kein Glied im Strahlengang vorhanden ist, hat den Betrag $M^2/2$. Das Verhältnis ist also

$$1 + B\sqrt{\frac{2}{r}},$$

also bei positivem B *größer wie 1.*

Der dielektrische Zylinder übt also in diesem Falle *keine* Schirmwirkung aus, sondern er *verstärkt die Strahlung.*

Es fragt sich nun, woher diese Abweichung vom Experiment kommt. Als einfachste und naheliegendste Antwort auf diese Frage bietet sich der schon oben angedeutete Umstand dar, daß aus den Erscheinungen bei einem einzelnen Stabe

nicht mit Sicherheit auf die Eigenschaften eines Gitters geschlossen werden kann, dessen Konstante klein gegen die Wellenlänge ist. Immerhin aber könnte man den Grund dieser Diskrepanz auch in einer anderen Tatsache sehen, deren Berücksichtigung uns freilich vom Boden der *reinen* Maxwellschen Theorie entfernen würde, nämlich in der von Drude entdeckten „anomalen" Absorption zahlreicher Substanzen von großer Dielektrizitätskonstante. Die drei Stoffe, welche Hr. Laugwitz in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat, Wasser, Nitrobenzol, Aceton gehören zu dieser Klasse. Man könnte sich nun denken, daß dem oben berechneten Vorgange sich eine Absorption überlagert, und so doch eine *Schirmwirkung* nach hinten zustande kommt. Ich werde indessen weiter unten zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Man muß sich vielmehr dafür entscheiden, den Grund der Abweichung in dem Verhalten eines einzelnen Stabes und eines Gitters in der *dichten* Anordnung des Gitters zu sehen.

Für die kleineren Wellenlängen, mit denen Hr. Laugwitz gearbeitet hat, z. B. $\lambda = 5$ cm, sind die Bedingungen des eben diskutierten Falles nicht mehr erfüllt. Man muß hier vielmehr die Koeffizienten a_m in hinreichender Zahl nach der unabgekürzten Formel (3) berechnen. Die dazu notwendigen Werte der K_m und J_m sind Tabellen zu entnehmen bez. durch die bekannten Rekursionsformeln der Besselschen Funktionen zu bestimmen. Ich habe für $\lambda = 5$ cm die Rechnung be- Wasser ($\varepsilon = 81$) durchgeführt und will nun das Ergebnis mitteilen:

Für $\lambda = 5$ cm übt der Zylinder wieder *eine Schirmwirkung* nach hinten ($\varphi = \pi$) aus, so daß hier wieder Gitter und Draht dasselbe Resultat liefern. Ich gebe die genauen Zahlen nicht an, da es uns ja nicht auf einen quantitativen Vergleich ankommt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß, wie oben behauptet wurde, die *Absorption* der fraglichen Stoffe keine *wesentliche Rolle* spielt. Wir haben zu dem Zwecke bekanntlich die Annahme zu machen, daß in diesen Substanzen schwingungsfähige Gebilde existieren; insbesondere zwingen gewisse Eigenschaften der Absorption uns hier dazu, die schwingenden Teilchen als *stark gedämpft* zu betrachten. Das *Endresultat* der angedeuteten Operation

besteht darin, daß in den Maxwellschen Gleichungen an Stelle der Dielektrizitätskonstanten ε des zylindrischen Stabes eine von der Wellenlänge abhängige *komplexe* Größe tritt, die ich nach Drude mit $\varepsilon(\lambda)$ bezeichne. Setzen wir

$$\varepsilon(\lambda) = (\nu - i\varkappa)^2,$$

so bedeutet ν den (variabeln) Brechungsindex, $\varkappa$ den Extinktionskoeffizienten. An Stelle der Gleichung (16) erhält man so:

$$(18)\quad \mathfrak{E}_r = \frac{M \cdot \pi \varrho^2 \pi}{r^{1/2} \lambda^{3/2}} (\nu^2 - \varkappa^2 - 2\nu\varkappa i - 1) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(Vt - r - \lambda/8)} \left[1 - \frac{\varrho^2 \pi^2}{\lambda^2} \cos\varphi\right].$$

Nimmt man den reellen Teil und bildet, wie vorher, für $\varphi = \pi$ die betreffenden Mittelwerte, so ergibt die Einsetzung der beobachteten ν und K *keine Änderung des Sinnes der Störung.* Gegenüber den großen Dielektrizitätskonstanten sind die Absorptionen nicht beträchtlich genug, um einen merkbaren Effekt hervorzubringen; damit ist die obige Behauptung bewiesen. Der Schluß des Hrn. Laugwitz, daß die von ihm beobachteten Erscheinungen auf die große Dielektrizitätskonstante zurückzuführen seien, bleibt also auch jetzt noch bestehen.

Breslau, Physik. Institut d. Univ., im März 1907.

(Eingegangen 7. April 1907.)

10. *Eine Amalgamlampe mit reichem Linienspektrum;* *von Leo Arons.*

(Hierzu Taf. II, Nr. I u. II.)

Bereits in meiner ersten ausführlichen Arbeit „Über den Lichtbogen zwischen Quecksilberelektroden, Amalgamen und Legierungen“[1]) habe ich über Versuche berichtet, namentlich die Cadmiumlinien im Spektrum der Lampe zu erhalten; diese Versuche führten nicht zu brauchbaren Ergebnissen, da nach kurzer Zeit die Lampen durch die starke Erhitzung zerstört werden, während die Lampen mit reinem Quecksilber beliebig lange brennen konnten.

Gumlich[2]) stellte mit besonderer Sorgfalt Cd-Amalgamlampen her, die aber die Verwendung „in freier Luft auf die Dauer nicht aushalten“. Aber auch in der Kühlflüssigkeit machten die Lampen Schwierigkeiten, da die Niveauregulierung nicht regelmäßig erfolgte. Die letzterwähnte Schwierigkeit schien überwindbar mit dem sehr leicht flüssigen hochkonzentrierten Amalgam, das nach der Formel Hg_3PbBi gemischt ist. Versuche, die ich mit diesem Amalgam im Jahre 1897 anstellte, scheiterten aber an der hohen Temperatur des Lichtbogens. Inzwischen ist in der Quarzglaslampe der Firma Heraeus ein Instrument erstanden, das den höchsten Temperaturen Stand hält. Schon mit Quecksilberfüllung haben R. Küch und Retschinsky[3]) in dieser Lampe Lichtbogen erhalten, die in elektrischer und optischer Beziehung gegenüber dem in Glaslampen erzeugten mancherlei Vorteile zeigen. Auf meine

1) L. Arons, Wied. Ann. **58**. p. 73. 1896.
2) E. Gumlich, Wied. Ann. **61**. p. 401. 1897.
3) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **20**. p. 563. 19(

Bitte hat nun Hr. Dr. R. Küch im Laboratorium der Firma Heraeus den Versuch gemacht, das oben erwähnte Blei–Wismut-Amalgam in der Quarzlampe zu benutzen; nachdem es Hrn. Dr. Küch und seinen Mitarbern gelungen ist, auf diese Weise Lampen mit einem außerordentlich reichen Linienspektrum herzustellen, hat er mir gestattet, seine Mitteilungen über die Ergebnisse zu veröffentlichen.

Bei den in Glaslampen üblichen Belastungen zeigt das Spektrum wesentlich nur die Hg-Linien; bei der hohen Belastung dagegen, wie sie nur die Quarzglaslampen vertragen[1]), erscheint sowohl das Pb- wie das Bi-Spektrum neben dem Hg-Spektrum in großer Intensität — wobei freilich bald das Pb, bald das Bi heller hervortritt; auf ähnliche Schwankungen sogar bei verschiedenen Liniengruppen *eines* Metalles (Cd) konnte ich bereits in der zitierten Arbeit hinweisen (l. c. p. 94). Hr. Dr. Küch ist einen Schritt weiter gegangen und hat dem Amalgam $PbBiHg_3$ noch Zn und Cd hinzugesetzt; auch diese entsenden ein starkes Linienspektrum, das namentlich die ultravioletten Partien außerordentlich bereichert. Die Photogramme (Taf. II, Nr. I und II) geben die Spektren im sichtbaren und im ultravioletten Gebiet. Nr. I ist mit Glasprisma und Linsen auf einer Platte der Höchster Farbwerke, mit Orthochrom T sensibilisiert, aufgenommen; für Nr. II wurden Quarzprisma und Linsen benutzt, die Platte war eine gewöhnliche Schleussnerplatte. Jedesmal wurden fünf verschiedene Expositionszeiten angewendet. Selbst bei der kürzesten Expositionszeit treten im sichtbaren Spektrum (bis 4000 Å.-E.) neben neun Quecksilberlinien je zwei Bi-, Cd-, Zn- und eine Pb-Linie auf. Bei der längsten Expositionszeit erscheinen auf diesem Gebiet neben den Quecksilberlinien vier Cd-Linien (daß die selbst mit meiner Lampe gemessene Cd-Linie 6740 nicht sichtbar ist, mag daran liegen, daß sie nicht mehr auf die Platte fiel), vier Zn-Linien, vier Bi-Linien und zehn Pb-Linien. Das ultraviolette Spektrum zeigt auch bei der kürzesten Expositionszeit zwischen 4000 und 2500 Å.-E. neben 18 Hg-Linien je acht Linien von Pb und Bi, sowie fünf Cd- und drei Zn-Linien.

1) R. Küch u. T. Retschinsky, l. c. p. 565.

Ob die Quarzlampe mit dem $PbBiHg_8$-Amalgam sich auch für die Technik eignen wird — Hg-Lampen aus Quarzglas für Hochbelastung bestimmt, werden schon für Beleuchtungszwecke gebaut — ist noch nicht gewiß. Wohl aber ist die Firma Heraeus schon jetzt in der Lage, Lampen, die das beschriebene Spektrum zeigen, für wissenschaftliche Zwecke zu liefern; sie können stundenlang brennen, ohne eine Nachregulierung zu erfordern.

Berlin, den 22. Februar 1907.

(Eingegangen 25. Februar 1907.)

11. *Über den Verdrängungswiderstand fester Körper in Gasen und Flüssigkeiten;* von *K. Uller.*

Erste Mitteilung.

Einleitung.

Für den erfahrungsmäßig stets vorhandenen Widerstand eines sich bewegenden festen Körpers in einer realen, als Ganzes ruhenden, Flüssigkeit kennen wir seit Coulomb die drei wesentlichen Ursachen, nämlich:

a) die Verdrängung der Flüssigkeit durch den Körper (die Flüssigkeit widersteht durch ihre Trägheit),

b) die mitreißenden Eigenschaften der Körperoberfläche,

c) die Viskosität der Flüssigkeit.

Jede Formulierung eines Widerstandsgesetzes schließt in sich Hypothesen ein, welche durch die beiden letzten Ursachen in das Problem hineingetragen werden. Diese erweisen sich indessen als noch unzulänglich allen bisherigen Erfahrungen angepaßt. In allen Fällen aber, wo die Verdrängungs- und Beschleunigungsarbeit des Körpers groß ist gegenüber der von den in b) und c) tätigen Kräften geleisteten, hat sich eine Widerstands*formel* als sehr gut zutreffend erwiesen. Es ist nämlich dieser Widerstand, den wir speziell „Verdrängungswiderstand" benennen wollen, in jedem Augenblicke proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit eines ausgezeichneten Körperpunktes, als welchen wir meistens den geometrischen Mittelpunkt nehmen dürfen. Es liegt schon in der Voraussetzung, daß der Körper einfache, glatte Gestalt und das Medium Leichtflüssigkeit besitzen muß. Selbstverständlich ist auch vorausgesetzt, daß ein störender Einfluß der Wände und anderer Körper sich nicht geltend machen kann. Der Proportionalitätsfaktor ist abhängig von der Dichte des Mediums — wir nehmen lineare Beziehung an — und der Orientierung des Körpers gegen die Richtung der oben genannten Geschwindigkeit. Besitzt seine Oberfläche eine Symmetrieachse, wie wir im folgenden voraussetzen, dann

ist die Orientierung durch den Winkel ω zwischen Achse und Geschwindigkeitsrichtung bestimmt.

Einige Worte über die experimentellen Unterlagen unserer Formel für den Verdrängungswiderstand.[1]) Für *fortschreitende* Bewegung in Luft ist sie streng erprobt von 0,2 m/sec (Schellbach 1871) bis 55 m/sec (Lochner 1904, Renard 1904) nach verschiedenen Methoden, bei denen in der Mehrzahl empfindliche Rundlaufapparate zur Verwendung kommen, die den Körper bei konstantem ω mit konstanter Geschwindigkeit in die Runde treiben. Diese Bewegungsart wurde aus naheliegenden Gründen bevorzugt, ist aber nicht eine einfache, denn die Bewegung des Körpers ist dabei eine rotatorische und die der Luft eine sehr turbulente und zentrifugal beschleunigte, wie man aus der Größe der Geschwindigkeit und des Krümmungsradius bei den einzelnen Versuchen schließen muß; eine einfache, geradlinige Bewegung bedingt bisher nur die eigenartige Methode, die v. Lössl ersonnen hat. Trotz der Verschiedenheit der Intensität der Wirbelbewegungen und der Methoden der Druckmessung besteht unter den Methoden eine bedeutungsvolle Übereinstimmung hinsichtlich des Abhängigkeitsverhältnisses von der Geschwindigkeit. Die Unterschiede in der Größe des Proportionalitätsfaktors liegen zum großen Teil vermutlich in der verschiedenen Intensität der Wirbelung. — Für höhere Geschwindigkeiten in Luft liegen Schießversuche vor. Bei Langgeschossen ist hier die Inkonstanz von ω zu berücksichtigen. Die zahlreichen Versuche bestätigen die quadratische Formel gut bis zu 250 m/sec, weniger gut bis in die Nähe der Schallgeschwindigkeit. Die hier zu erwartende und bestätigte Irregularität zieht der Gültigkeit der genannten Formel eine bestimmte obere Grenze, wie eine solche auch für andere Medien existieren muß. Für *fortschreitende Bewegung unter 0,2 m/sec* scheinen einwandfreie Versuche nicht vorzuliegen; für *hin- und hergehende Bewegung* scheinen Beobachtungen nur von Schwingungen kleiner Amplituden und nur solche von dünnen Pendellinsen in Luft und in Flüssigkeiten vorzuliegen. Ihre Resultate führen auf eine *lineare* Widerstandsformel. Wir haben

1) Ausführliche Literatur gibt die „Mathematische Enzyklopädie".

hier also schon Erscheinungen vor uns, in denen die durch (b), (c) verursachten Widerstände vorherrschen. *Rein* treten diese, die wir zusammenfassend Kohäsionswiderstände nennen wollen, bei in ihrer Oberfläche schwingenden Rotationskörper auf, und da ist die lineare Widerstandsformel experimentell verbürgt und theoretisch gestützt. Die Möglichkeit, daß es Körperformen gibt, die auch bei kleinen Schwingungen Verdrängungswiderstand erfahren, wird natürlich durch die genannten Beobachtungen nicht bestritten. (So sind vermutlich die Schwingungen der Wagschalen von Hebel- und Federwagen gedämpft.) Es ist möglich, daß er bei den Minimalgeschwindigkeiten aufgetreten ist, welche die Versuche von Hrn. Frank[1]) aufweisen. Er ließ den Versuchskörper, bei dem Vorder- und Hinterteil gleichgeformt sein müssen, unter der Wirkung der Schwerkraft eine vertikale Pendelbewegung mit großen Amplituden bei konstantem ω ausführen. Die Pendellänge betrug 12,70 m, und der erste Schwingungsbogen hatte eine Länge von 13 m. Der Körper durchlief in Hunderten von Schwingungen Tausende von Metern, wobei sich die Widerstandsarbeit für eine Doppelschwingung auf $^1/_{25000}$ des Anfangswertes verringerte! Die Lage der Umkehrpunkte konnte auf 1 mm genau abgelesen werden. Von der Annahme ausgehend, daß der Widerstand des Körpers und der Aufhängedrähte die quadratische Formel befolge, stellt der Hr. Verf. nach besonderer Ermittelung der Reibungskraft in den Kugellagern die Gleichung für die Dämpfung der Pendelschwingungen auf. Nun vergleicht er die beobachteten Lagen mit den errechneten. Die Übereinstimmung ist so vortrefflich, daß mit Rücksicht auf die Eigenart der Methode mit Sicherheit erkannt wird, daß der Widerstand der untersuchten Körper in jedem Augenblicke dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, die im Versuche innerhalb 0 und $\pm$ 9 m/sec schwankte. Das kann, was den Vorgang bei den periodisch auftretenden Minimalgeschwindigkeiten anbelangt, auch bei diesen zutreffen; es ist aber vielleicht der Einwand berechtigt, daß die entsprechende Widerstandsarbeit gegenüber der gesamten zu klein war, um die Lagen der Umkehrpunkte merklich zu beeinflussen.

1) A. Frank, Ann. d. Phys. 16. p. 464—489. 1905.

Wir ziehen aber aus seinen Ergebnissen den Schluß, daß wir, wenn Verdrängungswiderstand vorliegt, für Minimalgeschwindigkeiten die quadratische Formel zum mindesten formal ansetzen dürfen, falls neben diesen im Laufe der Bewegung auch erheblich größere Geschwindigkeiten auftreten. Kriterien zur Entscheidung, welcher von den beiden Widerständen im Einzelfalle wirklich herrscht, werde ich weiter unten angeben. Exakte *Widerstandsmessungen in Flüssigkeiten bei großen Ortsveränderungen* scheinen spärlich zu sein. Für den Schiffswiderstand hat die Technik eine quadratische Widerstandsformel ermittelt.

Entwickelung neuer Methoden der Widerstandsmessung.

Die folgenden Auseinandersetzungen haben zum Zweck, neue Methoden zu entwickeln, nach denen man ermitteln kann, wieweit sich der Gültigkeitsbereich der quadratischen Widerstandsformel auf dem Gebiete der Gase und Flüssigkeiten erstreckt; sie fußen auf der strengen Gültigkeit dieser Formel für jede Geschwindigkeit bis zu einer kritischen und involvieren für jede Untersuchung den Nachweis, ob die genannte Voraussetzung erfüllt ist. Ist das der Fall, dann gestattet sie absolute und relative Bestimmungen des Widerstandskoeffizienten.

Wir suchen nun den Bewegungszustand (v) des Versuchskörpers von der Masse m in einem Medium von der Dichte k unter dem Einfluß einer räumlich verteilten und von der Zeit unabhängigen Tangentialkraft K auf gegebener Bahn (s). Nennen wir c seinen von ω abhängigen Koeffizienten für den Tangentialwiderstand, so hat sein tangentialer Verdrängungswiderstand W die Größe $-ckv^2$ in jedem Augenblick. Der Bau dieses Ausdruckes läßt es vorteilhaft erscheinen, von der *Arbeitsgleichung* auszugehen. Es bezeichne die positive Größe L seine Lebendige Kraft und die positive Größe $w = 2ck/m$ [cm^{-1}] den „Hemmungsfaktor" seiner Bewegung; er ist das Verhältnis des Tangentialwiderstandes zur lebendigen Kraft des Körpers. Wir nehmen w als unabhängig von der Geschwindigkeit an, damit schließen wir deformierbare Körper aus der vorliegenden Betrachtung aus. Es ist den von uns betrachteten Widerstandserscheinungen als Oberflächenwirkungen eigentümlich, daß

man innerhalb gewisser Grenzen w, das allein gemessen wird, *wählen* kann durch Variation von m. Die Arbeitsgleichung nimmt nun die Form an:

(I) $$dL = K(s)\,ds - w\,L\,ds\,.$$

Sie liefert uns L und somit auch v — mit Ausnahme des Richtungssinnes, der sich aber in jedem einzelnen Falle leicht angeben läßt — als Funktion des Bahnparameters. Sie liefert uns keine zeitlichen Beziehungen; das hat zur Folge, daß die zu entwickelnden Meßmethoden auf reine Lagenbestimmungen hinauslaufen. Das Bahnelement ds dürfen wir, der physikalischen Bedeutung des Widerstandes entsprechend, der nur eine schon existierende Bewegung zu verringern vermag, nur positiv nehmen, selbst wenn der Körpermittelpunkt dieselbe Reihe von Raumpunkten später in umgekehrter Richtung durchläuft; wir haben uns also die Koordinaten der Kurve und ebenso K und w prinzipiell als Funktionen des die Reihe der Bahnpunkte bestimmenden Parameters zu denken. Damit sind im allgemeinen unüberwindliche analytische Schwierigkeiten gegeben, da bei dieser Auffassung gerade in physikalisch wichtigen Fällen K und w unstetig werden; man denke an den vertikalen Wurf, die Pendelbewegung. Man vermag sie unter Verzicht auf Allgemeinheit der Resultate zu umgehen, indem man den Zustand jedesmal nur zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ruhepunkten ($L = 0$) betrachtet und im folgenden Intervall den Sinn des Bahnparameters umkehrt, von dem wir voraussetzen dürfen, daß er sich innerhalb eines solchen Intervalles regulär verhält.

Von den ausgezeichneten Werten, die L im Laufe der Bewegung annehmen kann, interessiert sein *absolutes Minimum* ($L = 0$). Wir müssen dabei unterscheiden zwischen dauernder und momentaner Ruhelage. Eine *Ruhelage* ($L = 0$) ist eine *dauernde* unter den beiden Bedingungen, daß in ihr

$$K = 0, \text{ sowie unmittelbar vorher } K = \frac{dL}{ds} < 0$$

ist. Offenbar geht unmittelbar vorher dL/ds aus negativen Werten in Null über und dementsprechend nach Gleichung (I) auch K.

Jede andere Ruhelage ist eine *momentane*, und in ihr $K \neq 0$. In ihrer Umgebung geht K von negativen zu positiven

Werten über, aber *stets sprungweise unter Ausschluß des Wertes Null.* Das gleiche gilt nach Gleichung (I) auch für dL/ds.

Es interessieren die Verhältnisse bei der *dauernden* Ruhelage. Hier, wo die Beziehungen stetig sind, haben wir die beiden Bedingungen:

$$K = 0; \quad \frac{d^2L}{ds^2} = \frac{dK}{ds} \gtreqless 0.$$

Diese Bedingungen sind unabhängig von dem Hemmungsfaktor w — sie gelten ebenso für die nichtwiderständige Bewegung ($w = 0$) —, sie sind aber abhängig von der benutzten quadratischen Widerstandsformel. Wir können also den allgemeinen Satz aussprechen:

(A) *Bei quadratischem Widerstande gelten in der Umgebung einer dauernden Ruhelage dieselben Beziehungen wie bei nichtwiderständiger Bewegung.*

Speziell: *Ist in gegebenem Kraftfelde (K) eine nichtwiderständige Bewegung pendelartig, dann ist es auch eine widerständige Bewegung in demselben Felde; Aperiodizität ist dann ausgeschlossen.*

Bekanntlich kann bei linearem Widerstand eine solche Aussage nicht gemacht werden.

Aus der *linearen* Differentialgleichung (I) lesen wir die Eigentümlichkeit ab, daß der von mehreren treibenden Kräften bewirkte Zuwachs an lebendiger Kraft gleich ist der Summe der von den einzelnen bewirkten Zuwüchse. Weitere liefert uns die Integration von (I). Wir setzen

$$\int w\,ds = \Omega, \quad e^{-\Omega}\int e^{\Omega} K\,ds = \Phi,$$

wo die unbestimmten Integrale ohne Konstante genommen werden sollen. Dann kommt

$$L = Ce^{-\Omega} + \Phi,$$

wo C die Integrationskonstante bezeichnet. Gelten in dem durch s_0 bestimmten Bahnpunkte die Werte Ω_0, Φ_0, L_0, dann kann man diese Gleichung schreiben:

$$\text{(II)} \qquad L = (L_0 - \Phi_0)e^{-(\Omega - \Omega_0)} + \Phi.$$

$\Omega - \Omega_0$ ist eine dimensionslose, positive und nirgends abnehmende Funktion; Φ ist die Lebendige Kraft des Körpers, wenn der zurückgelegte Weg hinreichend lang geworden ist.

Eine Kraft, die darstellbar ist durch das Produkt einer reinen Raumfunktion und eines Intensitätsfaktors, möge von jetzt ab „Einzelkraft" heißen. Dann ergibt sich aus Gleichung (II):

(B) *Verläßt der Körper irgendwo im Felde einer Einzelkraft den Zustand der Ruhe ($L_0 = 0$), dann sind seine sämtlichen folgenden Lagen momentaner Ruhe, falls solche auftreten, unabhängig von der Intensität der Kraft. Existiert ein Kräfteaggregat, dann besteht eine Abhängigkeit nur von den Intensitätsverhältnissen.*

Dieser wichtige Satz, der eine Folge unserer *linearen* Differentialgleichung (I) ist, hat denselben Wortlaut wie bei der nichtwiderständigen Bewegung. Er wird aber von keiner anderen Widerstandsformel erfüllt. Läßt er sich in einem vorliegenden Versuche bestätigen, so liefert er einen scharfen Nachweis, daß dann die quadratische Widerstandsformel zutrifft. Ferner ergibt sich aus ihm, daß wir die Intensität der treibenden Einzelkraft nicht zu messen brauchen, falls wir auf die Bestimmung der momentanen Ruhelagen eine Meßmethode für den jeweiligen Widerstandskoeffizienten begründen können.

(C) *Die für die Zurücklegung der Strecke ds verbrauchte Zeit dt ist gleich $ds : \sqrt{2L/m}$*, also *umgekehrt proportional der Wurzel aus der Kraftintensität*, falls wieder die Bewegung aus der Ruhe heraus erfolgt. Also auch diese Eigentümlichkeit der nichtwiderständigen Bewegung finden wir bei unserer Bewegung wieder, aber nicht bei irgend einer anderen Widerstandsformel.

Die Sätze (B) und (C) gestatten eine bemerkenswerte Folgerung. Es kommen in der Physik Intensitätsvergleichungen durch Zeitmessungen vor, bei denen Körper und Medium unverändert bleiben (magnetische, elektrische Nadel; Apparate mit künstlicher Luftdämpfung). Angenommen, man habe sich nach (B) vergewissert, daß der Widerstand des Mediums Verdrängungswiderstand sei. Nennen wir T_1 die von der Ausgangslage (s_0) bis zur n^{ten} Ruhelage verflossene Bewegungszeit unter dem Einfluß der Intensität J_1, dann ist

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{J_1}} \cdot f(s_0, w),$$

wo die Funktion f nach (B) frei von J_1 ist. Für eine Intensität J_2 haben wir bis zur n^{ten} Ruhelage

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot f(s_0, w),$$

wenn wir von derselben Auslage (s_0) die Bewegung ohne Anstoß vor sich gehen lassen. Es ist also $T_1^2/T_2^2 = J_2/J_1$ in Strenge.

(D) *Die Existenz des Verdrängungswiderstandes ist gleichgültig für solche Intensitätsvergleichungen.*

Um Korrektionen infolge von Widerstand eines Mediums zu vermeiden, ist es sonach nötig, Ursache (b) und (c) — vgl. oben — möglichst herabzudrücken. — Die charakteristische und scharf kontrollierbare Folgerung (D) kann umgekehrt als Kriterium über die Art des Widerstandes dienen.

Es kann vorkommen, daß $L_0 = \Phi_0$ ist, falls Φ_0 positiv ist. Dann haben wir es mit einer Bewegung zu tun, die ich eine „partikuläre" nennen will. Sie kann physikalisch dadurch ausgezeichnet sein, daß sie einer gewissen nichtwiderständigen Bewegung unter dem Einfluß gewisser Kräfte äquivalent ist. Dieser interessante Fall ist unter einfachen physikalischen Bedingungen realisiert, wenn Φ frei ist von den e-Funktionen. Weiter unten dafür ein Beispiel. Im übrigen nähert sich jede Bewegung nach hinreichend langer Bahn der partikulären $L = \Phi$.

Es sei von jetzt ab der Hemmungsfaktor w unabhängig vom Bahnparameter. Das trifft zu, wenn die Bewegung in einem Medium konstanter Dichte und mit konstantem ω vor sich geht. Dann wird

$$\Phi = e^{-ws} \int e^{+ws} K \, ds,$$

ein Ausdruck, der von der Lage, Form und Richtungssinn der Bahn abhängt, aber invariant ist gegenüber einer Verschiebung des Nullpunktes der Bahnlänge.

Wir gehen nun zu den Anwendungen über und beginnen mit dem trivialen Falle, daß K konstant $= K_0$ ist. Dann haben wir

$$\Phi = K_0/w = \Phi \quad \text{und} \quad L = (L_0 - K_0/w)\, e^{-w(s-s_0)} + K_0/w.$$

Die partikuläre Bewegung ($L_0 = K_0/w = L$) ist eine solche mit konstanter Geschwindigkeit; sie ist äquivalent einer nichtwiderständigen Bewegung unter dem Einfluß einer normal zur Bahn gerichteten Kraft, sie ist aber nur möglich, wenn K_0 positiv, also mit der Anfangsgeschwindigkeit gleichgerichtet ist. Ein Körper kann sonach bei konstanter Neigung der Bahn zum Horizont sich unter der Wirkung der Schwere mit konstanter Geschwindigkeit abwärts bewegen, aber nicht aufwärts. Diese Folgerung läßt sich aus jeder plausiblen Widerstandsformel ziehen, aber eine für die unserige charakteristische liefert die

Pendelbewegung in einer Vertikalebene.

Der Bahnparameter sei hier die Elongation φ, die wir vom Kulminationspunkte aus zählen. R sei die in bezug auf die Dimensionen des Versuchskörpers große Länge des sehr dünnen, aber starren Stabes, der die Mitte des Körpers mit der Achse der Drehung verbinde. Die treibende Kraft ist hier $A \sin\varphi$, gültig für die Hinbewegung; die darauf folgende Herbewegung müssen wir als eine erneute Hinbewegung auffassen. A ist die Differenz aus Schwere und Auftrieb des Körpers. Φ lautet hier

$$A R e^{-wR\varphi} \int e^{+wR\varphi} \sin\varphi \, d\varphi = -A . \cos\delta . R . \cos(\varphi + \delta),$$

wenn wir $wR = \operatorname{tg}\delta$ setzen ($0 \leqq \delta \leqq \pi/2$). Damit wird nun Gleichung (II) nach einigen Umstellungen:

$$(1) \quad \begin{cases} L = L_0 e^{-wR(\varphi - \varphi_0)} + A . \cos\delta . R . e^{-wR(\varphi + \delta)} \\ \quad \times \{e^{wR(\varphi_0 + \delta)} \cos(\varphi_0 + \delta) - e^{wR(\varphi + \delta)} \cos(\varphi + \delta)\}. \end{cases}$$

(E) *Nach (A) kann die Bewegung niemals eine aperiodische sein, wie auch w, φ_0, L_0 beschaffen sein mögen.*

Es scheint mir, daß dieser Satz neben (B) und (C) als Kriterium verwendet werden kann in der Frage nach der Widerstandsformel in einem konkreten Falle. Bei der linearen tritt bekanntlich bei relativ großem Widerstande Aperiodizität in die Erscheinung. Vorläufige Versuche, die ich dieserhalb in Luft anstellte, lieferten keine aperiodische Bewegung, obgleich ich mit dem sehr großen Widerstande einer leichten Pappscheibe von 60 cm Durchmesser operierte, sowie sehr große und sehr kleine Amplituden wählte.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Bewegung von der Ruhe aus beginnt ($L_0 = 0$) und φ_0 nicht 0 oder π sei. *Dann sind*, wie wir bereits wissen, *die Lagen der Umkehrpunkte unabhängig von A, d. h. der Schwere und dem Auftrieb.* Wenn wir A variieren, so müssen wir von einer Änderung des Auftriebes absehen, da Körper und Flüssigkeit gegeben sind. Wir können aber die Wirkung der Schwere herabsetzen, indem wir die Masse des Körpers verkleinern oder zwei Pendel, die die gleichen Körperformen tragen, gegeneinander versetzt starr verbinden, natürlich so, daß δ unverändert bleibt. Haben wir z. B. zwei um π gegeneinander versetzte, dann hat die treibende Kraft den Wert $(A_1 - A_2) \sin \varphi$, und es läßt sich zeigen, daß $(R_1^2 + R_2^2)/(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$ unverändert gehalten werden muß, soll δ konstant bleiben.

Und nun die letzte Merkwürdigkeit: die partikuläre Bewegung. Gehen wir von der Ruhe aus und wählen wir die Anfangslage φ_0 so, daß $\varphi_0 + \delta = \pi/2$, dann befolgt die Lebendige Kraft L die Gleichung

$$(1\,a) \qquad -A \,.\, \cos\delta \,.\, R \,.\, \cos(\varphi + \delta).$$

Die nächste Nulllage φ_1 liegt dann bei $\varphi_1 + \delta = 3\pi/2$; das Intervall beträgt also gerade π. *In ihm schwingt das Pendel genau wie in einem widerstandsfreien Medium, in dem die Intensität der Schwere und des Auftriebes im konstanten Verhältnis $\cos\delta : 1$ geschwächt und in ihrer Richtung von der Vertikalen um den „Widerstandswinkel" δ gegen die Ausgangslage der Bewegung hin verschoben erscheint.*

Man wird daran denken, die durch Gleichung (1 a) und (1) gegebenen Beziehungen zur Ermittelung des Widerstandskoeffizienten c zu benutzen, nachdem man sich, wie angegeben, überzeugt hat, daß ihre Voraussetzungen erfüllt sind, und zwar geben sie *absolute* Bestimmungen. Aus einem Satz von Winkelmessungen φ_0 und $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi$ gewinnt man $\delta = \pi/2 - \varphi_0$ durch graphische Interpolation und somit auch c.

Diese Methode hat den Vorzug, daß der Körper ein *ruhendes* Medium durchquert und daß *er am Hinter- und Vorderteile nicht gleichgeformt zu sein braucht.* Die Aufhängung muß der von Hrn. Frank angegebenen gleichen: zweifache Aufhängung an zwei Kugellagern, damit seitliche Drücke aufgehoben werden

können, die bei schief gestellten Körpern bei unserer Methode stark in die Erscheinung treten werden. Lagerreibung und Stangenwiderstände müssen und können in Rechnung gestellt werden.

Eine durch ein Übergewicht aus dem Gleichgewicht gebrachte reibungsfreie Präzisionswage vollführt Pendelschwingungen, die ähnlich wie die vorigen zu behandeln sind, jedoch wirkt hier ein Kräfte*aggregat:* Übergewicht und Eigengewicht, deren Hebelarme um $\pi/2$ gegeneinander versetzt sind. Da das Verhältnis beider Intensitäten bei Variation des Übergewichtes nicht konstant bleibt, so treffen die Sätze (B) und (D) nicht zu. Es soll hier nicht näher darauf eingegangen werden, auch nicht auf andere partikuläre Bewegungen, die unter der Einwirkung von einfachen und bekannten Kräften vor sich gehen können, z. B. Bewegung auf zykloidischer Bahn unter der Wirkung der Schwere.

Bei Widerstandsmessungen, besonders solchen in Flüssigkeiten, ist es wünschenswert, daß die Bewegung in einer *horizontalen* Ebene vor sich geht. Das führt uns zu der Aufgabe, die

Bewegung auf horizontaler Kreisbahn

zu studieren. Als treibende Kraft setzen wir an $K = -(D/R).\Theta$, wo Θ die Drehung aus der Ruhelage heraus bezeichne. Eine solche zurücktreibende Kraft liefert z. B. ein vollkommen elastischer Draht oder eine Feder, vertikal aufgehängt. Es gibt aber auch andere Anordnungen, wovon später die Rede sein soll. Wir denken uns zwei gleiche, um π versetzte Arme angebracht, die an ihren Enden den zu untersuchenden Körper in zwei gleichen Exemplaren tragen. R hat dieselbe Bedeutung wie oben, D bezeichne das Direktionsmoment. Setzen wir zur Abkürzung $w R \Theta = \xi$, so lautet jetzt

$$\Phi = -\frac{D}{w^2 R^2}(\xi - 1)$$

und demnach nach einigen Umstellungen

$$(2) \quad L = L_0 e^{-(\xi - \xi_0)} + \frac{D}{w^2 R^2} e^{-\xi}\{e^{\xi_0}(\xi_0 - 1) - e^{\xi}(\xi - 1)\},$$

gültig für positive Drehung bis zum nächsten Umkehrpunkte; die darauf erfolgende Herbewegung müssen wir wieder als eine erneute Hinbewegung auffassen.

(F) Nach (A) ist auch *hier die Bewegung unter allen Umständen oszillatorisch*; auch hier sind natürlich, falls die Bewegung aus der Ruhe ($L_0 = 0$) vor sich geht, *die Lagen der Umkehrpunkte unabhängig von der Intensität der treibenden Kraft.* Dies dient wieder zur Prüfung, ob im vorliegenden Falle unsere Widerstandsformel erfüllt ist. Dabei kommt uns zugute, daß hier keine Lagerreibung die Ergebnisse trübt. Bei der Vergrößerung oder Verkleinerung der Intensität ohne Störung der Kraft*form* ist darauf zu achten, daß die Masse des bewegten Systems unverändert bleibt, weil ja sonst w einen anderen Wert annähme. Ebenso wie nach Gleichung (1a) können wir nach Gleichung (2) durch Beobachtung der Umkehrpunkte w ermitteln. Allerdings ist die rechnerische Arbeit groß, da Nullstellen transzendenter Gleichungen bestimmt werden müssen. — Die durch Gleichung (2) repräsentierte Bewegung unterscheidet sich allgemein von der oben dargestellten Vertikalpendelbewegung durch folgende Eigentümlichkeit: falls die Bewegung aus der Ruhe heraus beginnt, sind die konsekutiven Nullstellen von L, also *die Lagen der Umkehrpunkte, nur abhängig von* ξ_0, *dem Produkte* $(w R \Theta_0)$! Wir gründen hierauf eine Methode der Widerstands*vergleichung.* Es seien $|\xi_0|\,|\xi_1| \ldots |\xi_n|$ die $n+1$ konsekutiven, beobachtbaren Nullstellen von L. Dann ist für zwei Wertesysteme der w, R, Θ_0, falls je zwei entsprechende ξ einander gleich sind,

$$|\xi_0| = w R\,|\Theta_0| = w' R'\,|\Theta_0'|$$

$$|\xi_n| = w R\,|\Theta_n| = w' R'\,|\Theta_n'|\,,$$

folglich dann

$$\frac{|\Theta_0|}{|\Theta_n|} = \frac{|\Theta_0'|}{|\Theta_n'|}\,.$$

Wir wählen im ungestrichenen Wertesystem eine Ausgangslage Θ_0 links von der Gleichgewichtslage und beobachten die n^{te} Umkehrstelle Θ_n; sodann suchen wir im gestrichenen Wertesystem eine Ausgangslage Θ_0', ebenfalls links von der Gleichgewichtslage, die so beschaffen ist, daß

$$\frac{|\Theta_0'|}{|\Theta_n'|} = \frac{|\Theta_0|}{|\Theta_n|}\,. \tag{3}$$

Dann sind die entsprechenden ξ in beiden Wertesystemen einander gleich, folglich das Verhältnis $\frac{w' R'}{w R} = \frac{\Theta_0}{\Theta_0'}$ auch bekannt.

Für die betrachtete Anordnung ist die angenommene streng lineare Beziehung zwischen Kraft und Drehungswinkel keine notwendige Bedingung. Wir setzen jetzt allgemeiner

$$K = \frac{-D}{R} \Theta^m = \frac{-D}{R} \frac{\xi^m}{(w R)^m},$$

wo der Exponent m, damit wir eine *anti*symmetrische Kraft in bezug auf die Gleichgewichtslage bekommen, das Verhältnis zweier ungeraden positiven Zahlen bedeute. Es ist zu beachten, daß unser Ansatz die Folgerung nach sich zieht, daß in der Gleichgewichtslage $dK/d\Theta$ unendlich groß, endlich oder null ist, je nachdem m größer, gleich oder kleiner als 1 ist. Bei einer elastischen Kraft ist dort $dK/d\Theta$ sicher endlich, andererseits aber auch für große Verdrehungen, die ja hier in Frage kommen, die Abhängigkeit $K = f(\Theta)$ sicher von parabolischer Art (mit m kleiner als 1). Man muß daher m etwas kleiner als 1 annehmen, wenn auch dadurch K in der unmittelbaren Umgebung der Gleichgewichtslage, wo seine (kleinen) Werte ohnedies nicht ins Gewicht fallen, nicht ganz sachgemäß dargestellt ist. Der im Versuchsfalle wirklich existierende Zahlenwert von m spielt im folgenden keine Rolle. Für Φ haben wir nun den Ausdruck

$$\frac{-D}{(w R)^{m+1}} e^{-\xi} \int e^{+\xi} \xi^m d\xi,$$

der für jedes positive oder negative ξ sicher einen endlichen Wert besitzt. Anstelle von (2) erhalten wir nun

$$L = L_0 e^{-(\xi - \xi_0)} - e^{-\xi} \{e^{\xi_0} \Phi_0 - e^{\xi} \Phi\}. \tag{4}$$

Also auch jetzt sind für $L_0 = 0$ die Umkehrpunkte nur von dem Produkte $(w R \Theta_0) = \xi_0$ abhängig. Dies trifft aber nicht mehr zu, wenn man eine *Summe* verschiedener Potenzen von Θ für K einsetzt; damit ist unter anderem Hysteresis ausgeschlossen.

Die besprochene Methode der Vergleichung von Widerständen setzt voraus, daß der Versuchskörper in bezug auf

Vorder- und Hinterteil gleich geformt ist. Ihre Feinheit besteht darin, daß große und viele Schwingungsbögen genau beobachtet werden können, wobei man aber die Bogen nicht zu klein werden lassen darf, weil sonst die unvermeidlichen Strömungen im Gase oder in der Flüssigkeit das Resultat fälschen.

Es ist bezeichnend, daß wir uns speziellerer Voraussetzungen über die Form der treibenden Einzelkraft auf der Kreisbahn entledigen können. Allerdings tritt dann ein neuer Übelstand auf, der aber zuweilen unbedeutend werden kann. Ist $K(\Theta)$ eine eindeutige, stetige Funktion der Elongation Θ mit der Bedingung, daß sie für $K = 0$ von positiven zu negativen Werten übergeht, wodurch Schwingungen gewährleistet sind [vgl. oben unter (A)], so ist

$$\Phi = e^{-wR\Theta} \int e^{+wR\Theta} K(\Theta)\, d\Theta \tag{5}$$

eine Funktion, die w nur in der Verbindung mit R enthält, es sind also unter denselben Voraussetzungen wie vorhin die Lagen der Umkehrpunkte nur von Θ_0 und dem *Produkte* $(w\,R)$ abhängig. Wenn wir also w und R so variieren, daß diese Lagen dieselben bleiben, dann ist das genannte Produkt konstant geblieben, womit wieder eine Methode der Widerstands*vergleichung* gegeben ist. Während wir aber vorhin die bei manchen Körperformen unsichere Größe R konstant halten durften, *müssen* wir jetzt R variieren. Andererseits haben wir den Vorteil erlangt, daß wir von der treibenden Kraft weiter nichts zu wissen brauchen, als daß sie hysteresisfrei ist. Sie braucht also z. B. nicht antisymmetrisch zur Gleichgewichtslage zu sein.

Bewegungsvorgänge mit *ausschließlich* minimalen Geschwindigkeiten (vgl. oben in der Einleitung) machen eine besondere Betrachtung nötig. Bei ihnen werden im allgemeinen alle drei der eingangs erwähnten Ursachen beteiligt sein, so daß der Widerstand von der Form $-(a\,v + b\,v^2)$ sein wird. Für die beiden extremen Fälle, daß reiner Verdrängungswiderstand $(-b\,v^2)$ bez. reiner Kohäsionswiderstand $(-a\,v)$ vorliegt, lassen sich Kriterien aufstellen, von denen jetzt noch ein besonderes für hin- und hergehende Bewegung entwickelt werden möge. Wir betrachten also Schwingungen, bei denen ξ_0 klein ist

gegen 1; dabei braucht die Auslage Θ_0 nicht klein zu sein. Die Bewegung beginne wieder aus der Ruhe heraus. Dann liefert unsere Gleichung (2) — oder auch (1) — durch Reihenentwickelung und Beschränkung auf die ersten Glieder den Ausdruck

$$(6) \qquad L = \frac{D}{w^2 R^2}\left\{\frac{\xi_0^2 - \xi^2}{2} + \frac{\xi_0^3 - \xi^3}{3} + \ldots.\right\} e^{-\varepsilon}.$$

Erst wenn die kleinen Größen dritter Ordnung von ξ_0 merklich sind, werden die Verschiebungen der Umkehrpunkte gegen die Gleichgewichtslage hin merklich. Um zu finden, in welchem Verhältnis zwei aufeinander folgende Exkursionen zueinander stehen, führen wir den absoluten Betrag a_0 der linksseitigen „reduzierten" Exkursion $\xi_0 = -a_0$ und a_1 den der rechtsseitigen $\xi_1 = +a_1$ ein und bilden $\varepsilon = a_1/a_0$, eine Größe, die nahe gleich 1 sein muß. Gleichung (6) liefert für ε die Bestimmungsgleichung

$$\varepsilon^2(a_0 \cdot \varepsilon + \tfrac{3}{2}) + a_0 - \tfrac{3}{2} = 0$$

hieraus

$$(7) \qquad \varepsilon^2 \sim \frac{1 - \frac{2}{3}a_0}{1 + \frac{2}{3}a_0}; \quad \text{also} \quad \varepsilon \sim 1 - \tfrac{2}{3}a_0.$$

(G) *Die Schwingungen nähern sich mit abnehmenden Exkursionen ungedämpften Schwingungen, wogegen die lineare Widerstandsformel zu einem konstanten Dämpfungsverhältnis selbst bei den kleinsten Schwingungen führt.*

Man könnte noch daran denken, in der Größe der Schwingungsdauern bei beiden Widerstandsarten eine wesentliche Verschiedenheit zu finden. Das ist aber nicht der Fall. Die Zeit für die Zurücklegung des reduzierten Weges $a_0 + a_1$, also die halbe Schwingungsdauer, ergibt sich aus Gleichung (6) für $\varepsilon \sim 1$ zu

$$(8) \qquad \pi \cosh \frac{a_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{m R^2}{D}};$$

sie ist, wie bei der linearen Formel, etwas größer als im Vakuum, selbst wenn der Unterschied der Exkursionen unmerklich ist.

Es mögen nun für *kleine Schwingungsbewegungen* die *Kriterien* zusammengestellt werden.

Linearer Widerstand.	Quadratischer Widerstand.
(A) Aperiodizität möglich.	Aperiodizität unmöglich.
(G) Dekrement der periodischen Bewegung konstant.	Dekrement nimmt mit abnehmenden Exkursionen beständig ab.
(B) Lagen der Umkehrpunkte von der Intensität der treibenden Kraft abhängig.	Lagen der Umkehrpunkte von der Intensität der Einzelkraft unabhängig.

(D) Bei Variation nur der Intensität der Einzelkraft ist T_1/T_2, das Verhältnis entsprechender Schwingungszeiten, vom Widerstand des Mediums

abhängig — unabhängig.

Die Tangentialbeschleunigung.

Die Grundgleichung (II) liefert uns direkt die Größe des tangentialgerichteten Widerstandes; wir brauchen sie nur mit w zu multiplizieren, vgl. Gleichung (I). Wir erhalten nach Ausführung einer partiellen Integration

$$\text{(III)} \quad -wL = -wCe^{-\Omega} - K + we^{-\Omega}\int e^{+\Omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{K}{w}\right)ds.$$

Da nun aber dL/ds identisch ist mit $m\,dv/dt$, so erhalten wir aus Gleichung (I) auch folgende, merkwürdige Beziehung

$$\text{(IV)} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = -wCe^{-\Omega} + we^{-\Omega}\int e^{+\Omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{K}{w}\right)ds,$$

gültig bis zur nächsten Nullstelle der Lebendigen Kraft.

Die Tangentialbeschleunigung des Körpers (m) setzt sich also im allgemeinen aus zwei Teilen additiv zusammen: Die eine ist eine mit der Länge des zurückgelegten Weges infolge des Widerstandes beständig abnehmende Beschleunigung; sie ist von der treibenden Kraft unabhängig. Die andere ist von dem Verhältnis der Kraft zu dem Hemmungsfaktor abhängig, aber nur sofern dies Verhältnis längs der Bahn variiert.

Diese Aussagen gelten, wie klein auch der Widerstand des Mediums sein mag. Der Übergang zu $w = 0$ ist in der Gleichung stetig; der Wortlaut wird aber dann ein anderer, und zwar der bekannte.

Einige einfache Fälle mögen als Erläuterung erwähnt werden.

1. Ein starrer Körper von verschwindend kleinem Gewichte bewege sich unter dem Einfluß des Auftriebes (K)

vertikal in einem Medium, dessen Dichte längs der Vertikalen beliebig in stetiger Weise variiere, doch so, daß sie in unmittelbarer Umgebung des Körpers als kaum veränderlich angesehen werden darf (Blase in einer Flüssigkeit; Luftballon).

2. Ein starrer, schwerer Körper bewege sich unter dem Einfluß der konstanten Schwerkraft (K) in vertikaler Richtung in einem Medium konstanter Dichte mit verschwindend kleinem Auftriebe (vertikaler Wurf; vertikaler Fall).

3. Ein starrer Körper bewege sich horizontal in einem Medium konstanter Dichte unter dem Einfluß einer konstanten, oder gar keiner Horizontalkraft (K), die er in Richtung der Bahn erleidet oder entwickelt (Bewegung eines Schiffes, eines Fahrzeuges).

In diesen drei verschiedenen Fällen vollzieht sich die Bewegung des Körpers, wie klein w auch sein mag, nach demselben Gesetze

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -wCe^{-\Omega}. \tag{9}$$

Die Beschleunigung ist unabhängig von der treibenden Kraft; letztere könnte auch fehlen, ohne daß dadurch die Bewegungsform eine andere würde. Aber die Konstante $C=(L_0-\Phi_0)e^{-\Omega_0}$; die Vorzeichen und Intensität der Beschleunigung bestimmt, hat in den verschiedenen Fällen verschiedene Vorzeichen und Werte. Für $w=0$ hat man $m(d^2s/dt^2)=K_0$, wie es sein soll.

Verdrängungswiderstand in einem schwerflüssigen Medium.

Angenommen, der Verdrängungswiderstand in einem *schwerflüssigen* Medium sei im Zustand der Bewegung, wie klein sie auch sei, darstellbar durch die Formel $-r-wL$, wo die gegebene positive Größe r ebenso wie w im allgemeinen von s abhängig gedacht werden muß. Dieser allgemeinere Fall läßt sich nach derselben Methode wie der besondere ($r=0$) behandeln, wenn wir voraussetzen, daß K in jedem Punkte der Bahn dem absoluten Betrage nach größer als r ist; denn im anderen Falle könnte es vorkommen, daß der Widerstand $-r$ rechnerisch eine Bewegung *erzeugte*, was ja seinem Wesen nach unmöglich ist. Wir können dann $-r$ rechnerisch zu der treibenden Kraft K schlagen, so daß in den bisher ent-

wickelten Beziehungen $K - r$ an die Stelle von K zu setzen ist. Man sieht, daß von den allgemeinen Sätzen (A) bestehen bleibt.

Vermutlich steht r in einem konstanten Verhältnis zu w. Dann erhalten wir für den tangentialen Widerstand entsprechend Gleichung (III) den Ausdruck

$$\text{(IIIa)} \quad -r - wL = -K - r - wC'e^{-\Omega} + we^{-\Omega}\int e^{+\Omega}\frac{d}{ds}(K/w)\,ds$$

und analog Gleichung (IV)

$$\text{(IVa)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{ds} = m\dfrac{d^2s}{dt^2} = K - r - wC'e^{-\Omega} - w\Phi \\ \qquad = -wC'e^{-\Omega} + we^{-\Omega}\int e^{+\Omega}\dfrac{d}{ds}(K/w)\,ds. \end{cases}$$

Gleichung (IVa) unterscheidet sich also von Gleichung (IV) nur durch eine andere Konstante C'. Unter den gemachten Voraussetzungen über K und r würden sich demnach die oben angeführten drei Beispiele auch in einem schwerflüssigen Medium nach der gleichen Bewegungsform (9) abspielen.

Es sind Versuche in Vorbereitung, die die Brauchbarkeit der entwickelten Meßmethoden erproben sollen.

Giessen, Physik. Inst. der Univ., am 22. März 1907.

(Eingegangen 24. März 1907.)

12. *Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips; von A. Einstein.*

In einer letztes Jahr erschienenen wichtigen Arbeit[1]) hat Hr. J. Stark dargetan, daß die bewegten positiven Ionen der Kanalstrahlen Linienspektra emittieren, indem er den Doppler-Effekt nachwies und messend verfolgte. Er stellte auch Untersuchungen an in der Absicht, einen Effekt zweiter Ordnung (proportional $(v/V)^2$) nachzuweisen und zu messen; die nicht speziell für diesen Zweck eingerichtete Versuchsanordnung genügte jedoch nicht zur Erlangung eines sicheren Resultates.

Ich will im nachfolgenden kurz zeigen, daß das Relativitätsprinzip in Verbindung mit dem Prinzip der Konstanz der Geschwindigkeit des Lichtes jenen Effekt vorauszubestimmen gestattet. Wie ich in einer früheren Arbeit[2]) gezeigt habe, geht aus jenen Prinzipien hervor, daß eine gleichförmig bewegte Uhr, vom „ruhenden" System aus beurteilt, langsamer läuft als von einem mitbewegten Beobachter aus beurteilt. Bezeichnet ν die Anzahl der Schläge der Uhr pro Zeiteinheit für den ruhenden, ν_0 die entsprechende Anzahl für den mitbewegten Beobachter, so ist

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

oder in erster Annäherung

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2.$$

Das Strahlung von bestimmten Frequenzen aussendende und absorbierende Atomion der Kanalstrahlen ist nun als eine rasch bewegte Uhr aufzufassen, und es ist daher die soeben angegebene Beziehung auf dasselbe anwendbar.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. **21.** p. 401. 1906.
2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 903. 1905.

Es ist aber zu beachten, daß die Frequenz ν_0 (für den mitbewegten Beobachter) unbekannt ist, so daß die obige Beziehung der experimentellen Prüfung nicht direkt zugänglich ist. Es ist aber anzunehmen, daß ν_0 auch gleich ist der Frequenz, welche dasselbe Ion im ruhenden Zustand emittiert bez. absorbiert, und zwar aus folgendem Grunde. Aus der Tatsache, daß dasselbe Linienspektrum unter sehr verschiedenen Bedingungen entsteht, entnehmen wir, daß die Frequenz ν_0 nicht abhängig ist von Wechselwirkungen zwischen bewegten Ionen und ruhendem Gas, sondern daß sie dem Ion allein eigentümlich ist; hieraus folgert man direkt mit Hilfe des Relativitätsprinzips, daß ν_0 gleich sein muß der Frequenz der von einem ruhenden Ion emittierten bez. absorbierten Strahlung.

Die Gleichung

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2$$

gibt also direkt den gesuchten Effekt zweiter Ordnung.

Die von Hrn. Stark für den Effekt angegebenen Zahlenwerte sind mehr als zehnmal so groß als die aus der angegebenen Formel hervorgehenden. Es erscheint mir wahrscheinlich, daß sichere Resultate in der vorliegenden Frage erst dann zu erwarten sind, wenn es gelungen ist, (nichtleuchtende?) Kanalstrahlen im völlig gasfreien Raume zu erzielen.

Bern, März 1907.

(Eingegangen 17. März 1907.)

13. *Das α-Teilchen und das periodische System der Elemente;* von *A. van den Broek.*

Die neueste Bestimmung von e/m für das α-Teilchen (des Produkts Radium *C*, wie des Ra *A*, des Ra *F*, des Aktinium *B* und des Thor *C*) durch Rutherford hat bekanntlich den Wert $e/m = 5 \times 10^3$ ergeben, also genau halb so groß wie für das Wasserstoffatom. „Demgemäß lassen sich über die Natur des α-Teilchens folgende Hypothesen aufstellen: Entweder besteht es aus einem Wasserstoffmolekül in Verbindung mit einem elektrischen Elementarquantum, oder aus einem zwei Elementarquanta mit sich führenden Heliumatom, oder aus einem halben Heliumatom, das mit einem Elementarquantum vereinigt ist. Welche von diesen drei Alternativen zutrifft, läßt sich experimentell schwer entscheiden.“ [1])

Wo das Experiment versagt, bleibt uns nur die reine Spekulation übrig, und so möchte es angemessen erscheinen, zu versuchen, ob nicht dieses Heliumatom oder das „halbe Heliumatom“ (sagen wir lieber Alphon, da ein „halbes“ Atom ein Unding ist) sich besser eignen sollte, um als Urelement aufzutreten, als das Proutsche H-Atom jemals vermochte. Zwar sind die Atomgewichtszahlen nicht einfache Multiplen von zwei oder vier; auch kennt das heutige periodische System mehr Elemente oder wenigstens „Stellen“, als einem System von Heliaden, weniger aber als einem System von Alphaden passen würde. Daß dennoch zwischen dem periodischen System und, wenigstens, einem alphaden System eine so große Übereinstimmung besteht, daß wir das zweite als das Fundament des ersten ansehen dürfen, läßt sich folgendermaßen begründen.

Das jetzige periodische System besteht bekanntlich aus elf Reihen von je acht Elementen oder „Stellen“ und drei

1) E. Rutherford, Die Radioaktivität. p. 557. 1907; Phil. Mag. 12. p. 364. 1906.

Gruppen von je drei Elementen. Daß diese Gruppen nicht als Reihen im System aufgenommen sind, findet seinen Grund erstens in der geringen Zahl ihrer Elemente und zweitens in der Schwierigkeit, sie einer bestimmten Vertikalreihe zuzuordnen.

Das erste Argument ist nicht sehr maßgebend; auch die Yb- und die Ra-Reihe bestehen bis jetzt nur aus drei ganz sicheren Elementen. Andererseits könnten die Elemente Cu, Ag, Au, auch Zn, Cd, Hg, und bei der Fe-Gruppe auch Mn und selbst Cr, ebensogut in eine solche, als in ihre jetzigen Reihen aufgenommen werden, wie das auch tatsächlich von Mendelejeff teilweise, von Lothar Meyer ganz (und zwar in beider sogenannten 2. Tabelle) getan ist.

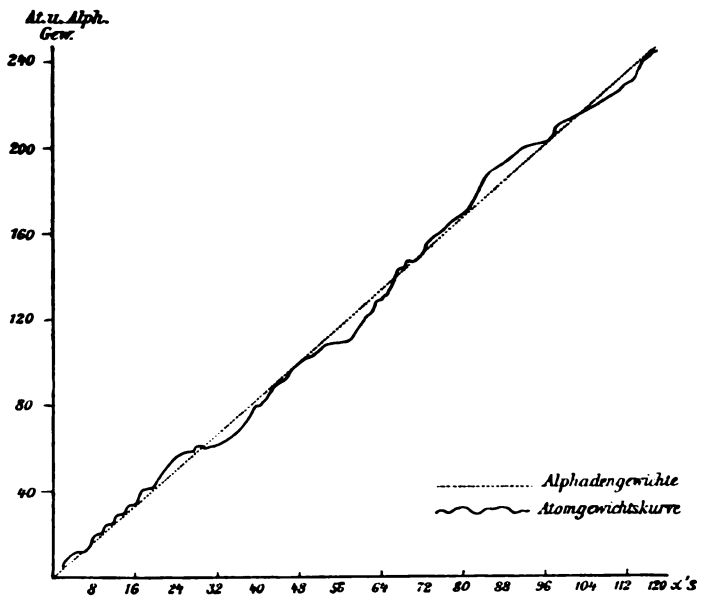
Und auch das zweite Argument kann nicht schwer wiegen. Bei so vielen periodischen Erscheinungen finden wir ja neben Perioden mit stark ausgebildeten Maxima solche, bei denen ein Maximum kaum zu erkennen ist. So schwanken z. B. bei dem periodischen Wechsel der Sonnenfleckenhäufigkeit, der doch eine ganz bestimmte Periode von 11, 12 Jahren aufweist, die einzelnen Perioden zwischen 17 (1788—1805) und 8 Jahren (1829—1837), die Häufigkeits-Relativzahlen der Maxima zwischen 138 (1837, 1870) und 64 (1883), sinkt also im letzten Falle fast bis zur Durchschnittszahl zurück.

Daß derartige Maximum-Jahre, z. B. in ihrem Einfluß auf die Variation der magnetischen Deklination, miteinander nicht mehr vergleichbar sind, ist ohne weiteres klar. Und doch sollte niemand auf den Gedanken kommen, bei einer tabellarischen oder graphischen Darstellung dieser periodischen Erscheinungen derartige wenig ausgesprochene Perioden einfach auszuschalten und beiseite zu stellen.

Wollen wir also das System der Elemente konsequenterweise als periodisches System darstellen, so müssen wir für die Fe-, resp. Ru- und Ir-Gruppe je eine neue Reihe einfügen. Lassen wir dann, wie üblich, auch für die Reihe der seltenen Erden und außerdem für die vielen neuentdeckten Umwandlungsprodukte der radioaktiven Elemente, die ja auch im jetzigen periodischen System keinen Platz finden, je eine Reihe frei, so bekommen wir ein System von 15 Reihen von je acht Stellen.

	VII	0	I	II	III	IV	V	VI
1	2 (α)	4 He 4	6 Li 7,03	8 Be 9,1	10 B 11	12 C 12	14 N 14,04	16 O 16
2	18 F 19	20 Ne 20	22 Na 23,05	24 Mg 24,36	26 Al 27,1	28 Si 28,4	30 P 31	32 S 32,06
3	34 Cl 35,45	36 Ar 39,9	38 K 39,15	40 Ca 40,1	42 Sc 44,1	44 Ti 48,1	46 V 51,2	48 Cr 52,1
4	50 Mn 55	52	54	56 Fe 55,9	58 Co 59	60 Ni 58,7	62	64
5	66	68	70 Cu 63,6	72 Zn 65,5	74 Ga 70	76 Ge 72,5	78 As 75	80 Se 79,2
6	82 Br 79,96	84 Kr 81,8	86 Rb 85,5	88 Sr 87,6	90 Y 89	92 Zr 90,6	94 Nb 94	96 Mo 96
7	98	100	102	104 Ru 101,7	106 Rh 103	108 Pd 106,5	110	112
8	114	116	118 Ag 107,93	120 Cd 112,4	122 Jn 115	124 Sn 119	126 Sb 120,2	128 Te 127,6
9	130 J 126,97	132 Xe 128	134 Cs 132,9	136 Ba 137,4	138 La 138,9	140 Ce 140,25	142 Nd 143,6	144 Pr 140,5
10	146	148	150 Sa 150,3	152	154 Gd 156	156	158 Tb 160	160
11	162	164	166 Er 166	168 Tu 171	170 Yb 178	172	174 Ta 183	176 W 184
12	178	180	182	184 Os 191	186 Ir 193	188 Pt 194,8	190	192
13	194	196	198 Au 197,2	200 Hg 200	202 Tl 204,1	204 Pb 206,9	206 Bi 208,5	208
14	210	212	214	216	218	220	222	224
15	226	228	230	232 Ra 225	234	236 Th 232,5	238	240 U 238,5

Konstruieren wir aber jetzt ein gleichartiges (hypothetisches) System von allen theoretisch möglichen Alphadengewichten, also die kontinuierliche Reihe aller ebenen ganzen Zahlen bis 240 in 15 Reihen von je acht Stellen eingeteilt, und schreiben wir dieses System zur besseren Vergleichung in das periodische System der Elemente hinein, so decken sich beide Systeme, nicht nur, wie selbstverständlich, die Reihen und Stellen, sondern auch, was keineswegs zu erwarten war, im großen und ganzen die Gewichtszahlen vollständig. Zwar finden wir im einzelnen Differenzen von bis 17 Proz. der betreffenden Atomgewichte, über das ganze System berechnet aber heben sich diese Differenzen vollständig auf.



Nehmen wir nämlich einerseits die Summe aller „internationalen" Atomgewichte (0 = 16), andererseits die Summe aller diesen Stellen zugehörigen Alphadengewichte, so bekommen wir einerseits 7723,65, andererseits 7728, also nur eine Gesamtdifferenz von 0,06 Proz.

Daß aber nicht etwa die eingeschobenen 14., 12., 10. oder 7. Reihe daran Schuld haben, folgt schon daraus, daß nicht

nur U (238,5 statt 240), sondern sowohl Bi (208,5 statt 206) wie Ba (137,4 statt 136) und Mo (96 und 96) am besten stimmen.

Wir sind also nicht nur berechtigt, sondern sogar gezwungen zu der Annahme: Dem jetzigen periodischen System der Elemente liegt ein System der Alphaden zugrunde, oder: die Elemente sind nur sekundäre Abänderungen von α-Teilchenkonglomerationen oder Alphaden.

Noordwyk, 10. Febr. 1907.

(Eingegangen 11. März 1907.)

14. *Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz;* von Paul Ehrenfest.

Hr. Abraham hat darauf hingewiesen, daß für ein (starres) *nicht*-kugelförmiges Elektron gleichförmige Translationen nicht nach jeder Richtung hin *kräftefrei* stattfinden können. Soll zum Beispiel ein starres homogen geladenes Elektron von der Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoides eine gleichförmige Translation schief zu seinen Hauptachsen ausführen, so muß ein von äußeren Kräften herrührendes Drehmoment dasjenige Drehmoment kompensieren, welches das Feld des bewegten Elektrons auf das Elektron ausübt.[1])

Gewisse Bedenken gegen die übliche Definition und Berechnung der scheinbaren Masse deformierbarer Elektronen veranlassen mich, die nachfolgende Bemerkung vorzubringen, von deren Erledigung die genauere Formulierung jener Bedenken abhängig ist.

Die Lorentzsche Relativitäts-Elektrodynamik wird in der Formulierung, in der sie Hr. Einstein[2]) publiziert hat, ziemlich allgemein als abgeschlossenes System angesehen.[3]) Dementsprechend muß sich aus ihr rein deduktiv eine Antwort auf die Frage ergeben, die man durch Übertragung des Abrahamschen Problems vom starren auf das *deformierbare* Elektron erhält: Angenommen, es existiere ein deformierbares Elektron, das in der Ruhe irgend eine *nicht*-kugelförmige und *nicht*-

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. **10.** p. 174. 1903; vgl. auch Theorie der Elektrizität **2.** p. 170—173. Die Kräfte, die zwei Volumenelemente des Elektrons aufeinander ausüben, fallen bei der Bewegung nicht mehr in Richtung der Verbindungslinie. So liefert jedes Elementenpaar ein Drehmoment. Nur bei Translation parallel den Hauptachsen ist das summative Drehmoment wegen Symmetrie gleich Null.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **18.** p. 639. 1905.

3) Vgl. besonders W. Kaufmann, Ann. d. Phys. **19.** p. 487 und **20.** p. 639. 1906.

ellipsoidische Gestalt besitzt.[1]) Bei gleichförmiger Translation erfährt dieses Elektron nach Hrn. Einstein die bekannte Lorentz-Kontraktion. *Ist nun für dieses Elektron gleichförmige Translation nach jeder Richtung hin kräftefrei möglich oder nicht?*

Wenn sie *nicht möglich* ist, so muß man dem Relativitätsprinzip zuliebe durch eine *neue* Hypothese die Existenz solcher Elektronen ausschließen; andernfalls besäße man ja in ihnen ein Instrument, um absolute Ruhe zu konstatieren.

Wenn sie *möglich* sein soll, so wäre zu zeigen, wie dies aus dem Einsteinschen System gefolgert werden kann, ohne Heranziehung ganz neuer Axiome.[2])

---

1) Vgl. z. B. M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. Berlin 1906. p. 137: „dafür erwächst andererseits der Vorteil, daß man dem (deformierbaren) Elektron weder Kugelgestalt noch überhaupt eine bestimmte Form zuzuschreiben braucht, um zu einer bestimmten Abhängigkeit der Trägheit von der Geschwindigkeit zu gelangen."

2) Soll (entsprechend dem Relativitätsprinzip) ein geladener Kondensator schief zur Erdbewegung gestellt kein Drehmoment aufweisen und soll ein sich entladender, mit der Erde bewegter Kondensator keinen Rückstoß aufweisen, so muß man die Hypothese heranziehen: die Molekularkräfte, die durch die Ladung des Kondensators in jenen Bestandteilen hervorgerufen werden, welche die Kondensatorplatten auseinanderhalten, diese Molekularkräfte sorgen in beiden Fällen für entsprechende Gegenreaktionen. — Nun hat andererseits Hr. Abraham gezeigt (Physik. Zeitschr. 5. p. 576. 1904; Theorie der Elektrizität 2. p. 205): Wenn man die longitudinale Masse des deformierbaren Elektrons in der üblichen Weise berechnet, so muß man dem Elektron eine außerelektromagnetische Energie innerer Deformationskräfte zuschreiben, um den Energiesatz aufrecht zu erhalten. Man könnte also diese außerelektromagnetischen Kräfte (analog jenen Molekularkräften) das elektromagnetische Drehmoment kompensieren lassen. So hätte man den (rein elektromagnetischen) Energie- und Flächensatz aufgegeben und behielte nur noch den Schwerpunktsatz bei. Und doch braucht man nur gerade ihn noch ebenso preiszugeben, wie man den Energiesatz schon preisgegeben hat — *dann kann man für das Lorentz-Elektron jede beliebige scheinbare Masse besorgen, also jedes Messungsresultat mit dem Relativitätsprinzip in Einklang bringen.* (Am einfachsten bietet sich freilich für die scheinbare Masse der Wert Null; so wie nach der Relativitätstheorie auch ein makroskopischer Kondensator durch Ladung keinen Massenzuwachs erhalten darf.)

(Eingegangen 19. März 1907.)

15. *Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. Paul Ehrenfest: „Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz“; von A. Einstein.*

In der genannten Abhandlung sind folgende Bemerkungen enthalten:

„Die Lorentzsche Relativitätselektrodynamik wird in der Formulierung, in der sie Hr. Einstein publiziert hat, ziemlich allgemein als abgeschlossenes System angesehen. Dementsprechend muß sich aus ihr rein deduktiv eine Antwort auf die Frage ergeben, die man durch Übertragung des Abrahamschen Problems vom starren auf das deformierbare Elektron erhält: Angenommen, es existiere ein deformierbares Elektron, das in der Ruhe irgend eine nicht-kugelförmige und nicht ellipsoidische Gestalt besitzt. Bei gleichförmiger Translation erfährt dieses Elektron nach Hrn. Einstein die bekannte Lorentz-Kontraktion. Ist nun für dieses Elektron gleichförmige Translation nach jeder Richtung hin kräftefrei möglich oder nicht?“

Hierzu habe ich folgendes zu bemerken:

1. Das Relativitätsprinzip oder — genauer ausgedrückt — das Relativitätsprinzip zusammen mit dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist nicht als ein „abgeschlossenes System“, ja überhaupt nicht als System aufzufassen, sondern lediglich als ein heuristisches Prinzip, welches für sich allein betrachtet nur Aussagen über starre Körper, Uhren und Lichtsignale enthält. Weiteres liefert die Relativitätstheorie nur dadurch, daß sie Beziehungen zwischen

sonst voneinander unabhängig erscheinenden Gesetzmäßigkeiten fordert.

Die Theorie der Bewegung des Elektrons beispielsweise kommt folgendermaßen zustande. Man setzt die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum für ein Koordinatenzeitsystem voraus. Durch Anwendung der vermittelst des Relativitätssystems hergeleiten Ort-Zeit-Transformation findet man die Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte. Unter Benutzung der letzteren findet man durch abermalige Anwendung der Ort-Zeit-Transformation aus dem Gesetz für die Beschleunigung des langsam bewegten Elektrons (welches angenommen bez. der Erfahrung entnommen wurde) das Gesetz für die Beschleunigung des beliebig rasch bewegten Elektrons. Es handelt sich hier also keineswegs um ein „System", in welchem implizite die einzelnen Gesetze enthalten wären, und nur durch Deduktion daraus gefunden werden könnten, sondern nur um ein Prinzip, das (ähnlich wie der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie) gewisse Gesetze auf andere zurückzuführen gestattet.

2. Als man sich noch nicht auf das Relativitätsprinzip stützte, sondern die Bewegungsgesetze des Elektrons auf elektrodynamischem Wege zu ermitteln strebte, sah man sich genötigt, über die Verteilung der Elektrizität bestimmtere Annahmen zu machen, damit das Problem kein unbestimmtes sei. Man dachte sich dabei die Elektrizität auf einem (starren) Gerüst verteilt. Es ist wohl zu beachten, daß die Gesetze, nach welchen ein solches Gebilde sich bewegt, nicht aus der Elektrodynamik allein hergeleitet werden können. Das Gerüst ist ja nichts anderes als die Einführung von Kräften, welche den elektrodynamischen das Gleichgewicht leisten. Wenn wir das Gerüst als einen starren (d. h. durch äußere Kräfte nicht deformierbaren) Körper ansehen, so kann das Problem der Bewegung des Elektrons dann und nur dann auf deduktivem Wege ohne Willkür gelöst werden, wenn die Dynamik des starren Körpers hinreichend genau bekannt ist.

Falls die Relativitätstheorie zutrifft, sind wir von letzterem Ziele noch weit entfernt. Wir besitzen erst eine Kinematik der Paralleltranslation und einen Ausdruck für die

kinetische Energie eines in Paralleltranslation begriffenen Körpers, falls letzterer mit anderen Körpern nicht in Wechselwirkung steht[1]); im übrigen ist sowohl die Dynamik als auch die Kinematik des starren Körpers für den vorliegenden Fall noch als unbekannt zu betrachten.

Bern, den 14. April 1907.

1) Daß letztere Einschränkung wesentlich ist, werde ich demnächst in einer Arbeit zeigen.

(Eingegangen 16. April 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 23.

1. *Über die Oxydation des Stickstoffs bei der Wirkung der stillen Entladung auf atmosphärische Luft;*

von E. Warburg und G. Leithäuser.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

§ 52. Die teilweise Ozonisierung des Luftsauerstoffs durch die stille Entladung ist von einer teilweisen Oxydation des Luftstickstoffs begleitet. In einer früheren Mitteilung haben wir die ganze Menge der entstandenen nitrosen Gase bestimmt.[1]) Es handelt sich jetzt weiter um die Art des gebildeten Stickoxyds.

Hautefeuille und Chappuis[2]) haben entdeckt, daß durch die stille Entladung in trockenen Stickstoff–Sauerstoffgemischen neben dem Ozon ein gasförmiger Körper entsteht, welcher durch sein Absorptionsspektrum im sichtbaren Gebiet scharf charakterisiert ist. Sie gelangen zu der Ansicht, daß dieser Körper, für welchen sie die Formel N_2O_6 finden[3]) und welchen sie Übersalpetersäure (acide pernitrique) nennen, das primäre, durch die elektrische Entladung gebildete Stickoxyd sei.

Doch liegt die Möglichkeit vor, daß außerdem andere Stickoxyde, welche im sichtbaren Gebiet kein Absorptionsspektrum zeigen, gleichzeitig entstehen. Wir haben zunächst die Bildungsweise und die Eigenschaften jenes neuen Körpers, welchen wir den Körper Y nennen wollen, näher in Betracht gezogen.

§ 53. Es ergab sich bald, daß es zur Darstellung von Y der stillen Entladung nicht bedarf, daß dieser Körper vielmehr durch Einwirkung von trockenem Ozon irgendwelcher Her-

1) E. Warburg u. G. Leithäuser, Ann. d. Phys. **20.** p. 743. 1906.

2) P. Hautefeuille u. J. Chappuis, Compt. rend. **92.** p. 80. 1881.

3) Dieselben, Compt. rend. **94.** p. 1112 u. 1306. 1882; Ann. de l'école normale sup. (3) **1.** p. 103. 1884; l. c. (2) **11.** p. 166. 1882.

kunft auf N_2O_5 leicht erhalten wird. Fig. 1 zeigt den von uns benutzten Apparat. N_2O_4 entwickelt durch Erhitzen von Bleinitrat im Sauerstoffstrom, getrocknet durch P_2O_5, wird in dem U-Rohr *A* bei -79^0 zu einem weißen schneeartigen Körper kondensiert. Ein Pfropf von Glaswolle bei *h* verhindert das Mitreißen von Tröpfchen durch den Gasstrom.

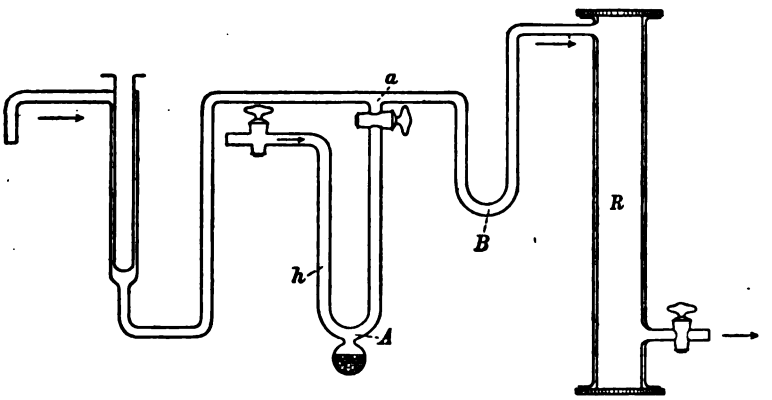


Fig. 1.

Man erwärmt das N_2O_4 auf 18^0, wobei es flüssig wird, und läßt es in einem langsamen, durch einen Hahn regulierbaren Sauerstoffstrom zu möglichst konzentriertem Ozon hinzutreten. Bei *a*, wo N_2O_4 und O_3 sich mischen, verschwindet unter starker Wärmeentwickelung die braune Farbe des NO_2 als Zeichen für die Bildung des N_2O_5. Zur völligen Ausnutzung des Ozons reguliert man die Geschwindigkeit des N_2O_4-Stromes so, daß die braune Farbe bei *a* gerade verschwindet. In *B* sammelt sich bei -79^0 das N_2O_5 als weißer Schnee. Die Darstellung des N_2O_5 durch Oxydation des N_2O_4 mittels Ozon ist bereits von Helbig[1]) angegeben.

1 Mol N_2O_5 soll mit Wasser 2 Mol HNO_3 geben. Um dies und dadurch den Grad der Reinheit des N_2O_5 zu prüfen, kondensierten wir das N_2O_5 in einem kleinen U-Rohr, das abgeschmolzen und alsdann gewogen wurde, ließen in der Kälte langsam durch die eine unter Wasser abgebrochene Spitze

1) Dem. Helbig, Atti Lincei (5) 12. p. 211. 1903.

Wasser eintreten, bestimmten die erhaltene HNO_3-Menge durch Titrieren mit $^1/_{10}$ normaler Natronlauge und Methylorange, und wogen endlich das leere U-Rohr mit der abgebrochenen Spitze. Wir fanden in zwei Versuchen:

Vers. Nr.	Gewicht N_2O_5	Mol N_2O_5	NaOH $^1/_{10}$ cbcm	Mol HNO_3	$\frac{\text{Mol } N_2O_5}{\text{Mol } HNO_3}$
1	0,343	0,00318	59,2	0,00592	0,537
2	0,2119	0,00196	37,67	0,00377	0,520

Das gefundene Gewicht des N_2O_5 ist also etwas zu groß (vgl. § 59).

Bringt man nun das Reservoir *B* mit dem N_2O_5 auf eine Temperatur von 0—20°, je nach dem gewünschten Dampfdruck, und leitet einen Ozonstrom darüber weg in ein Rohr *R* von etwa 30 cm Länge, das durch aufgekittete Glasplatten verschlossen ist, so zeigt dieses Rohr das Absorptionsspektrum von *Y*. Das von uns benutzte Ozon stammte in der Regel aus einer Siemensschen Röhre; doch lieferte elektrolytisches Ozon das gleiche Ergebnis.

Ist *Y*, als eine Stickstoff–Sauerstoffverbindung betrachtet, mit O_3 und N_2O_5 im Dissoziationsgleichgewicht — was nicht feststeht —, so muß nach dem Massenwirkungsgesetz die Konzentration von *Y* der Konzentration jener beiden Körper proportional sein; daß sie mit diesen Konzentrationen wächst, lehrt die Erfahrung.

§ 54. Im folgenden verzeichnen wir die Wellenlängen in $\mu\mu$ des von uns durch ein Rowlandsches Gitter dargestellten Absorptionsspektrums von *Y*. Das 70 cm lange Absorptionsrohr enthielt bei der Reihe 1 viel N_2O_5 (Partialdruck des N_2O_5 13,7 mm, des O_3 76 mm), bei der Reihe 2 nur wenig. Das Absorptionsspektrum kam in beiden Fällen stark zum Vorschein, im zweiten Fall erst nach Erwärmen des Rohres auf etwa 60° (§ 56); die von Chappuis[1]) sowie die von E. Ladenburg und E. Lehmann[2]) gemessenen Wellenlängen sind beigefügt.

1) J. Chappuis, Ann. de l'école normale sup. (2) **11**. p. 169. 1882.
2) E. Ladenburg u. E. Lehmann, Ann. d. Phys. **21**. p. 305. 1906.

Chappuis	Ladenburg u. Lehmann	Warburg u. Leithäuser 1	Warburg u. Leithäuser 2
668—665	670—667	662—660	664—660
639	638	637,6	637
632—628	628	629—625	630—626
628—625	622	623—622	624—622
617		613	613
606	610	604	604
598		596	597
590—588,5		589	589
		581	581
		559	559
		547	546
		536	536
		528	529
			521
			513

Die Wellenlänge des ersten Streifens fanden wir hiernach merklich kleiner als die anderen Beobachter; doch ergab sich mit unserem Apparat die Wellenlänge der benachbarten roten Wasserstofflinie richtig zu 656.

Außer den verzeichneten Linien sieht man noch eine größere Anzahl von schwachen Linien im Grün. Chappuis, welcher mit einem Rohr von 2 m Länge beobachtete, gibt nur die ersten acht Streifen an; die Herren Ladenburg und Lehmann, welche ein Rohr von 1 m Länge benutzten, erwähnen nur die fünf ersten Streifen. Man darf daraus schließen, daß wir den Körper *Y* in einer höheren Konzentration als die früheren Beobachter unter Händen hätten.

§ 55. Das Spektrum von *Y* verschwindet, wie schon Hautefeuille und Chappuis fanden, mit der Zeit, wobei zuerst die Linien im Grün, zuletzt die starken Linien im Rot verblassen. Wir haben zuerst festgestellt, daß mit dem Spektrum von *Y* auch das Ozon verschwunden ist. Zu dem Ende leiteten wir das Gas über das Spektralrohr, in welchem das Spektrum von *Y* stark zum Vorschein kam, erst in eine Wasser-, dann in eine Jodkaliumvorlage. In letzterer konnte das Ozon bestimmt werden, da durch die erstere N_2O_5 zurückgehalten wurde. Wir fanden in einem Volumen des Gases gleich dem Volumen des Spektralrohres 10,9 mg Ozon. Hierauf wurde

das Spektralrohr abgeschlossen. 26 Minuten später war das Spektrum von *Y* verschwunden, und als der Inhalt des Rohres durch die Vorlagen getrieben ward, fanden wir 0,05 mg, also eine verschwindende Menge Ozon. Es ist uns nicht gelungen, *Y* von O_3 zu trennen.

Das schnelle Verschwinden des O_3 erklärt sich dadurch, daß N_2O_5 unter Bildung von N_2O_4 zerfällt, dieses aber durch das Ozon wieder zu N_2O_5 aufoxydiert wird, ein Vorgang, dessen Endergebnis der Zerfall des Ozons ist. Erst wenn dieses verschwunden ist, fängt das für sich instabile N_2O_5 an, unter Bildung von N_2O_4 bez. NO_2 zu zerfallen, wobei das Gas bräunlich wird und das bekannte Absorptionsspektrum des NO_2 zeigt. Bei dem beschriebenen Versuch verschwand das Spektrum von *Y* in 26′, bei den Versuchen von Hautefeuille und Chappuis hingegen erst in 24—48 Stunden. In der Tat verschwindet erfahrungsgemäß das Spektrum von *Y* um so schneller, je höher der Gehalt des Gasgemisches an N_2O_5 ist, also unter Umständen um so schneller, je stärker das Spektrum ursprünglich auftritt. Diese Tatsache erklärt sich, indem der Zerfall des Ozons nach dem oben Gesagten um so schneller erfolgen muß, je größer die Konzentration des N_2O_5 ist.

§ 56. Nach Hautefeuille und Chappuis verschwindet *Y* schneller, wenn man die Temperatur erhöht. Wir haben außerdem eine andere Wirkung der Temperatur bemerkt. Wenn nämlich *Y* bei großer O_3- und kleiner N_2O_5-Konzentration entsteht, dann nimmt die Intensität des Spektrums von *Y* bei Temperaturerhöhung auf etwa 60° sehr erheblich zu. Die Temperaturerhöhung bewirkten wir durch elektrische Heizung einer das Versuchsrohr auf Asbestunterlage umgebenden Nickelspule. Bei zu großer N_2O_5-Konzentration kann die beschriebene Wirkung durch die erhöhte Zerfallgeschwindigkeit von N_2O_5 und O_3 verdeckt werden.

Hier ist nun die Frage aufzuwerfen, ob aus der Verstärkung des Absorptionsspektrums auf eine Erhöhung der Konzentration von *Y* mit steigender Temperatur zu schließen ist.

Das bekannteste Beispiel des Einflusses der Temperatur auf die Absorption eines Gases ist der Fall des Stickstofftetroxyds, dessen Absorption nach Brewsters[1]) Entdeckung

1) D. Brewster, Phil. Mag. (3) 8. p. 384; Pogg. Ann. 38. p. 54. 1836.

mit steigender Temperatur erheblich wächst. Roscoe und Thorpe[1]) sowie Hasselberg[2]) fanden, daß die Absorption des Bromgases ebenfalls mit steigender Temperatur zunimmt, wobei Hasselberg feststellte, daß die Lage der Absorptionslinien zwischen -20^0 und $+70^0$ von der Temperatur unabhängig ist.

Dagegen nimmt nach Hautefeuille und Chappuis[3]) die Absorption des Ozons mit *sinkender* Temperatur zu.

Was den Fall des Stickstofftetroxyds (N_2O_4) betrifft, so ist bekanntlich dieser Körper teilweise in NO_2 dissoziiert, wobei der Dissoziationsgrad mit steigender Temperatur wächst. Die Absorption rührt nun nach Salet[4]) nur von NO_2 her, indem N_2O_4 farblos ist. In der Tat fand Salet unter dieser und den weiteren Annahmen, daß die Absorption des NO_2 von der Temperatur unabhängig und der Konzentration proportional ist, durch kolorimetrische Versuche den Dissoziationsgrad mit der Dissoziationstheorie im Einklang.

Ob im Fall des Broms und Ozons die Temperaturänderung eine chemische Änderung hervorbringt, scheint eine offene Frage zu sein, welche vielleicht durch Dichtebestimmungen zu entscheiden ist.

Das Verhalten des Körpers *Y* gegen Temperaturänderung erinnert sehr an das Verhalten des N_2O_4 und scheint insofern eine Konzentrationsänderung der färbenden Substanz anzuzeigen.

§ 57. Kühlt man das *Y* enthaltende Gasgemisch unter die Zimmertemperatur ab, so verblaßt das Absorptionsspektrum und ist bei -79^0 jedenfalls verschwunden, wobei ein weißer Schnee an den Wänden des Rohres sich niederschlägt. Bei diesen Versuchen befand sich das Kältebad entweder in einem das Spektralrohr umgebenden Mantel oder in einem Vakuummantelgefäß, in welches man das in diesem Fall an den Enden verschmolzene Spektralrohr eintauchte. Es wurde nun 1. bei

1) H. E. Roscoe u. T. E. Thorpe, Phil. Trans. 167. p. 209. 1877.

2) B. Hasselberg, Kon. Sv. Vet. Akad. Handl. 24. Nr. 3. p. 50. 1890.

3) P. Hautefeuille u. J. Chappuis bei J. Chappuis, Ann. d. l'école normale sup. (2) 11. p. 159. 1882.

4) P. Salet, Fortschr. d. Physik 1868. p. 51.

$-79°$ das Ozon durch einen Sauerstoffstrom verdrängt, darauf das Versuchsrohr abgeschlossen und wieder auf die Zimmertemperatur gebracht. Dabei verdampfte der vorhin niedergeschlagene feste Körper, aber das Spektrum von *Y* kam auch nicht andeutungsweise wieder zum Vorschein; 2. wurde bei diesem Versuch der Sauerstoffstrom in ein zweites auf der Zimmertemperatur gehaltenes Spektralrohr geleitet. Auch in diesem wurde von dem Spektrum von *Y*, selbst beim Erhitzen, nichts bemerkt.

Aus 2. folgt, daß *Y* bei $-79°$ im Gaszustand nicht in merklicher Konzentration existiert. Aus 1. folgt, daß *Y* nach der beschriebenen Behandlung auch im Kondensat sich nicht vorfindet, welches mithin N_2O_5 ist. Ob *Y* schon durch die Abkühlung auf $-79°$ oder erst durch Ozonentziehung mittels des O_3-Stromes zum Zerfall gebracht wurde, läßt sich nicht mit voller Sicherheit sagen. Doch spricht das allmähliche Verblassen des Spektrums bei der Abkühlung in Verbindung mit § 56 für die erstere Alternative.

§ 58. Hindurchleiten des *Y* enthaltenden Gasgemisches durch P_2O_5 oder H_2SO_4 brachte das Spektrum von *Y* zum Verschwinden, Hindurchleiten durch HNO_3 (spez. Gew. 1,54) ließ es, wenn auch geschwächt, bestehen, um so deutlicher, je länger durchgeleitet wurde. Im letzteren Fall braucht *Y* nicht durch die Säure hindurchzugehen, sondern kann sich hinter der Vorlage aus O_3 und N_2O_5 aufs neue bilden. Nach dem Hindurchleiten des Gasgemisches zeigte die Säure das Spektrum von *Y* nicht, auch nicht die Flüssigkeit an einer Platinanode in HNO_3 (spez. Gew. 1,54) nach längerer Elektrolyse.

§ 59. Bringt man zu dem *Y* enthaltenden Gasgemisch Wasser hinzu, so verschwindet das Spektrum von *Y*, zugleich tritt eine Druckverminderung ein, welche gemessen werden kann. Das Versuchsrohr *R* (Fig. 2), umgeben von dem Mantel *M*, war 50 cm lang. Aus dem geteilten Rohr *H* kann durch den Hahn *h* Wasser zugelassen werden. Mit *R* kommuniziert das ganz aus Glas geblasene, bei *F* angeschmolzene Aneroid *A*; die Bewegungen von dessen sehr dünner Verschlußplatte werden durch Fernrohr und Skale beobachtet, 1 Skt. entsprach bei kleinen Ausschlägen 0,1 mm Quecksilber. Der Druck in der luftdicht aufgesetzten Kammer *P*, gemessen durch das Queck-

silbermanometer Q, wird so reguliert, daß er dem zu messenden Druck im Versuchsrohr nahe gleichkommt; nur um die sehr kleine übrig bleibende Druckdifferenz zu messen, dient das Aneroid, welches mithin im wesentlichen als Nullinstrument gebraucht wird.

Die gesuchte, von der Reaktion zwischen dem Wasserdampf und dem gasförmigen Inhalt des Versuchsrohres herrührende Druckverminderung Δp ist gleich der beobachteten

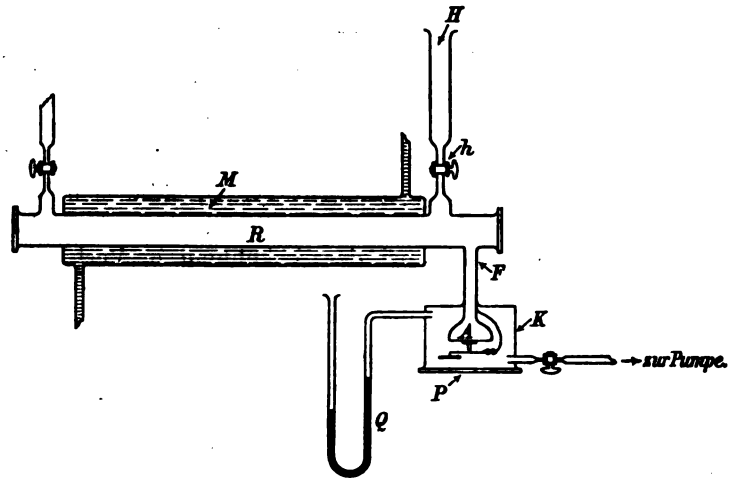


Fig. 2.

vermehrt um den Dampfdruck des Wassers[1]) und die aus der Volumverminderung durch das eingebrachte Wasser (5—8 ccm) entstehende Druckzunahme.

Nach dieser Bestimmung wurde der Gasinhalt des Versuchsrohres durch eine Wasservorlage hindurch ausgetrieben, das Versuchsrohr mit Wasser ausgespült und die Salpetersäure in den beiden Wassermengen durch Titrieren mit $^1/_{10}$ normaler Natronlauge gemessen. 9 ccm NaOH $^1/_{10}$ entsprechen

$$(1) \qquad m_1 = q \,.\, 10^{-4}$$

1) Genau genommen, der gebildeten wässerigen Salpetersäure. Doch fanden wir den Dampfdruck über $^1/_{10}$ normaler Salpetersäure bei 16° nur um ungefähr 0,6 mm kleiner als über reinem Wasser.

Mol HNO_3. Eine Druckabnahme Δp in V ccm entspricht m_2 Mol verschwundenen Gases, wo

$$(2) \qquad \Delta p = m_2 \cdot \frac{22400}{V} \cdot 760(1 + \alpha t).$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad \frac{m_2}{m_1} = 0{,}000588 \cdot \frac{V \Delta p}{q(1 + \alpha t)}.$$

Befindet sich in dem Versuchsrohr neben O_2 nur N_2O_5, so soll sein

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{m_2}{m_1} = 0{,}5, \\ \Delta p = 850 \cdot \frac{q(1 + \alpha t)}{V}. \end{cases}$$

Ist außerdem O_2 zugegen, so kann man fragen, ob die Anwesenheit von Y sich durch andere Werte von m_2/m_1 kundgibt.

Bei den folgenden Versuchen 1 und 2 enthielt das Versuchsrohr eine Mischung von N_2O_5 mit O_2, bei dem Versuch 3 außerdem Ozon, wobei das Spektrum von Y sehr stark zum Vorschein kam. Unter m_2/m_1 stehen die nach (3), unter Δp ber. die nach (4) berechneten Werte.

Nr.	Inhalt	V	t	Δp beob.	q	m_2/m_1	Δp ber.
1	N_2O_5, O_2	794,3	21,6°	83,0	64,8	0,554	74,8
2	„	830,3	18,7	62,2	51,9	0,547	56,8
3	N_2O_5, O_2, O_3	830,3	21,4	75,3	60,4	0,564	66,7

Die in Nr. 1—2 auftretende Abweichung des Wertes m_2/m_1 von 0,5 entspricht dem § 53 gefundenen Ergebnis. Auch in Nr. 3 verhielt sich die Druckabnahme Δp nicht viel anders, als wenn nur N_2O_5 zugegen gewesen wäre, und läßt die Anwesenheit von Y nicht erkennen.[1]) Hierdurch wurde die Vermutung nahe gelegt, daß die Konzentration von Y klein sei gegen die Konzentration des N_2O_5. Diese Vermutung wurde durch spektralanalytische Versuche im Ultrarot bestätigt.

§ 60. Wir benutzten zu diesen Versuchen ungefähr 30 cm lange, an den beiden Enden bez. durch Steinsalzlinse und -platte verschlossene Röhren. Die Strahlen einer Nernstlampe wurden durch die Steinsalzlinse auf einen Spalt konzentriert, gingen weiter durch ein Spiegelspektrometer mit Flußspat-

1) Übrigens wirkt die spontane Desozonisation dahin, Δp und damit m_2/m_1 zu verkleinern.

prisma und wurden schließlich auf einer Rubensschen Thermosäule oder auf einem Linearbolometer zu einem Spaltbilde vereinigt. Die Strommessung geschah durch ein du Bois-Rubenssches Panzergalvanometer. Das Prisma war für die Natriumlinie auf das Minimum der Ablenkung eingestellt, die Thermosäule bez. der Bolometerdraht wurde durch das Spektrum hindurchgeführt. Aus den Winkelabständen Δ von der Natriumlinie ergaben sich mittels der von Paschen[1]) für die Brechungsexponenten gegebenen Formel die zugehörigen Wellenlängen.

§ 61. Wir verzeichnen hierunter die Absorption in Prozenten eines 30 cm langen, mit N_2O_5 haltigem O_2 gefüllten Rohres. Die angegebenen Werte sind die Mittel aus zwei Versuchen, bei welchen die Partialdrucke des N_2O_5 42,6 bez. 59,3 mm in einem Gasgemisch von Atmosphärendruck betrugen. Die Absorption des O_2 ist gleich Null gesetzt. Störend ist bei diesen Versuchen der Angriff der Steinsalzverschlüsse durch das N_2O_5, ferner die Absorption des CO_2 um 2,7 μ und 4,3 μ herum bei wechselndem CO_2-Gehalt der Luft infolge der Anwendung des festen CO_2 als Kältemittel; endlich der spontane Zerfall des N_2O_5, welchen wir durch Beimengung von etwas Ozon zu vermeiden suchten. Gleichwohl mußten wir uns auf Beobachtungen in Intervallen von 10 zu 10′ beschränken, um den Versuch zu beendigen, ehe der Zerfall in N_2O_4 begann.

Δ	λ	Abs. in Proz.
1°	2,29 μ	0
10′	2,66	16
20	3,01	2
30	3,29	60
40	3,56	6
50	3,80	30
2°	4,03	6
10	4,25	9
20	4,45	7
30	4,65	17
40	4,84	20
50	5,02	8
3°	5,19	14
10	5,36	30
3° 20′—4° 10′	5,52—6,26	100
4° 20′	6,39	43
30	6,53	52

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 4. p. 299. 1901.

Fig. 3 gibt die graphische Darstellung. Man kann zwei Absorptionsgebiete unterscheiden, von denen das eine mit schwacher Absorption sich von etwa 2,5 bis 5 μ erstreckt und ziemlich scharfe Absorptionsstreifen enthält. Durch besondere Versuche, bei denen Δ in engen Grenzen variiert wurde, haben wir festgestellt, daß das absolute Absorptionsmaximum dieses Gebietes auf 3,29 μ fällt. Es lag der Verdacht nahe, daß die Absorption an der Ozonbande um 4,75 μ herum vom Ozon her-

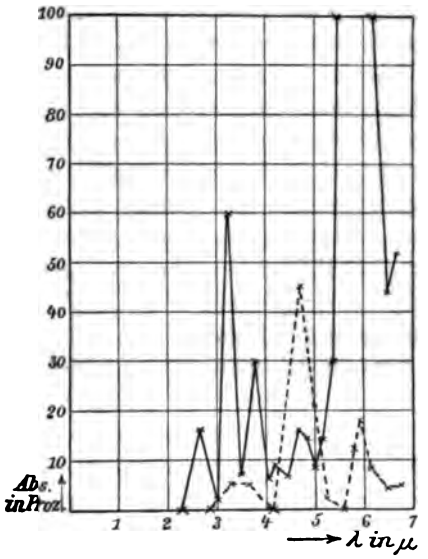


Fig. 3.

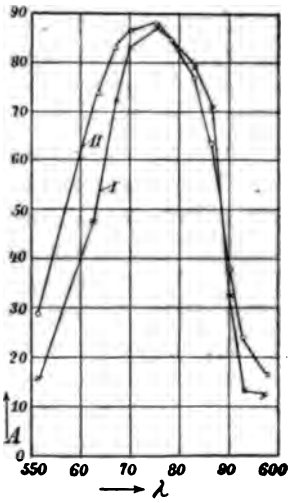


Fig. 4.

rührt; doch fanden wir diese Absorption auch in ozonfreiem N_2O_5, das freilich etwas N_2O_4 enthält (vgl. auch § 66). Das kleine Maximum bei 4,25 μ ist unsicher. Das zweite Absorptionsgebiet schließt sich an das erste an; die Absorption ist hier sehr stark, zwischen 5,5 und 6 μ bei der benutzten Konzentration des N_2O_5 beinahe vollständig. Versuche mit schwacher Konzentration (Partialdruck des N_2O_5 1 mm) gaben folgende in der Fig. 4, Kurve II graphisch dargestellten Resultate.

λ	5,52	5,63	5,67	5,70	5,75	5,78	5,83	5,86	5,90	5,93	5,97	6,12 μ
A	29	73	83	86	88	85	77	64	38	24	17	13 Proz.

Es handelt sich also um *einen* sehr intensiven Absorptionsstreifen mit dem Maximum der Absorption bei ungefähr 5,75 μ. Zur genauen Bestimmung dieses Maximums wird es nötig sein, die Methode der Minimalablenkung zu benutzen.

§ 62. Das Absorptionsspektrum des Ozons im Ultrarot ist von K. Ångström[1]), sowie von E. Ladenburg und E. Lehmann[2]) untersucht worden; es ist nach den Angaben der letztgenannten Autoren in die Fig. 3 punktiert eingezeichnet. Das Absorptionsmaximum in der Bande zwischen 4,1 und 5,6 μ fanden wir in Übereinstimmung mit ihnen bei 4,75 μ. Wie aus der Figur ersichtlich, zeigt das von denselben untersuchte Ozon Absorption bis zu 19 Proz. in dem starken zweiten Absorptionsgebiet des N_2O_5[3]); ebenfalls eine schwache Absorption von 5 Proz. am Maximum des ersten schwächeren Absorptionsgebiet des N_2O_5. Diese Messungen wurden mit einem Rohr von 1 m Länge angestellt. Nun fanden wir in unserem 30 cm langen Rohr die Absorption des N_2O_5 bei einem Partialdruck desselben von 1 mm bei $\lambda = 5{,}75\,\mu$ gleich 88 Proz. Ein viel kleinerer Partialdruck dieses Gases würde in einem meterlangen Rohr die von den Herren Ladenburg und Lehmann bei 5,76 μ beobachtete Absorption von 13,6 Proz. hervorbringen. Hierdurch wurde die Vermutung nahegelegt, daß die von jenen Herren zwischen 5,6 und 6,1 μ beobachtete Absorption von einem N_2O_5-Gehalt des von ihnen benutzten Ozons herrührt. Um dies zu prüfen, untersuchten wir die Absorption von Ozon aus Sauerstoff, den wir durch Erhitzen von $KClO_3$ in einem Verbrennungsrohr darstellten, über festes KOH und P_2O_5 in eine Siemenssche Röhre und von dort in das 30 cm lange Absorptionsrohr leiteten. Dieses Ozon absorbierte zwischen 5,36 und 5,97 μ nicht merklich, obgleich die Absorption bei $\lambda = 4{,}75\,\mu$ stärker war als bei den Versuchen der Herren Ladenburg und Lehmann, nämlich 55 Proz. betrug. Dagegen fanden wir unter denselben Umständen bei $\lambda = 5{,}75\,\mu$ eine Absorption von 57 Proz. bei Ozon aus Sauerstoff mit 1,8 Proz. Stickstoff.

---

1) K. Ångström, Arkiv för Mat., Astr. Och Fysik 1. p. 347. 1904.
2) l. c.
3) Auch das von Ångström untersuchte Ozon zeigt hier Absorption.

Das zu den Absorptionsversuchen der Herren Ladenburg und Lehmann benutzte Ozon war also nicht rein, und obgleich das Maximum der Absorption des N_2O_5 nach unseren Versuchen bei ungefähr 5,75 μ liegt, das Maximum der Absorption des von den Herren Ladenburg und Lehmann benutzten Ozons in der fraglichen Region bei 5,94 μ, so ist es doch nicht unwahrscheinlich, daß ihr Ozon durch N_2O_5 verunreinigt war. Da sie in ihrem Ozon Stickstoff nicht nachweisen konnten, und gleichwohl aus diesem Ozon unter gewissen Umständen ein Gas erhielten, welches die Hautefeuille-Chappuis schen Absorptionsstreifen im sichtbaren Gebiet zeigte, so nehmen sie an, daß diese Streifen einer Oxydationsstufe von O_2 angehören, die höher liegt als O_3. Es ist nicht nötig, diese Annahme zu machen, solange nicht das Auftreten der Streifen in stickstofffreiem Ozon nachgewiesen ist.[1])

§ 63. Das Versuchsrohr von 29,5 cm Länge beschickten wir mit O_3 und so wenig N_2O_5, daß die Absorption desselben bei 3,21 μ nicht merklich war, während doch das Spektrum von Y im sichtbaren Gebiet stark zum Vorschein kam. In solcher Konzentration absorbiert also Y bei 3,21 μ nicht merklich.

§ 64. Die Absorption des N_2O_5 wurde alsdann für verschiedene Partialdrucke p_1 dieses Gases bei der Wellenlänge 3,21, welche dem Maximum der Absorption im ersten Absorptionsgebiet nahe liegt, für das 30 cm-Rohr gemessen. Das Steinsalz wird mit der Zeit durch N_2O_5 etwas angegriffen, daher wurde vor und nach der Messung mit N_2O_5 der Galvanometerausschlag mit O_2 genommen. Da N_2O_5 bei 2,29 μ noch nicht merklich absorbiert, so kann man auch, ohne das N_2O_5 zu entfernen, durch Messungen an dieser Stelle die Durchlässigkeit der Steinsalzverschlüsse kontrollieren. Es ergab sich:

p_1	8,67	19,3	40,3 mm
Abs. A	12,1	28,1	38,8 Proz.
A/p_1	1,40	1,46	0,96

Die Absorption ist bis zu $p_1 = 20$ mm dem Partialdruck ungefähr proportional, wächst aber bei weiterer Erhöhung des-

1) Was die Dichte- und Druckmessungen der Herren Ladenburg und Lehmann unabhängig von jenen Streifen lehren, ist eine Frage, mit welcher wir uns nicht zu beschäftigen haben.

selben nur langsam weiter. Will man also aus der Änderung der Absorption auf die Änderung des Partialdruckes einen Schluß ziehen, so darf man, wenn die Methode empfindlich sein soll, den Partialdruck des N_2O_5 nicht zu hoch nehmen. Er wurde im folgenden kleiner als 19 mm gewählt.

§ 65. Nunmehr wurde der Körper *Y* mit viel Ozon und einer angemessenen Quantität von N_2O_5 erzeugt, so daß sein Spektrum im sichtbaren Gebiet stark zum Vorschein kam. Indem man alsdann das Versuchsrohr erwärmte, nahm die Intensität des Spektrums weiter zu, sank aber bei darauffolgender Abkühlung unter den Anfangswert. Dieses Verfahren wurde bis zum Verschwinden des Spektrums fortgesetzt und dabei stets die Absorption bei $\lambda = 3{,}21\,\mu$ gemessen. Folgende Ergebnisse wurden erhalten:

	Versuch 1		Versuch 2	
	Ausschlag	Absorption	Ausschlag	Absorption
Y stark	64,1	28 Proz.	56,2	25 Proz.
erwärmt, sehr stark	65,5	26 „	56,4	25 „
abgekühlt, schwach.	65,5	26 „	56,1	25 „
Y verschwunden. .	66,7	25 „	56,7	24 „

Danach ist die Absorption bei $\lambda = 3{,}21\,\mu$, mithin auch, da dort *Y* nicht absorbiert, die Konzentration des freien N_2O_5 praktisch die gleiche, mag *Y* stark oder schwach vorhanden oder verschwunden sein.

Nun ist, von N_2O abgesehen, N_2O_5 das einzige Stickoxyd, welches in Gegenwart von Ozon bestehen kann. Beim Zerfall von *Y* muß also N_2O_5, sei es primär, sei es sekundär, gebildet werden, wenn man Zerfall in N_2O oder N_2 als unwahrscheinlich ausschließt. Da aber hierbei eine Konzentrationszunahme des N_2O_5 nicht merklich wurde, so lehrt der Versuch, daß *Y*, ähnlich wie NO_2, ein stark färbender Körper und seine Konzentration sehr klein ist gegen die Konzentration des N_2O_5.

§ 66. Die entsprechenden Versuche an der Ozonbande erlauben zwar nicht einen entsprechenden Schluß zu ziehen, da über die Absorption von *Y* an dieser Bande nichts ermittelt werden kann, mögen aber doch hier angeführt werden. Die Absorption ozonisierten Sauerstoffs ergab sich bei $\lambda = 4{,}69\,\mu$:

bei	31,3	61,1	103,7 mm Partialdruck des Ozons
zu	38	50	69 Proz.

Es wurde nun bei dieser Wellenlänge die Absorption von Gemischen aus O_2, N_2O_5 und O_3 gemessen, und zwar 1. bei Zimmertemperatur, bei welcher das Spektrum von *F* stark zum Vorschein kam, 2. in einer Mischung aus Alkohol und fester CO_2, wobei es verschwand.

	Partialdruck N_2O_5	Absorption bei 4,69 μ		
Nr.	p_1	18°	gekühlt	18°
1	6 mm	64	68	59 Proz.
2	16,7 „	45	86	43 „
3	25,8 „	65	58	63 „

Obgleich bereits aus § 61 folgt, daß auch N_2O_5 bei 4,69 μ absorbiert, so wurde dennoch diese Absorption hier direkt gemessen, indem man das Versuchsrohr mit einer Mischung von O_2 und N_2O_5 füllte und die Absorption maß, während N_2O_5 durch Abkühlung niedergeschlagen und bei der Zimmertemperatur wieder verdampft war. So ergab sich die Absorption des N_2O_5 bei einem Partialdruck von 19 mm bei 4,69 μ gleich 13,2 Proz. Demnach erklärt sich die bei den obigen Versuchen zutage tretende, mit dem Gehalt an N_2O_5 wachsende Abnahme der Absorption bei der Abkühlung durch die Kondensation des N_2O_5, und von einem Einfluß des Körpers *F* auf die Absorption des Ozons ist nichts zu bemerken.

§ 67. Zu der Frage zurückkehrend, welches Oxydationsprodukt des Stickstoffs durch die stille Entladung in atmosphärischer Luft gebildet wird, haben wir zunächst in dem aus dem Entladungsapparat kommenden Gase N_2O_5 spektralanalytisch leicht nachweisen können. Als wir über eine mit $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Amp. betriebene Siemenssche Ozonröhre trockene atmosphärische Luft langsam in das 29,5 cm lange Spektralrohr einleiteten, fanden wir bei 5,75 μ (§ 61) eine Absorption von 90 Proz. Das Spektrum von *F* war dabei schwach sichtbar. Die Analyse des Gases ergab einen Partialdruck des N_2O_5 von 1,7 mm.

Kurve I Fig. 4 zeigt die Absorption etwas schwächer ozonisierter atmosphärischer Luft im zweiten Absorptionsgebiet des N_2O_5. Eine Wasservorlage, durch welche der Inhalt des Versuchsrohres ausgetrieben worden war, zeigte einen Gehalt an HNO_3 entsprechend 0,2 ccm NaOH $^1/_{10}$ normal, was in dem Versuchsrohr von 181 ccm einem Partialdruck des N_2O_5

von etwa 1 mm entspricht. Kurve II zeigt die Absorption des mit N_2O_5 von nahezu demselben Partialdruck beschickten Versuchsrohres. Die Lage des Absorptionsmaximums stimmt in beiden Kurven genau überein, die Abweichung derselben voneinander rührt wahrscheinlich von dem Zerfall des N_2O_5 während der Messung im Fall II her, in welchem kein O_3 gegenwärtig war.[1])

Durch die Entstehung von N_2O_5 neben O_3 bei der stillen Entladung in atmosphärischer Luft sind nach § 53 die Bedingungen für die Bildung des Körpers *Y* gegeben, so daß es nicht notwendig erscheint, ihn als primäres Produkt der Entladung anzusehen; jedenfalls tritt dieser Körper nur als eine geringfügige Begleiterscheinung des N_2O_5 auf. Es fragt sich, ob durch den Strom noch andere Stickoxyde gebildet werden. NO wird schon durch O_2 zu NO_2, NO_2 durch O_3 zu N_2O_5 oxydiert; das einzige Stickoxyd, welches außerdem noch in Frage kommt, ist N_2O. Ob auch dieses sich bildet, wird sich vielleicht spektralanalytisch entscheiden lassen.

§ 68. *Zusammenfassung.*

1. Durch Reaktion zwischen N_2O_5 und O_3 entsteht ein durch sein Absorptionsspektrum im sichtbaren Gebiet charakterisierter gasförmiger Körper *Y*, ein stark gefärbtes Oxydationsprodukt des Stickstoffs, in einer Konzentration, welche klein ist gegen die Konzentration des N_2O_5.

2. Als Nebenprodukt des Ozons entsteht bei der stillen Entladung in trockener atmosphärischer Luft N_2O_5.

3. Dieser Vorgang stellt also nach 1. die Bedingungen für die Entstehung von *Y* her und führte zu der Entdeckung dieses Körpers durch Hautefeuille und Chappuis. Doch erscheint dieser Körper als eine nur geringfügige Begleiterscheinung der Stickstoffoxydation, und seine Bezeichnung als N_2O_6 ist nicht begründet, da die von Hautefeuille und Chappuis

1) Als anstatt atmosphärischer Luft 98,2 proz. Sauerstoff aus einer Lindeschen Bombe der stillen Entladung unterworfen wurde, ergab sich bei 5,75 μ eine Absorption von 57 Proz. Hierbei war das Spektrum von *Y* nicht sichtbar, wodurch der Schluß des § 65 bestätigt wird. — Die Gegenwart des N_2O_5 wird hier auch an der beim Durchleiten des Gases durch Wasser eintretenden Nebelbildung kenntlich, welche bei *reinem* ozonisierten Sauerstoff (§ 62) nicht eintritt.

angestellten Versuche, welche auf diese Formel führten, auf der nicht zutreffenden Annahme beruhen, daß das einzige durch die Entladung gebildete Stickoxyd der Körper *Y* ist.

4. Das Absorptionsspektrum des N_2O_5 im Ultrarot enthält zwischen 2,3 und 6,5 μ zwei Absorptionsgebiete, ein schwächeres zwischen 2,5 und 5 μ mit dem Absorptionsmaximum bei 3,29 μ und ein daran sich anschließendes stärkeres mit dem Absorptionsmaximum bei ungefähr 5,75 μ. Das letztere Gebiet liefert ein sehr empfindliches Mittel zum Nachweis von N_2O_5 und läßt diesen Körper in Stickstoff–Sauerstoffgemischen, welche der stillen Entladung ausgesetzt waren, leicht erkennen.

(Eingegangen 4. April 1907.)

2. *Über das Verhalten von Tantalelektroden; von Günther Schulze.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

In fast allen bisher zum Gleichrichten von Wechselströmen benutzten elektrolytischen Zellen bestand die wirksame Elektrode aus Aluminium. Die Untersuchung derartiger Zellen ergab[1]), daß der elektrische Strom auf Aluminiumanoden in manchen Elektrolyten eine dünne, feste, feinporöse Haut, und in ihr an ihrer Grenze gegen das Aluminium eine dielektrische Gasschicht bildet, die ein sehr hohes Spannungsgefälle (maximal 8,2 Millionen Volt pro Millimeter) aushält, solange Aluminium Anode, und ein sehr viel geringeres, wenn es Kathode ist.

Bei Versuchen darüber drängte sich die Frage auf, ob diese elektrolytische Ventilwirkung eine besondere Eigenschaft des Aluminiums (und des nahe verwandten Magnesiums) sei oder ob sie noch anderen Metallen, wenn auch in sehr verschiedenem Grade, zukäme, so daß sich mit ihr vielleicht viele Eigentümlichkeiten elektrolytischer Elektroden erklären ließen, und ob vielleicht Metalle gefunden werden könnten, die sich noch wesentlich besser als Aluminium zum Gleichrichten von Wechselströmen eigneten.

Verschiedentliche Beobachtungen scheinen darauf hinzudeuten, daß ähnliche Erscheinungen wie beim Aluminium auch bei anderen Metallen auftreten können. So beobachteten z. B. Warburg und Strasser[2]) die Ausbildung einer sehr dünnen dielektrischen Schicht an den sogenannten unpolarisierbaren Elektroden Zinkamalgam in Zinksulfat und Kadmium in Kadmiumsulfat. Ferner werden von einigen Autoren die mit Passivität bezeichneten Eigenschaften des Eisens und Chromes auf die Bildung einer Oxydhaut zurückgeführt.

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. 21. p. 929. 1906; 22. p. 543. 1907.

2) E. Warburg u. B. Strasser, Verhandl. der Deutsch. Physik. Gesellsch. 1903. p. 269.

In diesen Fällen ist jedoch das Phänomen nur schwach ausgebildet, und es erschien wichtiger, zunächst Metalle zu untersuchen, die es möglichst ausgeprägt zeigen. Magnesium hält zwar nach den bisherigen Veröffentlichungen[1]) als Anode Spannungen von etwas über 100 Volt aus, aber nur in sehr wenigen Elektrolyten und nur bei sorgfältiger und vorsichtiger Behandlung. Es eignet sich also schlecht.

Nun hat die Firma Siemens & Halske 1904 ein Patent auf die Verwendung von Tantal, Niob und Vanadium anstatt des Aluminiums in den elektrolytischen Gleichrichtern erhalten.[2]) Das Patent enthält die Angabe, daß diese Metalle geeigneter seien als Aluminium, da sie sich schneller formierten nnd höhere Spannungen aushielten. Diese Angabe hat mich veranlaßt, zunächst das Verhalten des Tantals genauer zu untersuchen.

I. Material und Versuchsanordnung.

Die Firma Siemens & Halske stellte in dankenswerter Weise drei Stäbe aus Tantal zu den Versuchen zur Verfügung. Die Oberfläche dieser Stäbe war glatt und ließ sich durch längeres Bearbeiten mit Schmirgelpapier, das kaum einen Eindruck hinterließ, gut polieren. Ihr Ausschnitt war quadratisch mit abgerundeten Ecken.

Im übrigen ergaben die Messungen folgende Eigenschaften:

	Stab 1	Stab 2	Stab 3	Mittel
Länge	81,3 mm	82,0 mm	81,3 mm	—
Mittlerer Querschnitt .	1,24 qmm	1,24 qmm	1,24 qmm	—
„ Umfang . .	4,10 mm	4,11 mm	4,11 mm	—
Dichte	17,45	17,11	17,16	17,24
Elektrische Leitfähigkeit bei 15° C. . .	$6{,}18 \cdot 10^4$ Ohm, cm	$6{,}04 \cdot 10^4$ Ohm, cm	$6{,}09 \cdot 10^4$ Ohm, cm	$6{,}10 \cdot 10^4$
Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit .	0,0040	0,0038	—	0,0039

Die zur Untersuchung benutzte elektrolytische Zelle und die Versuchsanordnungen waren fast ganz dieselben wie bei

1) S. Maresca, Il Nuovo Cimento, Sept. 1906. p. 155.
2) D.R.P. 150883, Klasse 21g; 1904.

der Untersuchung des Aluminiums. Der Tantalstab wurde von unten her durch einen engen Ansatz in ein zylindrisches Glasgefäß von 2,6 cm lichter Weite eingeführt und in dem Ansatz festgekittet. Als Kitt wurde Chatterton Compound, eine Art Asphaltkitt, Siegellack und für Messungen bei erhöhter Temperatur eine Mischung aus Mennige und Leinölfirnis benutzt.

Chatterton eignete sich am besten, nur von Phosphaten wurde es angegriffen. Siegellack war bei höheren Spannungen unbrauchbar, weil sich der Elektrolyt unter der Wirkung des Stromes zwischen Siegellack und Tantal drängte. Die bei den Aluminiumelektroden mit Vorteil benutzte Abdichtung durch ein enganschließendes Stück Gummischlauch ließ sich hier wegen der Kleinheit und des eckigen Querschnittes der Tantalstäbe nicht anwenden.

Die andere Elektrode war ein Platinblech.

Die Temperatur der Elektrolyte wurde, soweit nicht ihr Einfluß untersucht werden sollte, stets auf 0° C. erhalten. Die Schaltung bestand aus einer Anordnung zur Messung von Strom und Spannung der Zelle und einer Anordnung zur Messung der Kapazität der dielektrischen Gashaut nach der absoluten Methode von Maxwell-Thomson mit Hilfe eines rotierenden Unterbrechers. Durch einen Umschalter konnte die Zelle momentan aus der einen in die andere Anordnung umgeschaltet werden. Die angegebenen Spannungen sind, wo nichts anderes bemerkt ist, Spannungen an der Zelle, die sich von den nur schwer genau zu ermittelnden Spannungen an der wirksamen Schicht um wenige Volt unterscheiden.

II. Übersicht über das Verhalten der Aluminiumelektroden.

Es erscheint zweckmäßig, zunächst kurz an die Untersuchungen über Aluminiumelektroden zu erinnern, zumal da einige Erscheinungen durch die Ergebnisse der Tantalversuche in ein neues Licht gerückt sind. Es hatte sich gezeigt, daß die Gashaut, die sich auf Aluminiumanoden unter der Wirkung des Stromes in der porösen festen Haut bildet, eine für jeden Elektrolyten charakteristische maximale Dicke erreicht, und daß sie nach dem Ausschalten des Stromes in einigen Elektrolyten sehr langsam, in anderen wesentlich schneller dünner wird. Die maximale Dicke bedingt ihrerseits einen für jeden

Elektrolyten charakteristischen Maximalspannungsverlust, der dann erreicht ist, wenn das Spannungsgefälle in der Gashaut so groß geworden ist, daß Funkenentladung eintritt. Mit zunehmender Stromdichte steigt der Spannungsverlust in der Gashaut sehr schnell, bis er den Maximalwert erreicht und wird dann von der Stromdichte annähernd unabhängig.

Mit zunehmender Temperatur wird dieser Anstieg des Spannungsverlustes mit der Stromdichte weniger steil und die Maximalspannung sinkt meistens.

Es leuchtet ein, daß das ganze Phänomen nur da eintreten kann, wo sich eine unlösliche oder schwerlösliche Aluminiumverbindung bildet. Demgemäß tritt sie nicht ein: in den wässerigen Lösungen der Basen, ferner der Säuren und Salze der Halogene, des Stickstoffs u. a. Die Sulfate bilden einen Übergang. In ihnen entsteht schlechtlösliches $Al_2(OH)_6$. Ausgeprägt ist die Erscheinung in den wässerigen Lösungen der meisten Verbindungen von Mn, Cr, P, As, Sb, C und besonders B.

Die Beschaffenheit des Elektrolyten ist also von großem Einflusse auf die maximale Dicke, die Beständigkeit der Gashaut und auf die Maximalspannung, die sie aushalten kann. Dagegen ist die Beziehung zwischen der Dicke der Gashaut und der maximal ausgehaltenen Spannung und dementsprechend die Größe des Spannungsgefälles in der Gashaut von der Art des Elektrolyten unabhängig.

Die Unabhängigkeit der Dicke der Gashaut von dem elektrostatischen Drucke, der auf ihr lastet, führt zu der Annahme, daß sie sich in den Poren der festen Haut in einem ähnlichen Zustande starker Verdichtung befindet wie z. B. Gase in Holzkohle.

Das maximale Spannungsgefälle in ihr beträgt in wirksamer Richtung bis zu 8,2 Millionen Volt pro Millimeter, in unwirksamer Richtung ca. 100000 Volt/mm. Dieser letzte Wert befindet sich in Übereinstimmung mit dem von Earhardt[1]) und Hobbs[2]) gefundenen Spannungsgefälle der Funkenentladung bei sehr geringen Elektrodenabständen. Nach J. J. Thomson[3])

1) R. F. Earhardt, Phil. Mag. (6) **1.** p. 147. 1901.
2) G. M. Hobbs, Phil. Mag. (6) **10.** p. 617. 1905.
3) J. J. Thomson, Conduction of electricity through gases.

wird die Elektrizität in diesem Falle durch freie negative Elektronen der Elektrodenmetalle transportiert. Nach seinen Berechnungen genügt das erwähnte Spannungsgefälle zum Freimachen negativer Elektronen aus Metallen. Dieselbe Art des Elektrizitätstransportes findet im vorliegenden Falle statt, wenn Aluminium Kathode ist, also in unwirksamer Richtung.

In wirksamer Richtung dagegen ist sie nicht möglich, weil der Elektrolyt keine freien Elektronen, sondern nur elektrolytische Ionen enthält. Diese nehmen wegen ihrer sehr viel größeren Masse ein sehr viel höheres Spannungsgefälle als die negativen Elektronen zur Stromleitung in Anspruch. So kann dasselbe den enormen Wert von 8,2 Millionen Volt pro Millimeter erreichen, bis Funkenentladung eintritt.

III. Verhalten von Tantalelektroden.

1. Formierung.

Wenden wir uns nun zu dem Verhalten des Tantals. Der erste Gegenstand der Untersuchung war naturgemäß der Vorgang der Formierung. Es zeigte sich, daß sie wesentlich schneller verläuft als beim Aluminium. Die Endspannung wird annähernd nach einigen Minuten erreicht. Genauere Messungen wurden nicht angestellt, da der Vorgang geringes Interesse bietet, und da wegen der geringen Menge des zur Verfügung stehenden Tantals nur das Wichtigste untersucht werden konnte.

2. Elektrolyte.

Im Gegensatz zum Aluminium konnte beim Tantal kein Elektrolyt gefunden werden, bei dem die Ventilwirkung nicht eintrat. Dieses läßt sich vom chemischen Standpunkt aus dadurch erklären, daß Tantal fähig ist, mit fast allen chemischen Stoffen unlösliche Verbindungen zu bilden, die das Gerüst für die Gasschicht abgeben. Allerdings wurde Flußsäure und eine Mischung aus Flußsäure und Salpetersäure, in denen Tantal löslich sein soll, nicht untersucht.

Um nicht zu viel Material zu verbrauchen, wurden die Versuche über Maximalspannung und Beständigkeit der Gashaut zunächst qualitativ angestellt, indem ein kurzes Ende eines Tantalstabes von oben her in den zu untersuchenden

Elektrolyten getaucht wurde. Auf diese Weise ließ sich jedoch wegen des störenden Einflusses der Flüssigkeitsoberfläche längst nicht eine so hohe Maximalspannung erreichen, wie bei sorgfältiger Einführung von unten her. Besonders bei höheren Spannungen sprangen Funken von der Oberfläche der Flüssigkeit zu dem aus ihr herausragenden, also nicht formierten Teile des Tantalstabes über. Sie zeigten ein ausgeprägtes Tantalspektrum, während die Funken in der Flüssigkeit keine Tantallinien, wohl aber die des Elektrolyten erkennen ließen. In der folgenden Tabelle, die nur zur Orientierung dienen kann, sind die Ergebnisse der Messungen über den Einfluß des Elektrolyten zusammengestellt.

Tabelle 1.

Elektrolyt	Konzentration	Maximal-spannung	Spannungs-ausbildung nach 2 Min. Ausschalten
NaOH	verdünnt	410 Volt	mittel
„	stark verdünnt	560 „	schnell
KOH	konzentriert	70 „	langsam
„	verdünnt	110 „	mittel
„	stark verdünnt	450 „	schnell
NH_4OH	verdünnt	460 „	langsam
„	stark verdünnt	490 „	„
LiOH	„ „	570 „	schnell
$Ba(OH)_2$	konzentriert	390 „	langsam
$Cd(OH)_2$	„	500 „	„
HCl	verdünnt	210 „	schnell
„	stark verdünnt	370 „	„
NaCl	„ „	430 „	„
KCl	„ „	350 „	mittel
KJ	„ „	510 „	„
HBr	„ „	220 „	„
NaBr	„ „	240 „	„
NH_4F	„ „	550 „	schnell
LiF	„ „	600 „	„
CaF_2	„ „	600 „	„
H_2SO_4	verdünnt	190 „	„
„	stark verdünnt	430 „	„
$CoSO_4$	„ „	500 „	mittel

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Elektrolyt	Konzentration	Maximalspannung	Spannungsausbildung nach 2 Min. Ausschalten
HNO_3	verdünnt	200 Volt	schnell
„	stark verdünnt	270 „	„
KNO_3	„ „	430 „	mittel
H_3PO_4	verdünnt	325 „	schnell
„	stark verdünnt	440 „	„
KH_2PO_4	„ „	über 650 „	„
H_3AsO_4.	verdünnt	370 „	„
„	stark verdünnt	470 „	„
$KMnO_4$.	„ „	100 „	mittel
$K_2Cr_2O_7$	„ „	70 „	„
NH_4HMoO_4 . . .	„ „	480 „	langsam
$(NH_4)_2B_2O_4$ . . .	verdünnt	410 „	schnell
KH_2BO_3	stark verdünnt	540 „	„
KCN	„ „	500 „	„
KCNS	„ „	540 „	„
$K_4Fe(CN)_6$. . . .	„ „	90 „	mittel
Essigsäure	„ „	530 „	schnell
Na-Acetat	„ „	620 „	„
Citronensäure . .	„ „	520 „	mittel
Oxalsäure	„ „	370 „	schnell
Li_2CO_3	„ „	580 „	sehr schnell
Na_2CO_3.	„ „	über 650 „	„ „
K_2CO_3	verdünnt	250 „	„ „
„	stark verdünnt	„ 650 „	„ „
$(NH_4)_2CO_3$	„ „	560 „	langsam
$NaHCO_3$	„ „	„ 650 „	schnell

Betriebsspannung: 650 Volt.

Die Rubrik „Spannungsausbildung nach 2 Min. Ausschalten" gibt einen Anhalt für die Beständigkeit der Gashaut. Die Angabe „stark verdünnt" bedeutet eine so große Verdünnung, daß eben noch genügende Leitfähigkeit im Elektrolyten vorhanden war.

Die Tabelle zeigt eine ziemliche Gleichförmigkeit der

Maximalspannung bei den meisten Elektrolyten. Ausgesprochen geringe Maximalspannung schienen nur $KMnO_4$, $K_2Cr_2O_7$ und $K_4Fe(CN)_6$ zu besitzen. Diese wurden deshalb genauer mit einem von unten her eingeführten Tantalstabe und auch gleich bei verschiedenen Konzentrationen untersucht. Dabei ergab sich folgendes:

Tabelle 2.

Elektrolyt	Stromdichte Amp./qcm	Spannung bei einem Gehalt der Lösung von 10 ‰	1 ‰	0,5 ‰
$KMnO_4$	0,01∞	130 Volt	210 Volt	240 Volt
	0,006∞	120 „	180 „	260 „
	0,0002∞	230 „	310 „	340 „
$K_2Cr_2O_7$	0,01∞	120 „	230 „	230 „
	0,005∞	160 „	150 „	160 „
	0,001∞	160 „	130 „	130 „
$K_4Fe(CN)_6$	0,006∞	170 „	240 „	360 „
	0,002∞	220 „	360 „	340 „
	0,006∞	140 „	280 „	360 „

Diese Elektrolyten ergeben also tatsächlich viel geringere Maximalspannungen als die meisten anderen, die bei Einführung des Tantals von unten her bei hinreichender Verdünnung maximal über 800 Volt aushalten. Sie eignen sich schlecht.

Ungeeignet sind auch die Ammonsalze, da sie durch Ausschalten stark beeinflußt werden und zu schleichender Wiederausbildung der Spannung beim Wiedereinschalten neigen.

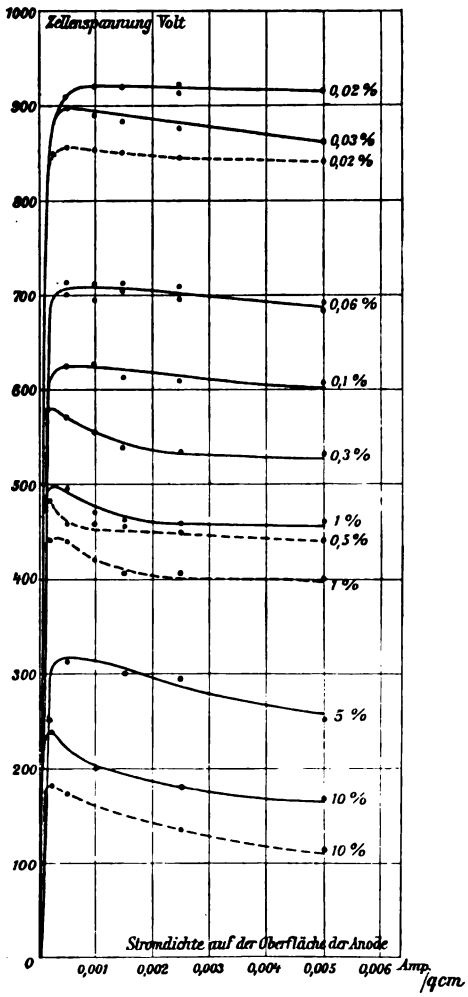
Zu den weiteren Versuchen schienen sich am besten die Alkalisalze der Kohlensäure zu eignen. Die meisten der folgenden Versuche wurden deshalb mit K_2CO_3 ausgeführt.

3. Konzentration der Elektrolyte.

Zunächst wurde mit K_2CO_3 und mit NaOH der Einfluß der Konzentration des Elektrolyten auf die Beziehung zwischen Stromdichte und Spannung, die schon früher mit „statischer Charakteristik" bezeichnet wurde, untersucht.

Die Messungen wurden in der Weise angestellt, daß nach vollendeter Formierung die statische Charakteristik für eine

bestimmte Konzentration bestimmt, dann ohne an dem Tantalstabe irgend etwas zu ändern, eine Lösung anderer Konzentration in die Zelle eingefüllt und wieder die Charakteristik gemessen wurde. Stets stellte sich nach kurzer Zeit für dieselbe Konzentration auch wieder dieselbe Charakteristik ein, einerlei, ob sie vorher höher oder tiefer gelegen hatte. Die hohe Spannung bei großer Verdünnung war durchaus nicht durch Spannungsabfall im Elektrolyten infolge schlechter Leitfähigkeit desselben hervorgerufen. Der Spannungsverlust im Elektrolyten betrug bei der größten Verdünnung von 0,02 Proz. nur 8,0 Volt bei einer Stromdichte von 0,005 Amp./qcm.



Statische Charakteristiken von Tantalanoden bei verschiedenen Konzentrationen des Elektrolyten.

—— K_2CO_3; ----- NaOH; $t = 0°$ C.

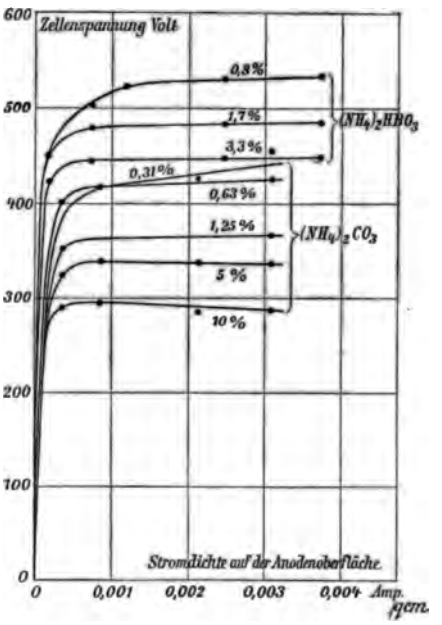
Fig. 1.

Die Resultate der Messungen sind in nebenstehender Fig. 1 eingetragen und zeigen, daß die Charakteristik in hohem Maße von der Konzentration abhängt.

Bei geringer Konzentration findet nach Erreichen der Maximalspannung der Stromübergang in zahlreichen feinen, leise knisternden Fünkchen statt, von denen die ganze Oberfläche des Tantals übersät ist. Je größer die Konzentration gewählt wird, um so mehr nimmt die Zahl der Fünkchen ab,

ihre Größe und ihr Geräusch zu. Bei großer Konzentration bleibt meistens nur ein Funke übrig, der dazu neigt, sich an einer Stelle festzusetzen. Er bewirkt lebhafte Spannungsschwankungen und einen erheblichen Wiederabfall der Spannung mit zunehmender Stromdichte, wie die Kurven deutlich erkennen lassen.

Dieses Verhalten der Funken läßt sich aus der Änderung der Leitfähigkeit des Elektrolyten mit der Konzentration erklären. Im Momente der Funkenentladung strebt die gesamte Elektrizitätsmenge im Elektrolyten sich an die Stelle zu begeben, wo der Funke übergeht. Je geringer nun die Konzentration und damit die Leitfähigkeit des Elektrolyten ist, um so weniger Elektrizität wird dem Funken nachgeliefert und um so schneller erlischt er wieder.



Statische Charakteristiken von Aluminiumanoden bei verschiedenen Konzentrationen des Elektrolyten. $t = 0°$ C.

Fig. 2.

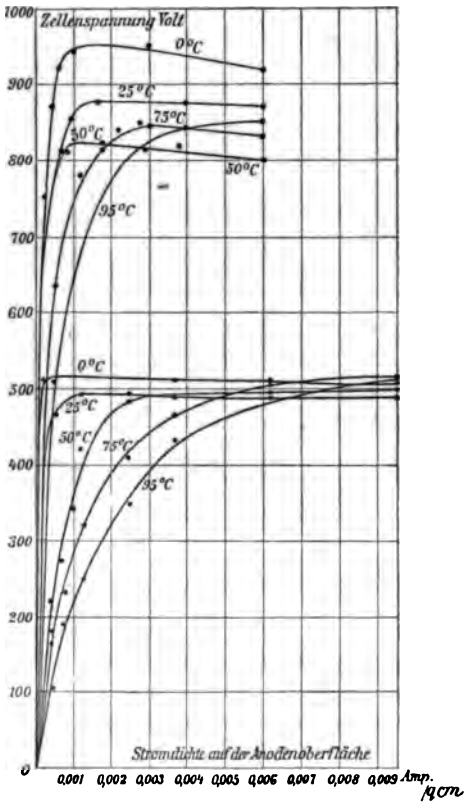
Die große Änderung der Maximalspannung, oder, was dasselbe ist, die Änderung der maximal möglichen Dicke der Gashaut mit der Konzentration kann daraus aber nicht erklärt werden. Sie hat vielmehr wahrscheinlich ihren Grund in einer Änderung der Festigkeit, Löslichkeit und Struktur der porösen festen Haut mit der Konzentration.

Da entsprechende Versuche beim Aluminium noch nicht angegeben waren, erschien es wünschenswert, sie zum Vergleich hier nachzuholen. Sie wurden mit $(NH_4)_3HBO_3$ und $(NH_4)_2CO_3$ ausgeführt und sind in obenstehender Fig. 2 zusammengestellt.

Sie zeigen, daß auch beim Aluminium ein deutlicher, wenn auch nicht so großer Einfluß der Konzentration besteht, wie beim Tantal. Die Funkenerscheinungen sind dieselben.

4. Temperatur.

Die Kenntnis der Änderung der statischen Charakteristik mit der Temperatur ist besonders für die Technik wichtig, weil die praktische Brauchbarkeit des elektrolytischen Aluminiumgleichrichters bisher besonders daran gescheitert ist, daß die Aluminiumzelle bei starker Erwärmung unwirksam wird. Für Tantal wurde der Einfluß der Temperatur mit einer 0,02 proz. Lösung von K_2CO_3 durch Formieren bei 0° C., stufenweises Erwärmen auf 25, 50, 75, 95° C., und stufenweises Wiederabkühlen auf dieselben Temperaturen untersucht. Bei gleicher Temperatur ergaben sich für beide Fälle nahezu dieselben Werte. Die Resultate der Messungen sind in nebenstehender Fig. 3 eingetragen. Zum Vergleich sind die für Aluminium in 1,7 proz. Lösung von $(NH_4)_2HBO_3$ erhaltenen Werte hinzugefügt.



Statische Charakteristiken von Aluminiumanoden und Tantalanoden bei verschiedenen Temperaturen.

Fig. 3.

Die Kurven zeigen, daß bei höherer Temperatur der Anstieg der Spannung mit dem Strom weniger steil ist, und die Maximalspannung erst bei höherer Stromdichte erreicht wird.

Ferner, daß Tantal durch die Temperatur viel weniger beeinflußt wird als Aluminium.

Es kommt noch hinzu, daß Aluminium in allen anderen Elektrolyten weit stärker durch die Temperatur beeinflußt wird als in $(NH_4)_2HBO_3$, so daß die angegebenen Kurven exzeptionell günstige Werte darstellen. Der Reststrom (d. i. der bei einer bestimmten Spannung, welche kleiner als die maximale ist, stets übrig bleibende Strom) ist beim Aluminium bei höheren Temperaturen viel größer als beim Tantal. Er ist es aber gerade, der eine einmal eingetretene Erwärmung der Zelle verstärkt und dadurch ihren Niederbruch herbeiführt.

5. Stromunterbrechungen.

In dieser Hinsicht ist also Tantal im Vorteil. Dafür ist es aber wieder im Nachteil infolge der Empfindlichkeit der Gashaut gegen Ausschalten.

Bei Aluminium in $(NH_4)_2HBO_3$ ist die Dicke der Gashaut nach dem Ausschalten des Stromes so konstant, daß eine Änderung während der jedesmal mehrere Minuten dauernden Kapazitätsmessungen nicht zu konstatieren war. Bei Tantal ist im günstigsten Falle, in Lösungen kohlensaurer Alkalien, die Abnahme der Gashaut und vor allem die Verschlechterung des dielektrischen Widerstandes nach dem Ausschalten immer noch so groß, daß sie Kapazitätsmessungen von mehreren Minuten unmöglich macht.

Im allgemeinen nimmt die Unbeständigkeit mit zunehmender Verdünnung der Lösung und mit zunehmender Maximalspannung zu. Die folgende Tab. 3 möge die Geschwindigkeit veranschaulichen, mit der die Gashaut in einigen günstigen Fällen dünner wird.

Die in der Tab. 3 angegebenen Kapazitäten wurden durch absolute Messungen bei 56 und 130 Perioden in der Sekunde erhalten. Aus der Differenz der Kapazitäten der beiden Perioden wurde der in der Tabelle angegebene Widerstand und damit die angegebene reine Kapazität errechnet. Die Tabelle zeigt für beide Fälle eine rapide Abnahme des Widerstandes nach dem Ausschalten. Die Kapazität nimmt anfangs beschleunigt, später wieder langsamer zu und scheint sich einem Endwerte zu nähern.

Tabelle 3.

Elektrolyt	Formierungsspannung	Zeit nach dem Ausschalten	Kapazität der Gashaut	Widerstand der Gashaut	Dicke der Gashaut für $\varepsilon = 1$
K_2CO_3 0,1 %	300 Volt	0	$6{,}70 \cdot 10^{-8}$ F.	$8{,}17 \cdot 10^5$ Ohm	29,6 $\mu\mu$
		10 Sek.	7,45 „	5,70 „	26,7 „
		20 „	7,70 „	3,80 „	25,8 „
		30 „	7,80 „	2,80 „	25,5 „
		1 Min.	8,10 „	1,83 „	24,6 „
		2 „	8,50 „	1,33 „	23,4 „
		3 „	9,00 „	1,17 „	22,1 „
		4 „	9,50 „	1,08 „	20,9 „
		5 „	10,08 „	1,02 „	19,7 „
		6 „	10,70 „	1,00 „	18,6 „
		7 „	11,42 „	1,00 „	17,4 „
		8 „	12,20 „	0,98 „	16,3 „
K_2CO_3 0,025 %	700 Volt	0	$3{,}18 \cdot 10^{-8}$ F.	$10{,}0 \cdot 10^5$ Ohm	62,6 $\mu\mu$
		10 Sek.	3,20 „	8,6 „	62,2 „
		20 „	3,21 „	7,6 „	62,0 „
		30 „	3,23 „	6,7 „	61,6 „
		1 Min.	3,32 „	4,6 „	59,9 „
		1,5 „	3,55 „	3,6 „	56,0 „
		2 „	3,85 „	2,9 „	51,7 „
		2,5 „	4,35 „	2,4 „	45,7 „
		3 „	5,13 „	2,0 „	38,8 „
		3,5 „	6,40 „	1,6 „	31,1 „
		20 Std.	13,30 „	0,32 „	15,0 „
		40 „	16,50 „	0,40 „	12,0 „

6. Eigenschaften der festen Haut.

Die feste Haut wächst beim Tantal ebenso wie beim Aluminium dauernd mit der hindurchgeschickten Elektrizitätsmenge, was sich sehr bequem durch die Änderung der an ihr auftretenden Interferenzfarben bei konstanter Spannung und konstanter Dicke der Gashaut beobachten läßt. Da die Tantalstäbe bei vorsichtiger Behandlung mit Schmirgel eine hohe Politur annehmen und die feste Haut in dünnen Schichten sehr durchsichtig ist, lassen sich schön leuchtende Interferenzfarben erzielen. Wenn die Zelle z. B. an 160 Volt gelegt wurde, begann das Tantal nach einiger Zeit violett zu werden.

Dann wurde es blau, das Blau wurde heller und ging ins Grün über und so wanderte die Färbung langsam durch das ganze Spektrum hindurch, um wieder mit violett zu beginnen. Nach dessen dritter Wiederkehr, also bei einer Dicke der festen Haut von ca. 700 $\mu\mu$ begannen die Farben zu verblassen, weil die Haut trübe wurde. Die Dicke der Gashaut war hierbei konstant gleich 13 $\mu\mu$ (wenn $\varepsilon = 1$).

Wird die Dicke der festen Haut durch Kapazitätsmessungen ermittelt, nachdem die Zelle getrocknet und mit Quecksilber gefüllt ist, so ist große Vorsicht geboten, da die feste Haut einen letzten Rest von Feuchtigkeit nur sehr schwer abgibt. Solange sie aber noch eine Spur davon enthält, ist die (mit Quecksilber gefüllte) Zelle ein Kondensator mit zwei verschiedenen hintereinander geschalteten Dielektrizis, nämlich der Gashaut mit sehr hohem Widerstande und der nicht ganz trockenen festen Haut mit geringerem Widerstande. Bei Kapazitätsmessungen mit Gleichstrom erhält man dann für die Dicke der festen Haut stets zu geringe Werte, die den richtigen um so näher liegen, je geringer der Widerstand, also je größer die Feuchtigkeit der festen Haut ist.

Hierauf dürfte vielleicht auch ein Widerspruch in den Versuchen von O. M. Corbino[1]) zurückzuführen sein, welcher die Kapazität der auf Aluminium in Lösungen von weinsaurem Natrium–Kalium gebildeten festen Haut zu messen versuchte. Er konstatierte zunächst: 1. daß die Dicke der „elektrisch wirksamen Schicht" (i. e. Gashaut) von der Dauer der Einschaltung fast unabhängig ist, 2. daß die Dicke der festen Haut nach optischen Beobachtungen dauernd mit der hindurchgeschickten Elektrizitätsmenge zunimmt. Nun ermittelt er die Dicke der „trockenen" festen Haut durch Füllen der getrockneten Zelle mit Quecksilber und findet, daß die so erhaltenen Werte nicht mit den optischen Beobachtungen, sondern mit den Kapazitätsmessungen im Elektrolyten übereinstimmen. Da nun das Quecksilber nicht wie Wasser in die Poren der festen Haut eindringen kann, so mußte dieselbe eben noch Feuchtigkeit enthalten.

Dieser Fall trat bei den eigenen Messungen wiederholt

1) O. M. Corbino, Il Nuovo Cimento p. 113. Sept. 1906.

ein und es zeigte sich stets, daß ein sorgfältigeres Trocknen sogleich zu sehr viel geringeren Kapazitäten führte. Wenn die feste Haut vom Elektrolyten erfüllt ist, ist ihr Widerstand so gering, daß er bei der Kapazitätsmessung der Gashaut nicht in Frage kommt.

7. Eigenschaften der Gashaut.

Da die Gashaut der Tantalelektroden bei sämtlichen untersuchten Elektrolyten gegen Ausschalten empfindlich ist, war die Ermittelung ihrer Kapazität als Funktion der ausgehaltenen Spannung etwas unbequem. Denn erstens kann bei der absoluten Messung mit einem rotierenden Unterbrecher nicht gut die volle Spannung an der Zelle (bis 980 Volt) auch zugleich als Meßspannung benutzt werden; zweitens würde es nicht einmal viel nützen, weil der Unterbrecher die Zelle in jeder Periode einmal kurzschließt.

Eine Beobachtung der Zunahme der Kapazität mit der Zeit nach dem Ausschalten und Extrapolation auf die Zeit Null ergab auch keine guten Werte, weil die Zunahme der Kapazität im ersten Moment nach dem Ausschalten zu unregelmäßig verlief.

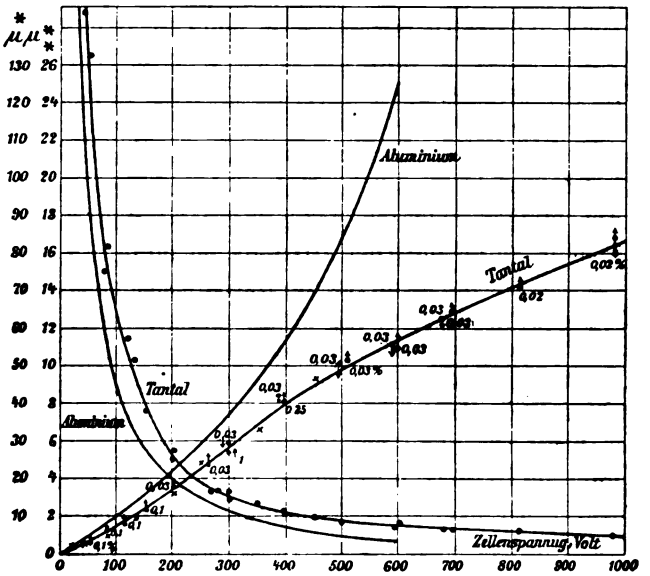
Um den Einfluß des Ausschaltens nach Möglichkeit auszuschließen, blieb die Zelle dauernd an der Formierungsspannung und wurde bei laufendem Unterbrecher immer nur einen Moment in die Anordnung zur Kapazitätsmessung umgeschaltet; dem dabei erfolgenden Ausschlage des Galvanometers gemäß wurde der veränderliche Widerstand des Kapazitätskreises so lange geändert, bis das Galvanometer in Ruhe blieb. Solche Einstellungen wurden jedesmal bei drei verschiedenen Perioden vorgenommen. Die zu verschiedenen Zeiten für denselben Punkt der Kurve erhaltenen Werte stimmten befriedigend überein. Der aus den Kapazitätsmessungen (bei 40—150 Perioden in der Sekunde) errechnete (scheinbare) „Widerstand" der Gashaut stieg von $8{,}2 \cdot 10^4$ Ohm pro qcm bei 20 Volt Maximalspannung bis auf $2{,}0 \cdot 10^7$ Ohm pro qcm bei 980 Volt Maximalspannung.

Da die Bestimmung der Oberfläche der Tantalstäbe wegen ihrer geringen Größe nicht sehr genau sein konnte, wurde mit allen drei Stäben beobachtet, um die Genauigkeit der Ergeb-

nisse zu erhöhen. Außerdem wurde sowohl der Elektrolyt als auch die Konzentration variiert, und es zeigte sich auch hier, daß die Beziehung zwischen Dicke der Gashaut und maximal ausgehaltener Spannung von beiden unabhängig ist.

In die nachstehende Fig. 4 ist sowohl für Tantal als auch für Aluminium als Funktion der ausgehaltenen Spannung

* *Dicke der Gashaut* $\mu\mu$
** *Kapazität der Gashaut pro qcm in* 10^{-3} *Mikrofarad*



Kapazität pro qcm und Dicke (für $\varepsilon = 1$) der Gashaut von Tantal- und Aluminiumanoden in Abhängigkeit von der ausgehaltenen Spannung.

$t = 0°$ C.; × = 0,05 Proz. KH_2PO_4.

• = K_2CO_3, die beigefügten Zahlen sind die Konzentrationen in Proz.

Fig. 4.

erstens die Kapazität der Gashaut pro qcm, zweitens ihre Dicke eingetragen. Der Einfachheit halber wurde dabei $\varepsilon = 1$ gesetzt.

In der Arbeit über Aluminium war zwar für die Gashaut $\varepsilon = 1{,}4$ abgeleitet, und die Gründe, die dazu führten, nämlich daß die Gashaut unter elektrostatischen Drucken von

mehreren Tausend Atmosphären steht und bei Entfernen dieser Drucke nicht expandiert, also sich dauernd in einem Zustande großer Verdichtung befinden muß, diese Gründe gelten auch hier.

Da sich aber die Gashaut wahrscheinlich in den Poren der festen Haut befindet, so kommt nicht nur die Dielektrizitätskonstante des verdichteten Gases, sondern auch die der festen Haut in Frage. Diese war beim Aluminium nach einer allerdings ziemlich rohen Methode zu 1,5 bestimmt, lag also der Dielektrizitätskonstanten des verdichteten Gases so nahe, daß sich für die Dielektrizitätskonstante der dielektrischen Schicht 1,4 annehmen ließ.

Eine Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten der festen Haut des Tantals ist aber bisher nicht gelungen, da zur Herstellung dicker, direkter Dickenmessung zugänglicher Häute nicht genügend Material vorhanden war, und die dünnen Häute wegen ihrer Feuchtigkeit keine sichere Kapazitätsmessung erlaubten.

Deshalb wurde die Dielektrizitätskonstante, um eine Vergleichung zu ermöglichen, für die Gashaut beider Metalle willkürlich gleich 1 gesetzt.

Die Fig. 4 zeigt, daß bei dieser Annahme die Kurven für Tantal und Aluminium nicht übereinstimmen, wie man zunächst erwarten sollte. Und zwar ist die Abweichung von ganz anderer Größenordnung wie die Messungsfehler. Ferner ist nicht nur die Lage, sondern auch der Charakter der Kurven verschieden. Die Kurve des Aluminiums biegt sich nach oben, so daß mit zunehmender Hautdicke das Spannungsgefälle in der Haut abnimmt, während sich die Tantalkurve eher umgekehrt verhält.

Im Zusammenhange damit steht wohl ein sehr träges Wachsen der Gashaut des Tantals. Wenn nämlich bei Aluminium die Spannung von z. B. 400 auf 500 Volt erhöht wird, so steigt die Dicke der Gashaut in kurzer Zeit auf den 500 Volt entsprechenden Wert. Beim Tantal dagegen ist die Gashaut, welche 400 Volt aushält, bei einer ganz geringen Zunahme des Reststromes auch imstande 500 Volt auszuhalten, und wenn ihre Dicke für 500 Volt 1—2 Stunden nach der Spannungserhöhung bestimmt wird, so ergibt sich fast derselbe Wert, wie für 400 Volt, und erst ganz allmählich wird die Gashaut dicker.

Deshalb konnte immer erst wieder eine Beobachtung angestellt werden, nachdem die Zelle 24 Stunden an der neuen Spannung gelegen hatte.

Die Kontrolle, ob denn auch wirklich die Dicke sich vollständig auf den der Spannung entsprechenden Wert ausgebildet hatte, wurde dadurch erreicht, daß diese Versuche nicht nur bei stufenweiser Erhöhung, sondern auch bei stufenweiser Erniedrigung der Spannung ausgeführt wurden. Da ja die Gashaut nach dem Ausschalten, also auch nach Erniedrigung der Spannung ziemlich schnell dünner wird, so stellte sich auch bei Verringerung der Spannung nach einiger Zeit wieder die geringere, der niedrigeren Spannung zukommende Hautdicke her. Die beiden so für gleiche Spannungen erhaltenen Werte der Hautdicke mußten übereinstimmen. In der Figur sind die ersten durch ↑, die zweiten durch ↓ gekennzeichnet.

8. Spannungsgefälle in unwirksamer Richtung.

Auch bei den Versuchen zur Bestimmung des maximalen Spannungsverlustes in unwirksamer Richtung erschwerte die Empfindlichkeit der Gashaut gegen Ausschalten die Messungen, die in etwas anderer Weise als beim Aluminium angestellt wurden. Beim Umschalten in die unwirksame Richtung wurde die Zelle zunächst an eine ganz geringe Spannung gelegt. Dann war der Strom fast völlig Null. Nun wurde die Spannung kontinuierlich erhöht, bis in einem ziemlich scharf markierten Punkte der Strom plötzlich unter Sinken der Spannung zu steigen begann. So ergab sich also auch hier eine gewisse Maximalspannung.

Die Messungen wurden wegen der Abnahme der Gashaut nach dem Ausschalten möglichst schnell ausgeführt. Immerhin sind die so erhaltenen Werte um einige Volt unsicher. Sie müssen mit den von Hobbs[1]) bei sehr geringen Elektrodenabständen gefundenen Funkenentladungspotentialen übereinstimmen. Hobbs fand bei Funkenentladung zwischen Aluminiumelektroden ein konstantes Spannungsgefälle von 105 Volt/μ, zwischen Platinelektroden 195 Volt/μ. Die Werte für die anderen Metalle lagen dazwischen. Das Gefälle scheint

1) G. M. Hobbs, Phil. Mag. (6) **10**. p. 617. 1905.

mit dem spezifischen Gewicht der Elektroden zuzunehmen. Tantal wurde nicht untersucht. In der folgenden Tabelle 4 ist dafür mit einer gewissen Willkür 190 Volt/μ angenommen.

Tabelle 4.

Maximalspannung in wirksamer Richtung	Dicke der Gashaut $\varepsilon = 1$ $\mu\mu$	Dicke der Gashaut $\varepsilon = 1{,}4$ $\mu\mu$	Gemessene Maximalspannung in unwirksamer Richtung	Maximalspannung in unwirksamer Richtung berechnet für ein Spannungsgefälle von 190 Volt/μ für $\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1{,}4$
248 Volt	22,6	31,6	9,5 Volt	4,3 Volt	6,0 Volt
410 „	41,5	58,1	14 „	7,9 „	11,0 „
525 „	51,0	71,3	18 „	9,7 „	13,6 „
660 „	61,3	85,8	23 „	11,7 „	16,3 „
820 „	72,0	100,8	30 „	13,7 „	19,2 „
980 „	82,0	114,7	40 „	15,6 „	21,8 „

Die Tabelle 4 zeigt, daß die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den nach Hobbs ermittelten Werten für $\varepsilon = 1$ schlecht, für $\varepsilon = 1{,}4$ (für Aluminium abgeleiteter Wert) etwas besser ist.

9. Durchschlagsversuche.

Der Versuch, eine Gashaut, die bis zu einer bestimmten Spannung formiert ist, bei einer viel geringeren Spannung zu durchschlagen, dadurch, daß Quecksilber in die Zelle gefüllt wird, das den Elektrolyten verdrängt und nun für die Gashaut eine Metallkathode anstatt der vorherigen Elektrolytkathode bildet, gelingt auch beim Tantal. Es wurden dabei folgende Werte erhalten:

Tabelle 5.

Tantal in 0,02 Proz. K_2CO_3-Lösung; $t = 0°$ C.

Spannung, bis zu welcher formiert wurde	Dauer der Formierung	Durchschlagsspannung gegen Quecksilber
400 Volt	20 Min.	180 Volt
520 „	20 „	300 „
650 „	20 „	445 „
650 „	2 Stunden	490 „
650 „	20 „	630 „
950 „	3 „	550 „

Bezüglich der Bedeutung und Erklärung des Versuches muß auf die zweite Arbeit über Aluminium verwiesen werden.

IV. Verhalten weiterer Metalle.

Die elektrolytische Ventilwirkung, welche bisher beim Aluminium und Magnesium beobachtet wurde, stellt sich außerdem noch bei Tantal und gemäß dem Patent von Siemens & Halske wohl auch bei Niob und Vanadium ein, und zwar bei Ta (Nb, V) in allen untersuchten Elektrolyten, bei Al in vielen, bei Mg in sehr wenigen.

Da das eigentlich Wirksame die Gasschicht auf der Oberfläche des Metalles ist, so müssen alle hier behandelten Erscheinungen, wenn auch in sehr verschiedenem Grade, überall da auftreten, wo sich bei der Elektrolyse eine anodische Gashaut bildet. Wo diese Gashaut aber nicht durch das Gerüst einer porösen festen Haut gestützt wird, kann sie nur ganz minimale Dicken erreichen, so daß die ganzen Erscheinungen schwer zu ermitteln sind und leicht durch andere verdeckt werden. Wenn aber die Bedingungen so gewählt werden, daß sich auf der Oberfläche der Anode eine feste poröse Haut bilden kann, wozu im allgemeinen erforderlich ist, daß die Anode im Elektrolyten schwer löslich ist und mit ihm eine schwer lösliche Verbindung bilden kann, so müssen sich alle die erwähnten Erscheinungen in verstärktem Grade ausbilden. Es läßt sich erwarten, daß sich diese Bedingungen durch geeignete Wahl des Elektrolyten, der Konzentration, der Temperatur und Formierungsstromdichte für fast alle Metalle herstellen lassen, und daß durch das Studium der dabei auftretenden Erscheinungen viele Eigentümlichkeiten in dem Verhalten der Elektroden der Erklärung näher zu bringen sind.

So fand z. B. bezüglich der Unipolarität Holtz[1]), daß in Form relativ kleiner Elektroden, also bei hoher Stromdichte, die Metalle Fe, Pb, Ni, Sb, Bi in 1 proz. H_2SO_4, sowie Cu in $CuSO_4$ und $CuCl_2$ der Ventilwirkung des Aluminiums nahe kommen.

---

1) W. Holtz, Physik. Zeitschr. **6**. p. 480. 1905.

Zusammenfassung.

Die elektrolytische Ventilwirkung der Tantalelektroden ist der der Aluminiumelektroden ähnlich, zeigt aber folgende besondere Eigentümlichkeiten.

1. Tantalelektroden formieren sich schneller.

2. Sie zeigen die Ventileigenschaften in allen untersuchten Elektrolyten.

3. Die höchsten Spannungsabdrosselungen lassen sich in den Alkalisalzen der Kohlensäure erreichen, nämlich bis annähernd 1000 Volt.

4. Diese Wirksamkeit sinkt in allen Elektrolyten stark mit zunehmender Konzentration.

5. Der schädliche Einfluß der Erwärmung der Zelle ist bei Tantal wesentlich geringer als bei Aluminium.

6. Der schädliche Einfluß von Stromunterbrechungen ist beim Tantal wesentlich größer.

7. Die Beziehung zwischen Dicke der Gashaut und ausgehaltener Spannung ist bei Annahme gleicher Dielektrizitätskonstante für Tantal eine andere als für Aluminium.

8. Das Spannungsgefälle in der Gashaut bei unwirksamer Stromrichtung (Ta-Kathode) stimmt mit den Werten für das Spannungsgefälle bei Funkenentladung und sehr kleinen Elektrodenabständen (nach Hobbs) nicht gut überein.

9. Die Durchschlagsversuche gegen Quecksilber ergeben dasselbe wie bei Aluminium.

10. Die elektrolytische Ventilwirkung wird in stark ausgesprochener Weise bei Ta, V, Nb, Al, Mg beobachtet, scheint aber unter günstigen Verhältnissen auch bei anderen Metallen vorzukommen.

(Eingegangen 10. April 1907.)

3. *Über den Dopplereffekt im Spektrum der Kanalstrahlen des Wasserstoffs;* von *F. Paschen.*

(Hierzu Taf. III.)

Im folgenden sei kurz über einige Beobachtungen berichtet, welche durch die schöne Entdeckung des Hrn. J. Stark[1]), sowie durch seine und seiner Schüler daran angeknüpfte Arbeiten veranlaßt waren.

Der Spektralapparat bestand aus einem Rowlandschen Konkavgitter von 10 cm Durchmesser und 3,03 m Krümmungsradius, welches aber zur Erlangung größerer Lichtstärke in einer zuerst von C. Runge[2]) und mir angegebenen und versuchten Art benutzt wurde: Der Spalt stand in der Brennebene eines Objektives von 7 cm Öffnung, so daß ein paralleles Strahlenbündel auf das Gitter fiel. In der Gitternormalen ist das Spektrum dann um den halben Krümmungsradius vom Gitter entfernt scharf und etwa 4 mal lichtstärker als in der Rowlandschen Anordnung. Außerdem sind die Spektralbilder des Spaltes in der Normalen stigmatisch abgebildet. Die Abbildung ist auch noch in einiger Entfernung von der Normalen brauchbar, so daß z. B. bei meiner Aufstellung in der ersten Gitterordnung zwischen den Wellenlängen 6000 und 3700 Å.-E. genügende Schärfe herrschte, wenn die Wellenlänge 4800 Å.-E. in der Normalen lag. Die Dispersion variierte und betrug in der Normalen etwa 9,4 Å.-E. pro Millimeter, an den Rändern der dem Spektrum angepaßten Kamera 8,2 Å.-E. pro Millimeter.

Die Entladungsröhren waren 5 cm weit. Die Anode befand sich entweder am Ende der Röhre oder in einem senkrecht an sie angesetzten Seitenrohre. Die Kathode bestand aus Aluminium und hatte möglichst viele runde Löcher, deren Weite zwischen 0,6 und 5 mm variiert wurde, bei jeder Kathode

1) J. Stark, Gött. Nachr. 1905; Physik. Zeitschr. 6. p. 892. 1905 7. p. 249, 251, 353. 1906; Ann. d. Phys. 21. p. 401. 1906.

2) C. Runge u. F. Paschen, Wied. Ann. 61. p. 644. 1897.

aber gleich blieb. Zur Messung des Kathodenfallpotentiales befand sich eine Sonde aus einem kurzen dünnen Platindraht im Beginne des Glimmlichtes. Die Kanalstrahlen durchliefen hinter der Kathode eine Länge, welche zwischen 5 und 13 cm variiert wurde. Zur Beobachtung parallel der Kanalstrahlbewegung ließ man die Strahlen auf einen Fleck nahe dem Ende der Röhre konvergieren und bildete diesen Konvergenzfleck mit einem Objektive auf dem Spalte ab. Stellt man parallele Strahlen direkt vor den Spalt, so beobachtet man besonders bei großem Öffnungswinkel des Spektralapparates nicht exakt genug in der Translationsrichtung. Man muß vielmehr bei solcher Strahlenanordnung eine Linse einschieben, welche um ihre Brennweite vom Spalte entfernt steht.

Zur Erzeugung der Entladung diente bis 3100 Volt eine Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie, für höhere Spannungen ein Induktorium mit einem Quecksilberstrahlunterbrecher.

Das Gas wurde elektrolytisch aus sehr verdünnter Schwefelsäure mit sehr schwachem Strome hergestellt und in einem an die Röhre angeblasenen Vorratsraume mit Phosphorpentoxyd getrocknet. Zur Reinigung vom Quecksilberdampf diente anfangs ein Behälter mit Schwefelstücken, der durch eine Röhre mit Kupferspähnen von der Entladungsröhre getrennt war. Später trat dazu ein zweiter Behälter mit Kokosnußkohle, der in flüssige Luft tauchte. Dieser reinigt den Wasserstoff selbst bei Gegenwart gefetteter Schliffe und Hähne vollkommen, weil alle Verunreinigungen, welche z. B. beim Stromdurchgang anfangs entstehen, von der Kohle viel stärker absorbiert werden, als Wasserstoff. Da die Kohle aber auch bedeutende und vom Drucke abhängige Mengen Wasserstoff absorbiert, so ist diese Einrichtung zugleich ein wirksamer Druckregulator. Dies ist wegen der auch in Wasserstoff beträchtlichen Selbstevakuation für längere Versuche wichtig. 12stündige Expositionen konnten bei dieser Anordnung leicht ohne jegliche Wartung unter fast konstantem Gasdrucke und entsprechend konstantem Entladungspotential ausgeführt werden. Das Kohleköl̈bchen befand sich dabei dauernd in einer Dewarschen $1^1/_2$ Literflasche, in der sich die flüssige Luft 10 Tage lang hielt. Da der Siedepunkt dieser flüssigen Luft langsam steigt, vermindert sich die Absorptionsfähigkeit der Kohle für

Wasserstoff in gleichem Maße, so daß der Gasdruck langsam etwas steigt. Die letzten Reste der flüssigen Luft verändern ihren Siedepunkt schneller und sind daher nicht mehr brauchbar.

Die Ausmessung der Spektrogramme geschah, soweit die Dopplerstreifen nicht allzu unscharf waren, mit einem Abbeschen Komparator, bei größerer Unschärfe mit einer von mir früher angegebenen photometrischen Anordnung.[1]) Bei ihr ist das Mikroskop des Komparators nach Fortnahme seines Okulars verlängert durch ein photometrisches Pyrometer von Wanner. Die zu messende Platte liegt auf dem Komparatorschlitten. Die Linie wird durch das Mikroskopobjektiv scharf auf dem Spalte des Photometers abgebildet. Man blendet so aus dem Dopplerstreifen schmale Bezirke aus und mißt ihre photographische Schwärzung. Die Schwärzungskurve des Dopplerstreifens und der Ruhelinie, welche durch schrittweises Verschieben des Schlittens erhalten wird, gestattet z. B. exakt das Maximum der Schwärzung und seine Entfernung von der Ruhelinie zu bestimmen.

Meine Beobachtungsresultate weichen zum Teil recht erheblich von denjenigen des Hrn. J. Stark ab. So ist nach allen meinen Photographien für jeden Versuch der Dopplerstreifen bei allen beobachteten Linien der Wasserstoffserie genau identisch verschoben, wenn man die Verschiebung durch $\Delta\lambda/\lambda$ mißt. Nach Hrn. J. Stark[2]) soll dies nur für die Stelle größter Verschiebung gelten (p. 414), das Maximum der Schwärzung (p. 443) und die Stelle kleinster Verschiebung (p. 442) dagegen sollen für kleinere Wellenlängen stärker verschoben sein, als für größere Wellenlängen der Serie. Meine Erfahrungen geben keinen Anhaltspunkt zur Stütze der beiden letztgenannten Behauptungen des Hrn. Stark. Fig. 1 enthält z. B. die photometrisch ermittelten Schwärzungskurven der Linien H_β, H_δ, H_ε, H_ζ einer Aufnahme (Spannung gleich 3100 Volt, Dunkelraumlänge gleich 58 mm). Die Abszissen sind für alle Linien die vom Orte der Ruhelinie an gerechneten Werte $\Delta\lambda/\lambda$. Die Ordinaten sind zwar den Intensitäten nicht proportional, gestatten aber den Beginn und das Maximum

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 5. p. 563. 1904.
2) J. Stark, Ann. d. Phys. 21. p. 401. 1906.

der Schwärzung zu beurteilen. Bei H_δ ist der Beginn des Dopplerstreifens etwas weiter abgerückt, als bei H_β. Zugleich ist aber die Stelle größter Verschiebung der Ruhelinie näher. Der ganze Streif ist also schmäler. Der Grund liegt darin, daß H_δ weniger geschwärzt ist. Bei dieser Aufnahme war H_γ zu stark exponiert und daher nicht mehr zu photometrieren. Die wiedergegebene Kurve H_γ entstammt einer anderen Aufnahme unter genau denselben Bedingungen, nur daß die Expositionszeit 9 mal kleiner war. (Die Aufnahme ist unmittelbar hinter der ersten gemacht.) H_γ hat hier ungefähr dieselbe Schwärzung

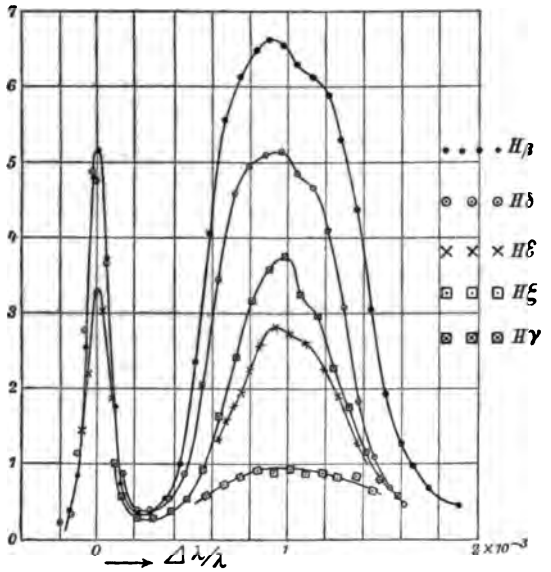


Fig. 1.

wie H_ε der ersten Aufnahme. Man sieht, daß der Dopplerstreif von H_γ schmaler erscheint als der von H_δ der ersten Aufnahme und ungefähr so breit und so gestaltet ist, wie der von H_ε der ersten Aufnahme. Auf Eastmanfilms wirkt H_β viel stärker als die übrigen Wasserstofflinien. Mit ihnen aufgenommen hat H_β das schmalste Minimum. Auf Schleussnermomentplatten wirkt H_γ bedeutend mehr als H_β. Dort hat H_γ das schmalste Minimum. H_β und H_δ sind dort ungefähr gleich geschwärzt und haben gleiche Breite des Minimums. Auf Lumière Σ-Platten wirkt H_γ nur wenig stärker als H_β und

hat dann auch nahe die gleiche Breite des Minimums. Verschieden stark geschwärzte Dopplerstreifen lassen sich bezüglich des Beginnes und des Endes nicht vergleichen, wenn sie beiderseits unscharf sind, wie im obigen Beispiele. Man kann aber zeigen, daß die Linien immer völlig gleich werden, wenn man durch passende Exposition für gleiche Schwärzung sorgt. Dies habe ich ausnahmslos für alle Aufnahmen bei jeder Entladungsspannung gefunden.

Schärfer als für das Minimum läßt sich die gleiche Verschiebung für das Schwärzungsmaximum verschiedener Linien nach der photometrischen Methode zeigen. Denn die Maxima z. B. der Kurven Fig. 1 lassen sich ziemlich genau bestimmen. Folgende Tabelle gibt die Resultate einiger solcher Messungen wieder, wobei eine Horizontalreihe immer einer einzigen Aufnahme entstammt.

Tabelle I.

$\Delta\lambda/\lambda \times 10^3$ für die Stelle größter Schwärzung.

Kathodenfall, Volt	Länge des Dunkelr. mm	H_β	H_γ	H_δ	H_ε	H_ζ
3100	58	0,97 [1])		0,95 [1])	0,98 [1])	1,00 [1])
3100	58	0,97	0,97 [1])	0,99		
3000	55	0,93	0,90	0,91		
3000	70	0,92	0,94	0,96	0,94	
5300	63	1,17	1,18	1,23		
11000	65	1,27	1,26	1,30		
17400	80	1,41	1,40	1,40		
690 [2])	30	0,93	0,94	0,94	0,98	

Die im folgenden zu behandelnden Resultate sind stets aus übereinstimmenden Messungen an H_β und H_γ abgeleitet. Diese Linien waren meistens auf Lumière Σ-Platten in annähernd gleicher Schwärzung photographiert.

Für Kathodenfallwerte von weniger als 3000 Volt sind zwei verschieden stark verschobene Dopplerstreifen zu unterscheiden. Von diesen tritt bis etwa 800 Volt nur der stärkst abgelenkte auf. Er möge als Streif I bezeichnet werden. Zwischen 800 und 1100 Volt wird daneben der weniger ab-

1) Kurven der Fig. 1.

2) Diese Messung betrifft den Dopplerstreif I, alle übrigen den Dopplerstreif II, vgl. unten.

gelenkte sichtbar. Dieser sei als Streif II bezeichnet. Zwischen 1100 und 1300 Volt sind beide nebeneinander nahe gleich stark vorhanden. Sie sind aber getrennt durch einen weniger geschwärzten Zwischenraum. Für höhere Spannungen wird Streif I schwächer, ist bei 2000 Volt noch schwach zu sehen und verschwindet bei noch höheren Spannungen ganz oder bildet eine unscharfe Begrenzung des Streif II. Die Reproduktionen der Tafel in 3,7facher Vergrößerung verdeutlichen dies Verhalten.

Auch der Gasdruck spielt für die relative Intensität beider Streifen eine Rolle derartig, daß Verringerung des Gasdruckes den Streifen I schwächt und den Streifen II dafür verstärkt. So ist Streif II bei 3100 Volt und kleiner Dunkelraumlänge unscharf nach Violett infolge von Streif I. Bei großer Dunkelraumlänge verschwindet Streif I fast ganz, und Streif II wird schärfer (vgl. die Tafel der Reproduktionen). Ebenso wird schon bei 1600 Volt Streif I sehr schwach bei einer Dunkelraumlänge von 8 cm. Diese Änderungen sind zwar völlig deutlich und sicher gestellt, aber nur von unbedeutender Größe. Die Hauptrolle spielt jedenfalls der Wert des Kathodenfalles. Die Reproduktionen stammen von einer Röhre mit Kanalstrahllöchern von 2,5 mm Durchmesser und einer Weglänge von ca. 6 cm hinter der Kathode.

Die Streifen sind bei niederen Potentialen ziemlich scharf und verbreitern sich, unschärfer werdend, bei höheren. Ihre Breite muß mit steigender Geschwindigkeit proportional der Verschiebung zunehmen, wenn alle bewegten Teile des Kanalstrahles ihre Geschwindigkeit in gleichem Maße vermehren. Ich habe nun, so schwierig es auch oft war, alle Platten so durchgemessen, daß von jedem Streif Anfang, Stelle größter Schwärzung und Ende der Schwärzung erhalten wird. Mit den beobachteten Werten des Kathodenfalles berechnen sich für jede dieser Stellen Werte von e/m, wobei angenommen wird, daß der ganze Kathodenfall für die erlangte Geschwindigkeit maßgebend ist. Es ist wahrscheinlich, daß der größte Teil der Kanalstrahlen aus der Ionisierung im Beginne der Glimmschicht stammt, so daß also der ganze Kathodenfall durchlaufen wird, und ohne Störung eine scharf definierte Geschwindigkeit im Dopplerstreif vorhanden sein müßte. Bei der Berechnung ist ferner in üblicher Weise angenommen, daß

sich die elektrische Energie Ve ohne Verlust in die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ verwandelt. Mittelwerte meiner Berechnungen enthält Tab. II. Unter V stehen die Potentialwerte des Kathodenfalles, zwischen denen die Potentiale der einzelnen Messungsreihen lagen und der Mittelwert aus diesen. Die Zahlen unter l geben die Grenzen an, zwischen denen die Länge des Dunkelraumes bei den verschiedenen Messungen variierte.

Tabelle II.

Werte von e/m nach $\frac{cm^{1/2}\,g^{1/2}}{g}$.

Anzahl der Mess.	V Volt Zwischen	V Volt Mi.	l mm	II Anfang	II $v_\infty \times 10^{-7}$ cm/sec	II Max.	II Anf. I Ende II	I Max.	I Ende
2	410— 430	420	10—30					5000	
6	465— 525	500	20—30	1700?	1,30?		3500	5200	6850
3	690— 895	800	20—32				3400	5100	7080
4	940—1070	990	23—37	950	1,37	1800	3250	4910	7090
12	1104—1275	1210	22—60	770	1,37	1880	2840	4600	7050
9	1370—1650	1500	30—70	680	1,43	1650	2890	4430	7160
3	1907—1916	1920	45—50	600	1,52	1570	2590		5900
3	2880—2950	2900	28—47	320	1,37	1270?	3000		
7	3030—3100	3100	55—90	410	1,59	1370	3000		
3	5300—6000	5700	42—75	220	1,59	1050	2300?		(6400)*
1		11000	65	90	1,41	620	2800		
1		17400	80	90	1,77	490	2100		
1		20000	120	125	2,24	564	2350		
1		24600	130	140	2,63	315	1800		

* Einmal beobachtet, vgl. unten.

Aus dieser Zusammenstellung folgt, daß der Streif I Werten von e/m entspricht, welche zwischen 3000 und 7000 liegen. Da diese Grenzen zwischen 500 und 1500 Volt annähernd die gleichen bleiben, scheint der Streif in diesem Gebiete das Gesetz zu befolgen, daß die elektrische Arbeit sich in kinetische verwandelt. Nicht dasselbe gilt für die Stelle größter Schwärzung, welche ja sicher zu beobachten ist. Sie rückt deutlich mit steigendem Potentiale nach kleineren

Werten e/m. Ahnlich steht es mit Streif II. Seine obere Grenze ist definiert, befolgt das allgemeine Gesetz bis etwa 10000 Volt und entspricht $e/m = 3000$ etwa. Die Abweichungen in den Werten erklären sich durch die Unsicherheit einer derartigen Einstellung auf die Grenze eines unscharfen Streifs. Dagegen läßt sich das Abnehmen des Wertes e/m der unteren Grenze von 1000 bei 990 Volt auf etwa 100 bei Potentialen über 10000 Volt nicht mehr durch die Unsicherheit der Einstellung erklären, ebensowenig wie das Abnehmen des Wertes e/m der gut beobachteten Stelle maximaler Schwärzung von 1800 auf 300. Neben den Anfangswerten führt die Kolumne 6 die entsprechenden Anfangsgeschwindigkeiten v_a. Sie nehmen mit steigendem Potentiale deutlich zu. Das Leuchten im Streif II beginnt also nicht etwa stets bei der gleichen Geschwindigkeit. Die Werte der Tab. II, besonders die Lage der Maxima, sind nicht erheblich beeinflußt durch den Gasdruck (Dunkelraumlänge), die Weite der Kathodenlöcher und die Länge des Weges hinter der Kathode.

Man steht bei der Beurteilung dieser Resultate vor derselben Schwierigkeit, auf welche Hr. W. Wien[1]) bei seinen Beobachtungen über die magnetische Ablenkung und andere Eigenschaften der Kanalstrahlen gestoßen ist. Auch ergeben sich bei den hohen Potentialen ähnliche Werte von e/m, wie Wien auf anderem Wege fand. Ein Unterschied besteht darin, daß Wien bei sehr hohen Potentialen noch eine Grenze entsprechend einem Werte $e/m = 10000$ gefunden hat, während nach meinen Messungen oberhalb 10000 Volt hiervon nichts mehr zu sehen ist. Nur in einem einzigen Falle erhielt ich bei einer Dunkelraumlänge von 42 mm und bei 6000 Volt den Streif I gut ausgeprägt. Seine obere Grenze entsprach $e/m = 6400$.

Es fragt sich, ob die von Wien für seine Resultate ersonnene Hypothese den Tatsachen gerecht wird. Wien nimmt Konstanz der Ladung, aber Vergrößerung der Masse etwa durch Zusammenballen mit Molekülen an. Der Wert $e/m = 1300$ würde dann etwa 3—4 Molekülen + 1 Ion Wasserstoff entsprechen und der Wert 100 etwa der Aufnahme von 50 Mole-

1) W. Wien, Wied. Ann. **65.** p. 440. 1898; Ann. d. Phys. **5.** p. 421. 1901; **8.** p. 244. 1902; **9.** p. 660. 1902; **13.** p. 669. 1904.

külen durch 1 Ion. Diese Hypothese allein entspricht den Tatsachen kaum. Der erste Streif würde an seiner oberen Grenze $e/m = 7000$ nur einem Ion entsprechen können, dessen e/m 9654 groß ist. Denn die überhaupt zur Verfügung stehende Spannung ist nur unwesentlich größer als der Kathodenfall, und eine größere Masse als die eines Ions ergäbe sofort einen bedeutend kleineren Wert e/m. Gesellt sich z. B. schon beim Verlassen der Glimmschicht ein Molekül zu dem Ion, so wäre $\frac{e}{m} = \frac{9654}{3} = 3218$ zu erwarten. Dies würde schon der unteren Grenze von Streif I oder der oberen von Streif II entsprechen. Nun ist aber erstens niemals der Wert 9654 bei meinen Beobachtungen erreicht. Der höchste, einmal erreichte Wert beträgt 7800, öfter erreicht ist 7500. Meistens schwankt die obere Grenze um 7000. Zweitens ist in der Schwärzung des Streifs I zwischen 7000 und 3000 keine Diskontinuität vorhanden. Drittens nimmt der Wert e/m für die Stelle maximaler Schwärzung mit dem Potentiale ab. Nach meiner Meinung wird dies am ungezwungendsten verstanden, wenn man annimmt, der erste Streif entspreche dem Ion, und zwar der ganze erste Streif zwischen $e/m = 7000$ und 3000. Als Ursache der Verkleinerung des Wertes e/m nehme ich an, daß das bewegte Ion erhebliche Reibungswiderstände erfährt, welche mit der Geschwindigkeit, und also auch mit dem Potentiale zunehmen. Diese Reibung muß für jeden bewegten Körper vorhanden sein. Denn das Vakuum ist noch relativ klein. Die Gasdrucke betragen in reinem Wasserstoffe nach hier von Hrn. Mergenthaler ausgeführten exakten Messungen bei Dunkelraumlängen zwischen 20 uud 100 mm noch zwischen 0,2 und 0,03 mm Quecksilber.

Ferner entsteht Gelegenheit zur Verlangsamung der Kanalstrahlen zwischen Glimmschicht und Kathode durch die entgegengerichtete Bewegung der Kathodenstrahlen in der gleichen Bahn. Die mit wachsendem Potentiale wachsende Geschwindigkeitsdifferenz bewirkt die Zunahme der Verlangsamung. Dies scheint mir das Wesentliche des Reibungsphänomens zu sein, weil die Variation der Weglänge hinter der Kathode zwischen 5 und 13 cm für die Lage der Streifenmaxima belanglos zu sein scheint.

Unter der Wirkung dieser Reibung erlangt das Ion nicht die volle Geschwindigkeit. Die mit wachsender Geschwindigkeit vermehrte Reibung verlangsamt das Gros der fliegenden Teilchen. Dasselbe gilt für die Abnahme der Werte e/m des Streifs II mit dem Potential; die Existenz dieses Streifs mit ähnlichen Eigenschaften neben dem ersten kann kaum anders gedeutet werden, als nach Wiens Hypothese unter der Annahme einer anderen Masse. Verträglich mit den Tatsachen scheint die Annahme eines einzigen zum Ion hinzugesellten Moleküles. Tritt dies Molekül vor dem Durchlaufen des elektrischen Feldes hinzu, so sollte nach obigem $e/m = 3218$ erwartet und wegen der Reibung ein etwas kleinerer Wert beobachtet werden. Daß die beobachteten oberen Grenzwerte bei kleinen Potentialen etwas größer sind, fällt nicht schwer ins Gewicht, weil hier auf die Mitte des hellen Zwischenraumes zwischen den beiden Streifen eingestellt ist. Die kleineren Werte e/m z. B. für das Maximum der Schwärzung, und ihre Abnahme bei höheren Potentialen sind erstens wie bei Streif I durch die Annahme der Reibung zu verstehen. Außerdem kommt zweitens dazu, daß das Molekül vom Ion aufgenommen sein kann, nachdem letzteres bereits einen Teil des elektrischen Feldes durchlaufen hat. Erhält es den Zuwachs z. B. erst nach dem Durchlaufen des Feldes, so bewegt es sich nunmehr nur mit $^1/_3$ der vorherigen Geschwindigkeit weiter, falls die Bewegungsgröße und Richtung erhalten bleiben. Dem entspricht ein Wert $\frac{e}{m} = \frac{9654}{9} = 1072$, der aber wegen der Reibung nicht völlig zur Beobachtung gelangen wird. Unter diesen Umständen können die kleinsten beobachteten Werte e/m noch sehr wohl der Masse von $1^1/_2$ Molekülen Wasserstoff entsprechen, und es erscheint nicht unbedingt notwendig, immer weitere Anhäufungen von Molekülen anzunehmen. Jedem neuen aufgenommenen Molekül müßte ein neuer besonderer Streif entsprechen, Aber es wäre wegen der Unschärfe von Streif II nicht zu erwarten, weitere solche getrennte Streifen zwischen II und der Ruhelinie zu beobachten. Daher können die Beobachtungen über weitere Anhäufungen von Molekülen nichts aussagen.

Nach dem Ausgeführten interessiert es, statt der Werte e/m

der Tab. II die entsprechenden beobachteten Geschwindigkeiten zu vergleichen mit denjenigen, welche ohne Reibung zu erwarten wären.

Unter der Annahme, daß e/m für Streif I den Wert 9654 und für Streif II denjenigen 3218 besitzt, enthält Tab. III das Verhältnis der beobachteten zur berechneten Geschwindigkeit dort, wo Tab. II entsprechende Werte von e/m führt.

Tabelle III.

Beobachtete Geschwindigkeit / Berechnete Geschwindigkeit.

V	Streif II e/m = 0,3218			Streif I e/m = 9654		
	Anfang	Max.	Ende	Anfang	Max.	Ende
420	—	—	—	—	0,72	—
500	0,73	—	1,04	0,60	0,73	0,84
800	—	—	1,03	0,59	0,73	0,86
990	0,54	0,75	1,01	0,58	0,71	0,86
1210	0,49	0,75	0,94	0,54	0,69	0,85
1500	0,46	0,72	0,95	0,55	0,68	0,86
1920	0,43	0,70	0,90	0,52	—	0,78
2900	0,32	0,63	0,97			
3100	0,36	0,65	0,97			
5700	0,26	0,57	0,85?			(0,81)*
11000	0,17	0,44	0,93			
17400	0,17	0,39	0,81			
20000	0,20	0,42	0,86			
24600	0,21	0,31	0,64			

* Einmal beobachtet.

Streif I entspricht danach Geschwindigkeiten, welche um 15—50 Proz. herabgedrückt sind. Die Geschwindigkeit des Maximums ist noch 80—70 Proz. der theoretischen. Ähnlich verhält sich Streif II bei kleinen Potentialen, während bei höheren weitere Verminderungen der Geschwindigkeiten erfolgen.

Hr. Stark deutet den Dopplerstreif in folgender Weise: Nur Ionen kommen in Betracht. Die kleinere Geschwindigkeit rührt daher, daß das Ion nur einen Teil des elektrischen Feldes durchläuft. Es sollen alle Geschwindigkeiten von Null an vertreten sein bis zu der durch den Kathodenfall gegebenen. Die kleineren werden aber nicht beobachtet, weil eine bestimmte

Geschwindigkeit notwendig sei, um Leuchten hervorzubringen. Nach den Versuchen des Hrn. Wehnelt[1]) ist es aber wahrscheinlicher, daß das Gros der Kanalstrahlen im Beginne der Glimmschicht entspringt und daher den Kathodenfall durcheilt. Dann aber müßte ohne Reibung eine bestimmte, scharf begrenzte Geschwindigkeit erwartet werden, also eine Dopplerlinie von der Schärfe der Ruhelinie. Die Reibung bewirkt nach meiner Auffassung die Verringerung und „Dispersion" der Geschwindigkeit.

Es bleibt zu erörtern, warum man das Kanalstrahlenbündel erst nahe der Kathode als „erste Kathodenschicht" leuchten sieht und nicht schon beim Verlassen der Glimmschicht. Hierzu ist zunächst zu sagen, daß man sogar im Anfange der Glimmschicht das Kanalstrahlbündel deutlich sehen kann. Bei reinem Wasserstoffe ist seine Farbe in der Glimmschicht bläulich. Im Dunkelraum bekommt es eine grünliche Färbung und wird intensiver, um allmählich in Rot überzugehen und dabei schnell an Helligkeit zuzunehmen. Die so ihre Farbe und Intensität stetig ändernden Strahlen bilden deutlich ein zusammenhängendes Bündel. Die bläuliche und grünliche Färbung im Dunkelraum entspricht deutlich den Linien H_β und H_γ. Es sei betont, daß keinerlei Verunreinigungen, wie Quecksilber, hierbei in Betracht kommen. Daß man im Dunkelraum H_α nicht oder nur sehr schwach sieht, liegt an einer sehr geringen „physikalischen" Intensität der Linie an dieser Stelle und nicht etwa am Phänomen von Purkinje. Denn wenn man den Strom verstärkt, wird das beschriebene Kanalstrahlbündel überall heller, ohne daß das vorher grünliche Leuchten im Dunkelraum eine rote Färbung erhielte. Der Tatbestand ist vielmehr der, daß die Kanalstrahlen in reinem Wasserstoff im Beginne ihres Bestehens vorzugsweise die kurzen Wellenlängen aussenden. Nachdem sie erhebliche Teile des elektrischen Feldes passiert haben, nimmt die Intensität zu, aber die der längeren Wellenlängen mehr als die der kurzen. Das erste schwache bläuliche Leuchten mag bei der Zertrümmerung des Moleküls durch das Elektron der Kathodenstrahlen erregt sein. Das spätere

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 67. p. 421. 1899.

hellere Leuchten mit rötlicher Farbe erfordert eine besondere, davon verschiedene Ursache.

Hier scheint nun die Hypothese des Hrn. Stark zuzutreffen, daß bei gewisser Geschwindigkeit das Leuchten eintritt. In der Tat kann diese Hypothese modifiziert in dem Sinne der Herren B. Strasser und M. Wien[1]) das Hellerwerden erklären. Bei jeder Änderung der elektrischen Feldstärke tritt eine Änderung in der Beschleunigung des fliegenden Ions ein. Denken wir letzteres zusammengesetzt aus vielen Elektronen, welche mit einer stärker positiv geladenen trägen Masse z. B. elastisch verbunden sind, so greifen die Kräfte des elektrischen Feldes die Ladungen an. Die Beschleunigungen betreffen sowohl die Massen der Elektronen, wie die elastisch mit ihnen verknüpfte übrige träge Masse. Jede Änderung der Beschleunigung löst dann Schwingungen aller trägen Massen aus. Die Schwingungen der Elektronen sind nach dem Zeemanphänomen die Lichtschwingungen. Ein mechanisches Analogon wären zwei durch eine Spiralfeder miteinander verbundene Massen, von denen nur die eine von Kräften angegriffen wird. Eine konstante Beschleunigung veranlaßt eine konstante Ablenkung jeder Masse aus ihrer Gleichgewichtslage. Jede Änderung der Beschleunigung erzeugt Schwingungen jeder Masse um ihre neue Gleichgewichtslage mit einer bestimmten dieser Masse und den elastischen Kräften entsprechenden Schwingungsdauer. Wird z. B. eine Beschleunigung sehr schnell zu Null (der Kanalstrahl tritt durch die Kathodenfläche), so schwingt jede der Massen mit einer ihrer letzten Gleichgewichtslage entsprechenden Amplitude um die Gleichgewichtslage des Ruhezustandes. Die normal zum Kanalstrahlbündel wahrgenommene Helligkeit nimmt beim Durchgang durch die Kathodenfläche meiner Versuche nochmals zu, obwohl nur ein Teil der Strahlen die Löcher passiert.

Nach diesem, hauptsächlich von Hrn. R. Gans herrührenden Bilde beginnt das Leuchten nicht mit einer bestimmten Geschwindigkeit, auch nicht bei einer bestimmten Beschleunigung, sondern erst bei Änderungen der letzten Größe, welche durch die Änderungen der elektrischen Feldstärke vor der

1) B. Strasser u. M. Wien, Physik. Zeitschr. 7. p. 746. 1906.

Kathode veranlaßt werden. Die Beobachtungen des Hrn. W. F. Graham[1]) und A. Wehnelt[2]) zeigen tatsächlich, daß ungefähr beim Beginne des Leuchtens der ersten Kathodenschicht die schnelle Änderung der Feldstärke einsetzt.

Erklärung der Tafel der Reproduktionen.

Nr.	V	l	Neben der Nummer der Aufnahme steht die Bezeichnung der Linie.
63 β γ	525	30	β bedeutet $H\beta$.
85 β γ	895	32	V ist der Kathodenfall.
72 β γ	1200	36	l ist die Dunkelraumlänge.
79 β γ	1588	50	
67 β γ	3100	58	
101 β γ	3100	80	
40 β γ	5300	68	
66 β γ	20000	120	

101 unterscheidet sich von 67 durch eine größere Dunkelraumlänge. Die Spuren von Streif I, welche auf 67 die Unschärfe am Ende von Streif II geben, sind dann verschwunden.

1) W. P. Graham, Wied. Ann. **64.** p. 66. 1898.
2) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. **10.** p. 542. 1903.

(Eingegangen 27. März 1907.)

4. *Über den Dopplereffekt im Spektrum der Kanalstrahlen des Sauerstoffs;* *von F. Paschen.*

Mit der in der vorigen Mitteilung beschriebenen Anordnung habe ich auch den elektrolytisch hergestellten und sorgfältig gereinigten Sauerstoff untersucht. Die Sauerstoffröhre ist trotz der Hähne und Schliffe leicht völlig rein zu erhalten, wenn man sie unter Stromdurchgang öfter mit reinem Sauerstoff spült. Der für Wasserstoff wertvolle Kohlebehälter ist für Sauerstoff sogar schädlich, weil die Verunreinigungen des Sauerstoffs im allgemeinen weniger als Sauerstoff absorbiert werden. Die Reinheit und Trocknung des Gases war so weit getrieben, daß sogar bei den geringsten Drucken nur Sauerstofflinien und die von der Zerstäubung der Aluminiumkathode herrührenden Aluminiumlinien auftreten, aber keine Wasserstofflinien. Je reiner der Sauerstoff und die Röhre ist, um so mehr tritt das Phänomen der Selbstevakuation auf und erfordert beständige Bedienung des Versuches zum Konstanthalten des Druckes und der Spannung. Daher waren so ausgedehnte Versuche wie mit Wasserstoff für mich ausgeschlossen.

Bei reinem Gase von nicht zu kleinem Drucke enthalten die Kanalstrahlen, wie bereits von Hrn. Goldstein gefunden, sehr hell das Serienspektrum des Sauerstoffs, welches genauer von Runge und mir[1]) untersucht ist. Da von 4 der 6 Serien des Sauerstoffs Linien zu sehen oder zu photographieren waren, schien es mir interessant, dieses Spektrum auf den Dopplereffekt hin zu untersuchen. Die genau von mir untersuchten Linien des Serienspektrums sind folgende: Die Triplets der stärkeren Tripletserie bei 6157, 5330, 4968, 4773 Å.-E., die Triplets der schwächeren Tripletserie bei 5436, 5020, 4802,

1) C. Runge u. F. Paschen, Wied. Ann. **61.** p. 641. 1897.

4673 Å.-E., das Triplet der Triplethauptserie bei 3947 A.-E. die Linie 4368 Å.-E. der Hauptserie der drei anderen Serien.

Die starke Linie 3954,8 des Runge-Paschenschen Verzeichnisses der Linien des Sauerstoffspektrums, welche aber keiner der gefundenen oder vermuteten Serien angehört, ist im Kanalstrahlenlichte sehr schwach und gehört daher wohl nicht zum Serienspektrum.

Es zeigte sich, daß keine Linie dieses Serienspektrums auch nur eine Spur von Dopplereffekt aufwies, selbst dann nicht, als an eine 30 cm lange Röhre ein Potential von 25000 Volt angelegt war, welches in Sauerstoff schon ein Röntgenstrahlenvakuum erfordert. Die Linien bleiben vielmehr vollkommen scharf. Die Serienlinien des Sauerstoffs haben daher mit Sicherheit unter denjenigen Umständen keinerlei Dopplereffekt, unter denen bei Quecksilber nach den Herren J. Stark, W. Hermann und S. Kinoshita[1]) der Effekt deutlich vorhanden ist.

Dagegen war bereits bei sehr niederer Spannung (unter 2000 Volt) deutlich ein Dopplereffekt zu bemerken bei einer Reihe von Linien, welche ebenfalls in den Kanalstrahlen des Sauerstoffs auftreten, bei niederen Potentialen lichtschwächer, bei hohen aber lichtstark, und welche allgemein dem „elementary line spectrum" zugezählt werden. Dieses Spektrum wird gewöhnlich in einer Geisslerröhre mit Flasche und Funkenstrecke erhalten: unter Bedingungen also, unter denen das Serienspektrum verschwindet. Die folgende Tab. I enthält in ihrer ersten und zweiten Kolumne die auf Rowlands standard wave-length's bezogenen bis auf 0,5 Å.-E. zuverlässigen[2]) Wellenlängen der Linien, welche in den Kanalstrahlen den Dopplereffekt zeigten, mit den auf Eastmanfilms gefundenen Intensitäten. Die anderen Kolumnen führen frühere Messungen, welche Watts Index of spektra A. p. 116 u. 117 entnommen sind, zum Beweise, daß es sich um das „elementary linespectrum" handelt.

---

1) J. Stark, W. Hermann u. S. Kinoshita, Ann. d. Phys. 21. p. 462. 1906.

2) Eine genauere Ermittelung der Wellenlängen habe ich als überflüssig für den vorliegenden Zweck unterlassen. Relativ zueinander sind die Wellenlängen genauer.

Tabelle I.

Linien mit Dopplereffekt		Oxygen, Elementary line spectrum				
Int.	λ in Å.-E.	Schuster	Huggins	Hartley und Adeney	Thalén	Int.
2	3973,7					
2	4070,7		4069	4069,2	4069,5	6
2	4072,5			4071,4	4071,5	6
2	4076,2			4075,1	4075,5	6
1	4119,8		4117	4119,0		5
1	4186,5		4188	4185,1	4184,5	1
2	4190,9		4190	4189,3	4189,5	5
1	4318,0	4316,5	4318	4316,2	4316,5	3
1	4320,5	4319,2		4318,7	4319,0	3
1	4345,8	4345,0		4343,9		1
2	4347,8	4346,9			4346,0	5
4	4349,7	4349,0	4347	4348,2	4347,5	6
3	4351,6	4353,5		4350,5	4350,5	4
5	4415,3	4414,5	4414	4413,6	4414,1	8
4	4417,4	4416,8	4416	4415,5	4418,1	7
5	4591,6	4589,9	4588	4589,3	4590,6	5
4	4596,8	4595,1	4596	4595,0	4596,1	5
2	4639,5	4637,4			4640,1	6
7	4642,4	4640,4	4640	4641,2	4642,1	7
9	4649,6	4648,0	4648	4647,2	4649,1	9
3	4651,3	4649,3				3
8	4662,1	4660,7	4662	4660,2	4661,6	8

Die Dopplereffekte der meisten dieser Linien waren wie die Linien selbst nur lichtschwach, zeigten aber, soweit es sich beurteilen ließ, alle genau denselben Anblick und dieselbe Verschiebung. Die lichtstärksten Linien 4415,3, 4591,6, 4642,4, 4649,6, welche genauere Messungen zuließen, ergaben für Anfang, Maximum und Ende des Dopplerstreifes gleiche Werte $\Delta\lambda/\lambda$, wobei allerdings wegen des unschärferen und weniger verschobenen Streifens die Unsicherheit größer als beim Wasserstoff war. Messungen an diesen vier Linien bei verschiedenen Entladungspotentialen führten zu folgenden aus Potential und Geschwindigkeit berechneten Werten e/m.

Tabelle II.

Werte e/m.

V	Des Dopplerstreifes		
	Beginn	Maximum	Ende
2600	100	240	490
6000	—	200	470
17000	60	130	260
25000	50	100	180

Die Zahlenwerte sind weniger sicher, hängen aber ähnlich vom Potential ab, wie bei Wasserstoff, so daß hier also ähnliche Verhältnisse vorliegen müssen. Die Existenz zweier verschiedener Streifen wie bei Wasserstoff habe ich nicht mit Sicherheit nachweisen können. Bei 2600 Volt scheinen sie angedeutet, so daß $e/m = 490$ der größten Verschiebung des meist abgelenkten Streifes entsprechen würde. Ein Sauerstoffatom geladen mit einem positiven Elementarquantum (oder beraubt eines Elektrons) würde ohne Störung $e/m = 600$ ergeben. Beobachtet sind als höchste Werte einmal 546 und einmal 536, so daß die Existenz dieses einwertigen positiven Sauerstoffions in den Kanalstrahlen erwiesen scheint.

Hr. J. Stark und seine Schüler haben gefunden, daß beim Wasserstoff und einigen Metallen die Serienlinien in den Kanalstrahlen den Dopplereffekt zeigen. Ihr Schluß, daß dies allgemein gültig sei, ist im Falle des Sauerstoffs nicht richtig. Die Emission des Serienspektrums und der Dopplereffekt sind also zwei Erscheinungen, welche nicht miteinander verknüpft zu sein brauchen. Die Träger des Sauerstoff-Serienspektrums haben demnach jedenfalls keine positive Ladung. Wenn nun bei Wasserstoff und den Metallen das elektrochemische Ion erstens wegen seiner positiven Ladung als Kanalstrahlträger auftritt und zweitens das Serienspektrum emittiert, so könnte bei Sauerstoff das Zweite noch zutreffen. Man würde dann das zweiwertige, also mit zwei negativen Elementarquanten behaftete elektrochemische Sauerstoffion als Quelle des Serienspektrums ansehen können. Dieses Ion kann wegen seiner negativen Ladung nicht Kanalstrahlträger sein. Eine zweite mit den Tatsachen verträgliche Möglichkeit ist die, daß das

neutrale Sauerstoff- oder Ozonmolekül die Serien emittiert. Die Tatsache, daß das Serienspektrum sowohl in der ersten Kathodenschicht wie in den Kanalstrahlen bei höheren Gasdrucken intensiv auftritt, bei niederen Gasdrucken aber an Intensität gegen das elementary-line spectrum zurücktritt, scheint dafür zu sprechen, daß die Kanalstrahlträger auf irgend eine Weise in dem Gasinhalte das Leuchten der Serien veranlassen. Da uns die betreffenden Vorgänge unbekannt sind, kann diese Tatsache vorläufig für keine der beiden Möglichkeiten entscheiden. Die Analogie mit den Metallen würde dazu führen, das negative Sauerstoffion als Quelle der Serien anzusehen. Wir würden dann allgemeine Serien von den elektrochemischen Ionen erhalten. Dies würde gestützt durch die Gesetzmäßigkeiten, welche zwischen den Serien und Atomeigenschaften allgemein und so auch für Sauerstoff, Schwefel und Selen gefunden sind. Dieses Ion kann nur dann Kanalstrahlen bilden und den Dopplereffekt zeigen, wenn es eine positive Ladung hat, wie bei den Metallen. Durch den Dopplereffekt der Flaschenfunken-Linien des Sauerstoffs ergibt sich beim Sauerstoff außerdem die Existenz eines wahrscheinlich einwertigen positiven Ions, welches aber nicht das Serienspektrum emittiert.

Nach den Beobachtungen des Hrn. W. Hermann [1]) zeigen gewisse Linien des Stickstoffs den Dopplereffekt. Hr. Hermann betont daher bereits mit Recht, daß ein positives (auch einwertiges) Stickstoffion existiere. Die von ihm angegebenen Linien gehören alle dem Flaschenfunken-Spektrum oder „elementary-line spectrum“ des Stickstoffs an, genau wie bei Sauerstoff. Es wäre nach dem vorigen nicht richtig, diese Linien einem unbekannten Serienspektrum des Stickstoffs zuschreiben zu wollen. Es ist vielmehr wahrscheinlicher, daß sich Stickstoff verhält wie Sauerstoff, so daß von seinem elektrochemischen negativen Ion oder seinem Molekül das nicht bekannte Serienspektrum zu erwarten wäre.

Wahrscheinlich erklärt sich so der vergebliche Versuch des Hrn. H. Rau [2]) und des Hrn. G. F. Hull [3]), beim Helium

1) W. Hermann, Physik. Zeitschr. 7. p. 566. 1906.
2) H. Rau, Physik. Zeitschr. 7. p. 423. 1906.
3) G. F. Hull, Nat. 74. p. 603. 1906; Astrophys. Journ. 25. p. 1. 1907.

den Dopplereffekt nachzuweisen. Sämtliche bekannte Linien dieses Gases gehören einem Serienspektrum [1]) an. Haben die Serienlinien des Heliums den Dopplereffekt nicht, so verhält sich dies Gas wie Sauerstoff. Das Serien emittierende Teilchen dieses Gases müßte dann ein Ion mit negativer Ladung oder ein Molekül sein, während das Spektrum eines positiven Ions dieses Gases nicht bekannt ist.

Man könnte meinen, daß negativ geladene Sauerstoffionen in Richtung der Kathodenstrahlen bewegt werden müßten. Ein Versuch, dies nachzuweisen, bestand darin, daß die Kathodenstrahlseite des Entladungsrohres dem Spalte zugekehrt wurde. Allein auch dann zeigten die Linien des Serienspektrums keinen Dopplereffekt. Dies ist von vornherein unwahrscheinlich, wenn man annimmt, daß die Moleküle erst im Beginne der Glimmschicht durch die kinetische Energie der Kathodenstrahlen in Ionen zerspalten werden. Denn die negativen Ionen können vom Beginne der Glimmschicht an durch kein erhebliches elektrisches Feld mehr beschleunigt werden. Geschähe auch im Dunkelraum ein erheblicher Zerfall in Ionen, so hätte mein Versuch den Dopplereffekt der Serienlinien ergeben müssen, falls diese dem negativen Ion angehören.

1) C. Runge u. F. Paschen, Astrophys. Journ. 1896.

(Eingegangen 27. März 1907.)

5. *Über kurze akustische Wellen bei Funkenentladungen von Kondensatoren;* *von W. Altberg.*

Bei der Erzeugung akustischer Wellen gelang es R. Koenig[1]) bei Schwingungen von kleinen Stimmgabeln bis zu einer Wellenlänge von $\lambda = 3{,}8$ mm vorzurücken, und Edelmann[2]) hat mit seiner Galtonpfeife Wellen von $\lambda = 2{,}0$ mm erzeugt. Die erhaltenen kurzen Wellen scheinen nicht weit von der Grenze zu liegen, welche man mit diesen beiden Methoden praktisch erreichen kann; für noch kürzere Wellen schien es geboten zu sein, sich einer anderen Methode zu bedienen, nämlich derjenigen der Funkenentladungen: es hat bereits früher Rosický[3]) auf berußten Flächen mit Hilfe von Flaschenfunken Interferenzfiguren erhalten, welche auf periodische Luftschwingungen im Gleitfunken schließen lassen. Lodge[4]) hat bei Funkenentladungen großer Leidener Batterien durch große Selbstinduktionskreise so langsame elektrische Schwingungen erhalten, daß die periodischen Erwärmungen der Funkenstrecke als Schallschwingungen von bestimmter Tonhöhe wahrgenommen werden konnten.

Die Periode τ (in Sek.) der elektrischen Schwingung wird durch die Selbstinduktion L und die Kapazität C des Schwingungskreises bestimmt

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Einer jeden ganzen elektrischen Schwingung entspricht eine zweimalige Aufhellung der Funkenstrecke; da jede Aufhellung des Funkens einer Dilatation und einer darauffolgenden Kompression der umgebenden Luft, d. h. einer vollen akustischen Schwingung entspricht, so wird die Wellenlänge λ (in mm) der

1) R. Koenig, Wied. Ann. **69.** p. 626 u. 721. 1899.
2) A. Edelmann, Ann. d. Phys. **2.** p. 469. 1900.
3) W. Rosický, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **73.** II. p. 629. 1876.
4) O. Lodge, Nature **39.** p. 471. 1888—1889.

akustischen Schwingung, wenn v die Schallgeschwindigkeit in der Luft (in mm pro Sek.) gegeben ist,

$$\lambda = \pi v . \sqrt{LC}.$$

Auf Veranlassung von Prof. Dr. P. Lebedew habe ich diese elektrische Methode auf die Erregung möglichst kurzer akustischer Wellen angewendet und die Wellenlängen mit Hilfe von Diffraktionsgittern gemessen.[1])

I. Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich: der Kondensator C wird vom Induktorium J durch den Luftfunken H geladen und entladet sich durch den Selbstinduktionskreis L und die Funkenstrecke F.

Der elektrische Funke F, der die Quelle der Schallschwingungen bildet, befindet sich im Brennpunkte des Hohlspiegels S_1: in seinem weiteren Verlaufe fällt das akustische Parallelstrahlenbündel auf ein Fraunhofersches Diffraktionsgitter G, der abgelenkte Strahl wird von dem Hohlspiegel S_2 aufgefangen und auf die Meßvorrichtung D konzentriert.

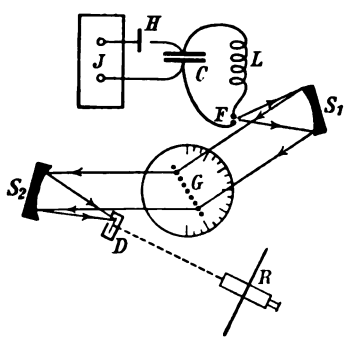


Fig. 1.

Die Verteilung der Schallintensität im Diffraktionsspektrum wird durch die Druckkräfte der Schallwellen[2]) gemessen, da die Intensität der Funkenwellen, wie es Wood[3]) bereits gefunden hat, groß genug ist, um meßbare Druckkräfte zu erzeugen; die Ablenkungen des Druckapparates wurden mit dem Fernrohre R beobachtet.

Der Spiegel S_2 mit dem Druckapparat D waren fest aufgestellt; der Spiegel S_1 mit der Funkenstrecke F und dem

1) Vor mir hat über dasselbe Thema im hiesigen Institut gleichfalls auf Veranlassung von Prof. Dr. P. Lebedew Hr. N. Slatowratzky gearbeitet.

2) Vgl. W. Altberg, Ann. d. Phys. **11**. p. 405. 1903.

3) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. **6**. p. 22. 1905.

Diffraktionsgitter G waren auf dem beweglichen Arm des Spektrometers montiert.

Die Justierung des Spektrometers kann in einfacher Weise durch *optische* Einstellung der an den Vorderseiten versilberten Hohlspiegel S_1 und S_2 auf das *Licht* des Funkens F bewerkstelligt werden.

Die Beobachtungen wurden in folgender Weise ausgeführt: der Spiegel S_1 mit dem Funken F wurde in verschiedene Lagen gebracht, der Strom des Induktoriums J während der Dauer einer Schwingung des Druckapparates D geschlossen und der entsprechende Ausschlag des Druckapparates gemessen — man erhält in dieser Weise die Verteilung der Schallintensität im Diffraktionsspektrum und kann die Lage der auftretenden Maxima scharf bestimmen; da die Schallerregung des Funkens sich etwas unregelmäßig ändert, ist es vorteilhaft, die Beobachtungen in verschiedenen Reihenfolgen auszuführen.

II. Die Apparate.

1. *Der Druckapparat* ist in Fig. 2 dargestellt: auf einem dünnen Quarzfaden hängt ein leichter Wagebalken, an welchem ein vertikaler Glimmerstreifen G (4×12 mm), ein Gegengewicht C und ein Ablesespiegel S befestigt sind. Um den Druckapparat vor Luftströmungen zu schützen, ist derselbe in einem flachen Kästchen aufgehängt; die Schallwellen fallen auf den Glimmerflügel G durch eine rechteckige Öffnung (6×14 mm) in der hinteren Metallwand, während der Spiegel S durch die vordere Glaswand beobachtet wird.[1])

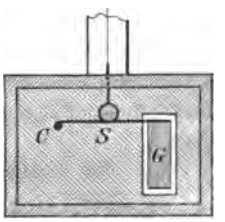


Fig. 2.

2. *Die Kondensatoren* waren nach Drude[2]) Petroleumkondensatoren. Der eine hatte eine konstante Kapazität $C = 0{,}00128$ Mikrof., der andere hatte eine variable Kapazität

1) Die Anwendung eines Schutzringes, wie ich einen solchen bei meinen früheren Untersuchungen (l. c. p. 406) angewendet habe, erwies sich in diesem Falle überflüssig, da die Dimensionen des Glimmerflügels hinreichend groß waren im Vergleich mit den zu messenden Wellenlängen.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 15. p. 709. 1904.

und war in der Form gebaut, wie sie bei funkentelegraphischen Messungen verwendet wird[1]); für die Einstellungsmarken, bei welchen er bei den Beobachtungen verwendet wurde, war seine Kapazität

$C_{20} = 0{,}00167$ Mikrof.
$C_{12} = 0{,}00108$ „
$C_{10} = 0{,}00093$ „
$C_6 = 0{,}00063$ „
$C_3 = 0{,}00041$ „

Die Kapazitäten wurden durch Vergleich mit einem Normalkondensator von 0,01 Mikrof. ermittelt.[2])

3. *Die Selbstinduktionsspulen* wurden in folgender Weise hergestellt (Fig. 3): 8 Glasröhren $G_1, G_2 \ldots G_8$ von je ca. 75 cm Länge bildeten ein achteckiges Prisma, welches in einen Kreis von 62 cm Durchmesser eingeschrieben war; die Glasröhren wurden an je vier Holzstäben, die von einem Holzgestell H getragen wurden, befestigt. Auf dieses Glasgerippe waren 300 Windungen umsponnenen Kupferdrahtes ($d = 0{,}6$ mm) aufgewickelt. Ein zweites Gestell von gleichen Dimensionen trug 34 Drahtwindungen. Die Selbstinduktionskoeffizienten L und die Widerstände r der Spulen waren

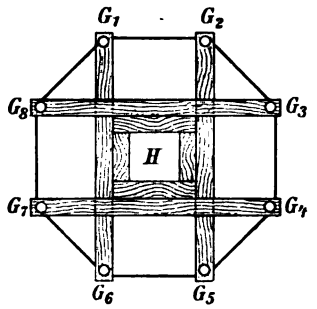


Fig. 3.

300 Windungen	$L_1 = 30{,}4 \cdot 10^6$ cm	($r_1 = 19{,}6\ \Omega$),
200 „	$L_2 = 17{,}5 \cdot 10^6$ „	($r_2 = 13{,}0\ \Omega$),
100 „	$L_3 = 6{,}8 \cdot 10^6$ „	($r_3 = 6{,}5\ \Omega$),
34 „	$L_4 = 0{,}78 \cdot 10^6$ „	($r_4 = 2{,}2\ \Omega$).

Diese Werte der Selbstinduktionskoeffizienten wurden durch Vergleich mit einem Normalkondensator von 0,01 Mikrof. ermittelt.[3])

4. *Die Elektroden* der Funkenstrecke wurden aus Messing verfertigt; gleichgut erwiesen sich Zinkelektroden; weniger brauchbar waren die Elektroden aus Fe, Al, Sn, Pt.

1) Vgl. J. Zenneck, Drahtlose Telegraphie p. 606. Stuttgart 1905.
2) Vgl. F. Kohlrausch, Prakt. Physik p. 571. § 11. Leipzig 1905.
3) Vgl. F. Kohlrausch, l. c. p. 507. § 5.

Die Länge der Funkenstrecke betrug 0,5 bis 1,0 mm; die Oberfläche der Elektroden mußte immer frisch geputzt werden, da bei oxydierten Oberflächen die Intensität der Schallerregung wesentlich abnimmt.

5. *Die Hohlspiegel* waren auf der Vorderfläche versilbert und hatten je einen Durchmesser von 8 cm und eine Brennweite von 15 cm.

6. *Die Diffraktionsgitter* wurden aus Glas bez. Stahlstäben so hergestellt (Fig. 4), daß der Abstand zweier Stäbe ihrer Dicke gleich gemacht wurde; hierzu wurden die Enden der Stäbe durch kurze Stabstücke getrennt auf zwei Glasstreifen G_1 G_1, G_2 G_2 aufgekittet; die Fläche der Gitter war ca. 9×9 cm. Es wurden fünf Gitter hergestellt mit folgenden Gitterperioden:

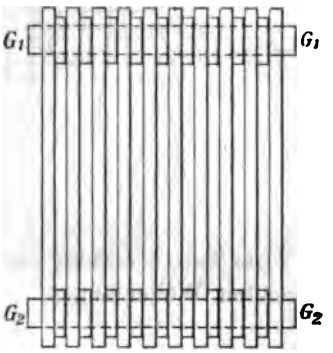


Fig. 4.

$G_1 = 11{,}8$ mm
$G_2 = 7{,}9$ „
$G_3 = 6{,}2$ „
$G_4 = 4{,}1$ „
$G_5 = 2{,}0$ „

7. *Das Induktorium* hatte eine Funkenlänge von 20 cm und wurde mit einem Wehneltunterbrecher betrieben.

III. Die Versuche.

A. Messungen der Wellenlängen.

Wird über den Spalt des Druckapparates das Diffraktionsspektrum der Funkenwelle verschoben, so lassen sich die Lagen der auftretenden Maxima scharf bestimmen und ihre Abhängigkeit von der Periode des Diffraktionsgitters feststellen. Aus dem umfangreichen Beobachtungsmaterial, welches durchgehend übereinstimmende Resultate lieferte, sind hier nur die typischen Fälle angeführt.

In Fig. 5 ist die Energieverteilung im Spektrum gegeben, welche unter denselben elektrischen Verhältnissen

$$(C_6 = 0{,}00063 \text{ Mikrof.} \quad \text{und} \quad L_3 = 6{,}8 \cdot 10^6 \text{ cm})$$

mit verschiedenen Gittern G_1, G_2, G_3 und G_4 beobachtet wurde;

als Abszissen sind die Stellungen des beweglichen Spektrometerarmes gegeben, als Ordinaten die gemessenen Ablenkungen des Druckapparates in Skalenteilen. Die Intensität im zentralen Streifen ist so groß, daß sie nicht gemessen werden konnte.

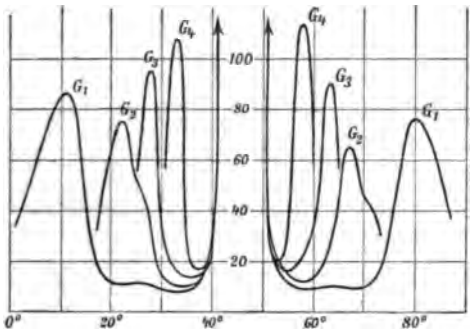


Fig. 5.

Die Tab. I enthält die Beobachtungsresultate und die berechneten Wellenlängen.

Tabelle I.

Gitterkonstanten	Lage des Maximums	λ
G_1 = 11,8 mm	11,7°	2,39 mm
G_2 = 7,9 „	17,7	2,40 „
G_3 = 6,2 „	23,3	2,45 „
G_4 = 4,1 „	35,2	2,36 „

Innerhalb der Beobachtungsfehler ergaben die Messungen mit verschiedenen Gittern dieselbe Wellenlänge der Schallschwingung.

B. Wirkung der Selbstinduktion.

Um die Wirkung der Größe der Selbstinduktion auf die Länge der Funkenwellen zu untersuchen, wurden bei demselben Gitter G_2 und der konstanten Kapazität C_6 = 0,00063 Mikrof. verschiedene Selbstinduktionsrollen L_1, L_2, L_3 und L_4 eingeschaltet und die entsprechenden Diffraktionsspektra gemessen.

Fig. 6 gibt die beobachteten Energieverteilungen wieder; in der Tab. II sind die Lagen der Maxima und die beobachteten $\lambda_{beob.}$ angeführt; außerdem sind noch die $\lambda_{ber.}$ gegeben, welche nach der Formel berechnet wurden

$$\lambda_{ber.} = \pi v_t \sqrt{C.L},$$

wobei hinreichend genau $v_t = 340{,}000$ mm . sec^{-1} gesetzt wurde.

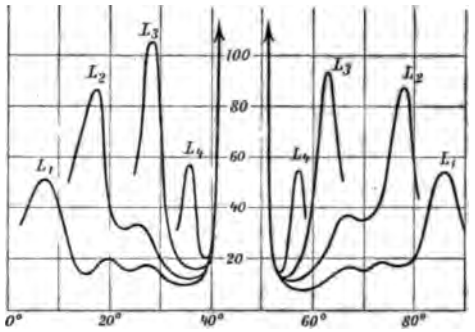


Fig. 6.

Tabelle II.

Selbstinduktionen	Lage des Maximums	$\lambda_{beob.}$	$\lambda_{ber.}$
$L_1 = 30{,}4 \cdot 10^6$ cm	39,4°	5,0 mm	4,7 mm
$L_2 = 17{,}5 \cdot 10^6$ „	29,6	3,9 „	3,6 „
$L_3 = 6{,}8 \cdot 10^6$ „	17,5	2,4 „	2,2 „
$L_4 = 0{,}78 \cdot 10^6$ „	10,8	1,5 „	0,8 „

Die Übereinstimmung der beobachteten und der berechneten Werte der Wellenlängen (die letzte Zahl ausgeschlossen) ist als eine genügende zu bezeichnen, wenn wir berücksichtigen, daß die Voraussetzung $v_t = \text{const}$ in der unmittelbaren Nähe des Funkens, wo die Schallgeschwindigkeit durch die Schwingungsamplitude stark beeinflußt werden kann, für gedämpfte Schwingungen nicht erfüllt wird.

C. Einfluß der Kapazität.

Um die Wirkung der Größe der Kapazität auf die Länge der Funkenwellen zu untersuchen, wurden mit demselben

Gitter G_2 bei konstanter Selbstinduktion $L_3 = 6{,}8 \cdot 10^6$ cm verschiedene Kapazitäten eingeschaltet und die Energieverteilung im Diffraktionsspektrum beobachtet.

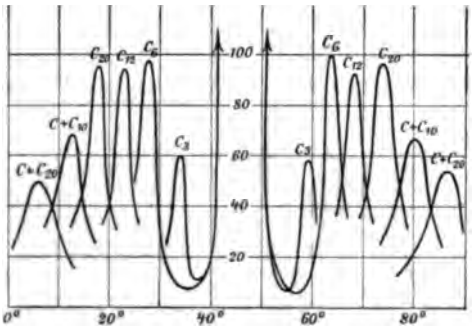


Fig. 7.

In Fig. 7 sind die Beobachtungen graphisch dargestellt. In der Tab. III sind die Lagen der Maxima, die beobachteten $\lambda_{beob.}$ und die nach der obigen Formel berechneten $\lambda_{ber.}$ angeführt.

Tabelle III.

Kapazität	Lage des Maximums	$\lambda_{beob.}$	$\lambda_{ber.}$
$C + C_{30} = 0{,}00295$ Mikrof.	39,4°	5,0 mm	4,7 mm
$C + C_{10} = 0{,}00221$ „	34,0	4,4 „	4,1 „
$C_{30} = 0{,}00167$ „	28,8	3,8 „	3,6 „
$C_{12} = 0{,}00108$ „	23,2	3,1 „	2,9 „
$C_6 = 0{,}00063$ „	17,8	2,4 „	2,2 „
$C_3 = 0{,}00041$ „	13,5	1,8 „	1,8 „

Die Übereinstimmung der beobachteten und der berechneten Werte der Wellenlängen ist auch in diesem Falle eine genügende.

D. Die Abhängigkeit der Schallenergie von der Wellenlänge und die kürzesten Wellen.

Wird bei demselben Gitter G_2, bei derselben Funkenlänge und bei der konstanten Selbstinduktion $L_3 = 6{,}8 \cdot 10^6$ cm die

Kapazität des Kondensators verändert und der Ausschlag des Druckapparates im ersten Maximum des Diffraktionsspektrums gemessen, so wächst dieser Ausschlag von den kürzesten Wellen an, erreicht ein Maximum für $\lambda_I = 2{,}8$ mm, um hierauf etwas zu fallen, und dann sich zu einem zweiten Maximum bei $\lambda_{II} = 3{,}6$ mm zu erhöhen, auf welches ein stetiges Abfallen folgt. Die Fig. 8 stellt das Verhalten der Intensitäten graphisch dar.

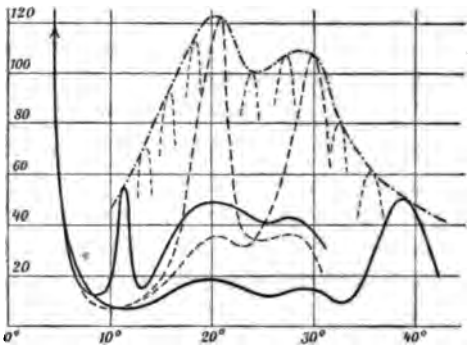


Fig. 8.

Das Abfallen der Intensität zu größeren Wellenlängen läßt sich leicht dadurch erklären, daß die Dimensionen des Druckapparates und des Spaltes zu klein sind für die größeren Wellen. Die maximalen Empfindlichkeiten für $\lambda_I = 2{,}8$ mm und für $\lambda_{II} = 3{,}6$ mm, sowie die sekundären Spektra, welche bei diesen Wellenlängen auch die anderen Spektra begleiten (vgl. Fig. 8), sind wohl in den spezifischen Eigenschaften des Funkens zu suchen.

Die Abnahme der Intensität zu kleineren Wellen ist in der Abnahme der akustischen Wirksamkeit des Funkens zu suchen. Versuche, zu möglichst kurzen Wellen überzugehen, welche mit dem Gitter G_5 und einem sehr empfindlichen Druckapparat ausgeführt wurden, ergaben eine sehr rasche Abnahme der Ausschläge mit abnehmender Wellenlänge; die Erhebungen der Maxima (in Skalenteilen), welche unter möglichst günstigen Verhältnissen für verschiedene Wellenlängen erhalten wurden, sind in Tab. IV zusammengestellt.

Tabelle IV.

λ	Erhöhung des Maximums
1,43 mm	95 Skt.
1,27 „	45 „
1,1 „	14 „
1,0 „	3 „

Die kürzeste Wellenlänge, welche noch sicher gemessen werden konnte, betrug $\lambda = 1{,}0$ mm.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit können in folgender Weise zusammengefaßt werden.

1. Bei Kondensatorentladungen, bei welchen elektrische Schwingungen auftreten, sendet der Kondensatorfunke scharf ausgeprägte akustische Schwingungen aus; diese Schwingungen können bis zur Wellenlänge $\lambda = 2$ mm herab aus der Kapazität und der Selbstinduktion des schwingenden Kreises berechnet werden.

2. Durch Kondensatorfunken können akustische Schwingungen von der Wellenlänge $\lambda = 1$ mm erzeugt werden, welche um eine Oktave höher liegen als die bisher bekannten kürzesten akustischen Schwingungen.

Zum Schlusse erlaube ich mir Hrn. Prof. Dr. P. Lebedew für die Anregung und die Leitung dieser Untersuchung, Hrn. Prof. Dr. N. Kasterin für wertvolle Ratschläge und Hrn. Prof. Dr. A. Sokolow für das geliehene Spektrometer meinen Dank auszusprechen.

Moskau, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 28. März 1907.)

6. *Über das Absorptionsspektrum des Chlorophylls;* *von D. van Gulik.*

Über die Absorption der Lichtstrahlen in farbigen flüssigen und festen Körpern hat neuerdings R. A. Houstoun in diesen Annalen berichtet.[1]) Die Absorption der verschiedenen Wellenlängen des sichtbaren Lichtes wurde hier für eine ganze Zahl farbiger Gläser und Lösungen mit einem König-Martensschen Spektralphotometer gemessen. Es zeigen sich die Absorptionsstreifen zumal in den graphischen Kurven (vgl. l. c. Taf. VIII) sehr deutlich; und auch bei dem Chlorophyll tritt der bekannte dunkle Streifen im Rot kräftig hervor.

Dieses Resultat ist aber in Widerspruch mit einer Arbeit von B. Donath[2]), der das sichtbare und unsichtbare Absorptionsspektrum des Chlorophylls mit dem Bolometer durchforscht hat. Denn, obgleich der dunkle Streifen im Rot bei seinen Versuchen sehr intensiv sichtbar war, trat derselbe bolometrisch nicht aus seiner Umgebung hervor; vielmehr zeigte sich von diesem Streifen an, den grünen Strahlen zu, ein Gebiet dauernd starker Absorption (vgl. l. c. Taf. VI.).

Daß die Strahlungsintensität vom einen Forscher optisch, vom anderen aber thermisch gemessen wurde, vermag diesen Widerspruch nicht aufzuheben. Zwar ist die optische Lichtstärke, wie sie von einem Auge empfunden wird, nicht ohne weiteres durch die Intensität der Strahlung bestimmt, aber bei ihren *relativen* Messungen sollten doch beide das Absorptionsmaximum an derselben Stelle des Spektrums gefunden haben.

Weiter ist zu bemerken, daß in den Absorptionskurven der beiden als Ordinate nicht dieselbe Größe gewählt ist. Bei Houstoun ist sie der Absorptionsindex $n\varkappa$, bei Donath aber die Absorption in Prozenten. Wenn nun λ die Wellenlänge, J' bez. J die Intensität des Lichtes ist nach seinem Durchgang

1) R. A. Houstoun, Ann. d. Phys. 21. p. 535. 1906.
2) B. Donath, Wied. Ann. 58. p. 609. 1896.

durch die Lösung, bez. durch das Lösungsmittel allein, so ist die erste Größe nx mit

$$-\lambda \log \frac{J'}{J}$$

proportional; die zweite Größe aber mit

$$1 - \frac{J'}{J}.$$

Wäre λ konstant, so würden die Maxima beider Kurven sich vollkommen entsprechen; nunmehr muß dieser Faktor die Stelle des Maximums der nx-Kurve verschieben, und zwar nach der Seite der großen Wellen hin. Es leuchtet aber ein, daß die geringe Änderung von λ ein so ausgeprägtes und scharfes Maximum nur sehr wenig beeinflußt haben kann, so daß die Verschiebung wohl unbedeutend sein muß.

Die Sachlage ist also diese. Das Absorptionsspektrum des Chlorophylls zeigt dem Auge im Rot ein absolutes optisches Minimum der Lichtintensität; Houstoun fand an dieser Stelle ein relatives optisches Maximum der Absorption; Donath hat hier aber weder ein relatives thermisches Maximum der Absorption, noch ein absolutes thermisches Minimum der Strahlungsintensität feststellen können. Da diese Ergebnisse zum Teil miteinander in Widerspruch sind, es aber dennoch möglich wäre, daß ein absolutes thermisches Strahlungsminimum im Streifen nicht vorhanden ist, so schien es mir nicht unwichtig, den bezüglichen Teil des thermischen Absorptionsspektrums nochmals genau zu untersuchen.

Meine Versuchsanordnung war die folgende. Die Strahlungsquelle war der Leuchtkörper, welcher aus einer alten Nernstlampe herausgenommen und zwischen zwei Messingklemmen befestigt war. Die Lampe, von normal 110 Volt, wurde stärker beansprucht, bis der Eisendrahtregulator fast über seine ganze Länge hell glühte; die Stromstärke war alsdann 0,8 Amp., und sehr konstant. Eine Linse von 20 cm Brennweite warf ein Bild des Leuchtkörpers auf einen Spalt (*Sp* in Fig. 1) von meistenfalls 0,8 und 0,9 mm Breite. Das Bild war auf $^3/_5$ verkleinert, und also nur 1 cm lang, um einer Störung wegen der prismatischen Krümmung der Spektrallinien vorzubeugen. Das Licht durchdringt, bevor es den Spalt erreicht hat, eine der drei Glasküvetten (*Cuv*) von je 1 cm Weite

(Innenmaße), die bez. reinen Alkohol, schwächere und stärkere alkoholische Chlorophyllösung enthalten, und auf einem Schlitten befestigt sind. Weiter ist *Sch* ein Doppelschirm aus Pappe, L_1 und L_2 sind die beiden Achromate eines großen Petzvalschen Porträtobjektives von 6 cm Durchmesser und bez. 38,1 und 35,9 cm Brennweite; *Pr* ist ein Schwefelkohlenstoffprisma von $7^1/_2 \times 8$ cm² Seitenflächen.

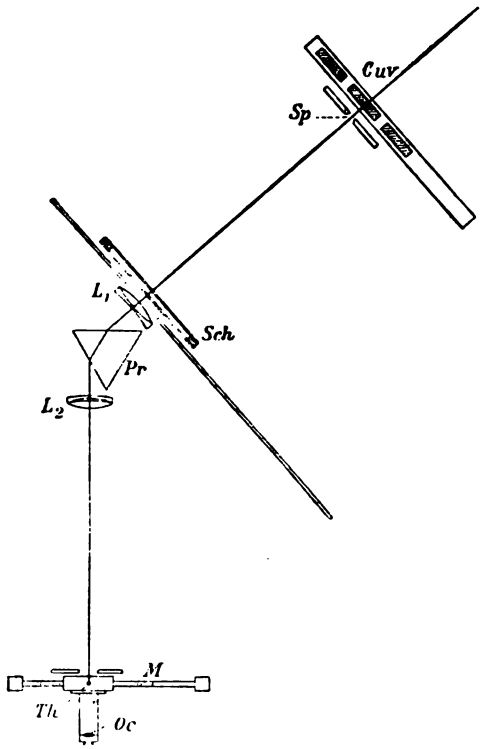


Fig. 1.

Die lineare Thermosäule nach Rubens (*Th*) gleitet über eine in Millimeter geteilte Metallschiene (*M*). Sie ist an der Vorderseite durch eine dünne polierte Kupferscheibe geschlossen, welche mit einer spaltförmigen Öffnung (weit 3 mm) versehen ist, wodurch die von L_2 konvergierten Strahlen eintreten und sich auf die Thermoelemente (*Th*) vereinigen können. Für die Eichung der Skale ist noch ein Okular *Oc* angebracht, das auf

die Elemente eingestellt ist; diese erscheinen also im Gesichtsfelde wie ein senkrechter Kreuzfaden.

Das Prisma ist fest aufgestellt, und zwar so, daß die Strahlen des Absorptionsstreifens ihr Minimum der Ablenkung erfahren und dabei senkrecht zur Schiene *M* laufen. Für die benachbarten Strahlen ist die Ablenkung also nicht vollkommen minimal; weil ich aber die Untersuchung von nur einem sehr kleinen Teil des Spektrums an beiden Seiten des Absorptionsstreifens beabsichtigte, war diese Vereinfachung erlaubt. Ich habe mich übrigens noch davon überzeugt, daß die Versuchsresultate sich nicht wesentlich änderten, wenn das Prisma ein wenig aus diesem Stand gedreht war.

Als Galvanometer benutzte ich einen großen Wiedemannschen Spiegelgalvanometer, welchen Prof. Haga so freundlich war mir zur Verfügung zu stellen. Die besten Resultate habe ich bei mäßiger Empfindlichkeit erhalten, wobei sich der Spiegel (aperiodisch) nach 30 bis 40 Sek. einstellte.

Vor dem Anfang der Beobachtungen war immer das Laboratoriumszimmer während mehrerer Stunden auf ziemlich konstanter Temperatur gehalten, dann wurden die Instrumente in einen Pappkasten eingebaut, die Thermosäule außerdem noch mit Watte bekleidet. Nunmehr folgte die Eichung der Schienenteilung in Wellenlängen des Lichtes mittels der *D*-Linie und der roten Spektrallinien von Wasserstoff, Lithium und Kalium. Wegen des großen Einflusses der Temperatur auf das Brechungsverhältnis des Schwefelkohlenstoffs wurde diese Eichung nach jeder beendeten Versuchsreihe unmittelbar wiederholt.

Bei den eigentlichen Versuchen wurde die Thermosäule je eine gewisse Zeit bestrahlt und der Ausschlag des Galvanometers bestimmt, nachher wurde der Doppelschirm (*Sch*) wieder geschlossen und der Nullpunkt abermals beobachtet; indessen war eine andere Küvette vorgeschoben usw. Der Nullpunkt wurde also vor wie nach jeder Bestrahlung aufs neue bestimmt. Nachdem alle Küvetten an der Reihe gewesen waren, wurde die Thermosäule einen Millimeter verschoben, in der Nähe des Absorptionsstreifens aber wurde mit halben Millimetern oder noch kleineren Sprüngen weitergerückt.

Was nun die Versuchsergebnisse betrifft, diese sind kurz

gefaßt so auszusprechen, daß ich bei den sehr verschiedenen Konzentrationen der Chlorophyllösung, und bei größeren und kleineren Schichtdicken, immer in der Nähe des Absorptionsstreifens im Rot ein deutliches Minimum der absoluten Strahlungsintensität wahrgenommen habe. Zum Beispiel gebe ich in der untenstehenden Tabelle die Resultate meiner letzten Versuchreihe, welche graphisch in der Fig. 2 dargestellt sind.

Teilstrich	λ in mμ	J	J_1	J_2	$J-J_1$	$J-J_2$	$(J-J_1):J$ in Proz.	$(J-J_2):J$ in Proz.	a_1 in cm^{-1}	a_2 in cm^{-1}	$\frac{a_2}{a_1}$
$12^1/_2$	705	17,2	15,4	14,2	1,8	3,0	$10^1/_2$	$17^1/_2$	0,048	0,083	1,73
$13^1/_2$	688	14.9	9,6	7,3	5,3	7,6	$35^1/_2$	51	,190	,310	1,63
14	680	13,1	6,0	3,5	7,1	9,6	54	73	,337	,569	1,68
$14^1/_2$	673	12,1	4,8	2,3	7,3	9,8	60	81	,398	,721	1,82
15	666	11,0	4,3	2,3	6,7	8,7	61	79	,409	,678	1,66
$15^1/_2$	659	10,0	4,8	2,5	5,2	7,5	52	75	,319	,602	1,88
16	652	9,2	5,3	3,4	3,9	5,8	$42^1/_2$	63	,240	,432	1,76
17	638	7,7	5,1	3,8	2,6	3,9	34	51	,180	,310	1,72
18	625	6,5	4,7	3,5	1,8	3,0	28	46	,143	,268	1,87
19	613	5,9	3,8	2,6	2,1	3,3	$35^1/_2$	56	,190	,356	1,87

Der Index 1 bezieht sich auf die schwächere Lösung und der Index 2 auf die stärkere Lösung in der anderen Küvette. Die Größe a aus der Tabelle ist der Extinktionskoeffizient (Bunsen) oder die Absorptionskonstante (Hagen und Rubens), d. h. der reziproke Wert derjenigen Weglänge, welche den eindringenden Strahl auf $^1/_{10}$ seiner ursprünglichen Intensität zu schwächen vermag. Nur habe ich diese Weglänge nicht in μ, sondern in Zentimetern gemessen. Es ist nämlich

$$J' = J10^{-ad},$$

worin d die Dicke der absorbierenden Schicht ist. Bei meinen Versuchen war aber meistenfalls $d = 1$ cm, und folglich

$$a = -\log\frac{J'}{J}\,\text{cm}^{-1}.$$

Das Verhältnis a_2/a_1 ist, wie aus der Definition von a hervorgeht, das Verhältnis der Konzentrationen beider Lösungen, und also für eine Versuchsreihe konstant.

In der Fig. 2 treten sowohl die absoluten Strahlungsminima beider Lösungen, als ihre relativen Absorptionsmaxima

deutlich hervor; die Stelle des Absorptionsstreifens, dessen Mitte etwa bei 665 mμ in der Nähe der roten Lithiumlinie liegt, ist am unteren Rande der Figur angegeben.

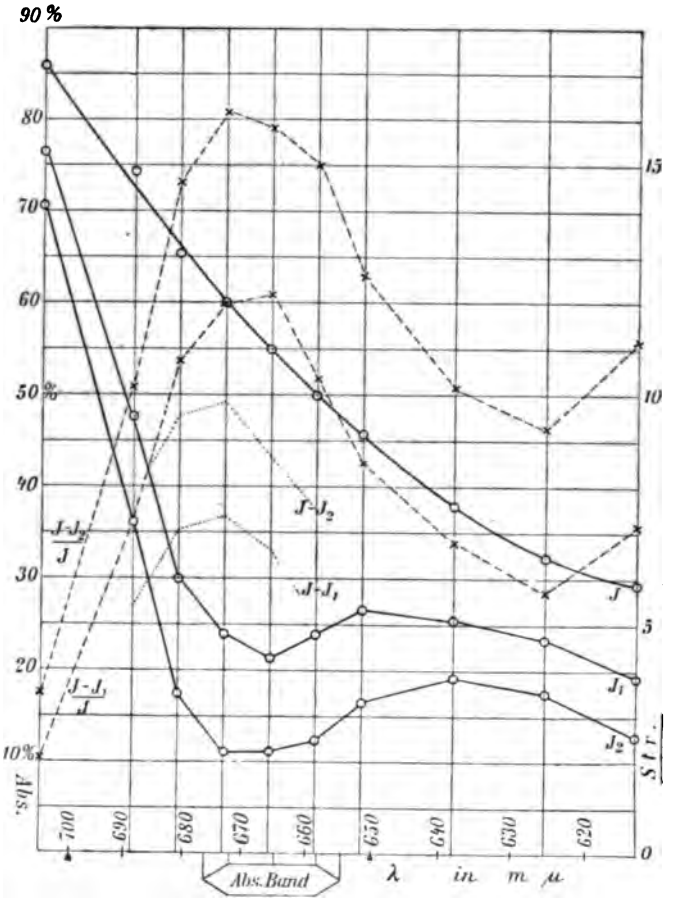


Fig. 2.

Nun ist aber am Ende auch klar, weshalb Donath dieses Strahlungsminimum nicht gefunden hat. Nach jeder Beobachtung ist nämlich das Bolometer so weit verschoben worden, daß sich das Minimum der Ablenkung um 5′ änderte; es sprang also von $\lambda = 638$ über die kritische Stelle herüber, unmittelbar auf $\lambda = 675$ mμ. Was hier im sichtbaren Teil des

Spektrums geschehen, kann aber ebenfalls im Ultrarot passiert sein, so daß leider auch das Resultat: das Chlorophyll absorbiere die ultraroten Strahlen nicht oder sehr wenig, nicht einwandfrei ist.

Bei der Wichtigkeit der Frage auch für die Pflanzenbiologie scheint es erwünscht, die Durchmusterung des Absorptionsspektrums im Ultrarot mit kleineren Sprüngen zu wiederholen, z. B. nach der Registriermethode von Moll[1]), bei dem die Änderung des Ablenkungsminimums nur je 49″ beträgt. Zwar besitzen wir über diesen Gegenstand einige ältere Arbeiten, diese erstrecken sich aber nicht sehr weit in das Ultrarot hinein, während doch das Sonnenspektrum bei $\lambda = 2$, und sogar bei $2{,}5\,\mu$ noch eine nicht unbedeutende Menge Strahlungsenergie enthält. Zumal wäre es interessant, den Versuch auch mit lebenden Blättern zu machen, weil hier die sichtbaren Streifen im Vergleiche zur Chlorophyllösung merklich nach Ultrarot verschoben sind. Nach dem Verfahren von Valentin[2]) und Reinke[3]) wäre dies vielleicht bis zum Anfang der kräftigen Wasserabsorption ($\lambda = 1{,}2\ \mu$) möglich. Mir stehen leider die für diese Untersuchung benötigten Hilfsmittel jetzt noch nicht zur Verfügung.

Für die Pflanzenbiologie hat wohl die absolute Absorption $J - J'$ die größte Bedeutung, weil sie die durch die Absorption verschluckte Energie für jede Wellenlänge angibt. Sie hat in der Tabelle ihren Maximalwert bei $\lambda = 675\ \mathrm{m}\mu$; um die Fig. 2 nicht unklar zu machen, sind hier nur die Scheitel dieser Kurven (punktiert) angegeben. Diese Absorption über das ganze Spektrum integriert, gibt die totale absorbierte Energiemenge; sie wird dargestellt durch den Inhalt der Figur zwischen der Basis und der $(J - J')$-Kurve, wenn die totale einfallende Strahlungsenergie dem Inhalt der Figur zwischen Basis und J-Kurve entspricht.

Hier ist aber zu bemerken, daß die $(J - J')$-Kurve, im Gegensatz zur $J - J'/J$-Kurve, unmittelbar von der Form der J-Kurve abhängig ist, und also ganz anders aussehen würde,

1) W. J. H. Moll, Onderzoek van ultraroode spektra. Proefschrift. Utrecht 1907.

2) J. Valentin, Gebrauch des Spektroskopes. 1863. p. 70.

3) Vgl. J. Reinke, Ber. Bot. Ges. 2. p. 265. 1884.

wenn statt der Nernstlampe Sonnenlicht angewendet worden wäre. Auch wird sie eine bedeutende Änderung erfahren, wenn man vom prismatischen zum „normalen“ Spektrum übergeht. Die $(J - J')$-Kurve des normalen Langleyschen Sonnenspektrums würde aber für das kleine Spektralgebiet der Fig. 2 eine ähnliche Form wie die $(J - J'/J)$-Kurve zeigen. Ein Blick auf die Langleysche Energiekurve zeigt nämlich, daß die Größe J, welche hier eben durch ein Maximum geht, von 630 bis 700 mμ wohl als relativ konstant zu betrachten ist.

Es stellt also auch die $(J - J'/J)$-Kurve der Fig. 2, weil die Ordinate *dieser* Kurve von der Lichtquelle und von der Art des Spektrums unabhängig sind, diese absolute Absorption des normalen Spektrums ziemlich gut dar; sie erreicht offenbar bei $\lambda = 670$ mμ ihren maximalen Wert.

Wageningen, Holland, Hoogere Land-, Tuin-en Boschbouwschool.

(Eingegangen 19. April 1907.)

7. *Über sekundäre Kathodenstrahlen;* *von J. Laub.*

[Auszug aus der Würzburger Inaugural-Dissertation.[1])]

1. Einleitung.

Eingehende Messungen über die Vorgänge, die mit dem Auftreffen von Kathodenstrahlen auf ein Metall verknüpft sind, haben zuerst Hr. Starke[2]), dann Hr. Seitz[3]) und insbesondere die Herren Austin und Starke[4]) mitgeteilt. Nach den Untersuchungen von Austin und Starke findet folgendes statt: Fallen Kathodenstrahlen senkrecht auf ein zur Erde abgeleitetes Metallblech, so zeigt das Galvanometer, durch welches hindurch das Metall zur Erde geleitet ist, einen von der in den Strahlen transportierten Elektronenmenge herrührenden negativen Strom an. Der Strom gibt aber nicht die gesamte Menge an, weil von dieser ein großer Teil, und zwar bei Platin etwa 70 Proz., durch diffuse Reflexion verloren geht. Dreht man den Reflektor um eine in seiner Ebene liegende Achse, so nimmt der Strom immer mehr ab und geht schließlich mit wachsendem Inzidenzwinkel über Null zu positiven Werten über. Dieser positive Strom wächst immer mehr, je schiefer die Strahlen auffallen, und kann Werte erreichen, welche größer sind als der negative Strom bei normaler Inzidenz.

Die beiden Forscher konnten nachweisen, daß dieses eigentümliche Phänomen sich nur durch Emission sekundärer Kathodenstrahlen, welche durch das Auftreffen der primären hervorgerufen werden, erklären läßt. Es müssen also so viel sekundäre, negative Teilchen vom Körper ausgesandt werden,

1) In extenso in Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie 1907 gedruckt.

2) H. Starke, Wied. Ann. **66**. p. 49. 1898; Ann. d. Phys. **3**. p. 75. 1900.

3) W. Seitz, Ann. d. Phys. **6**. p. 1. 1901.

4) L. Austin u. H. Starke, Ann. d. Phys. **9**. p. 271. 1902.

daß dadurch nicht nur die Ladung der absorbierten primären Strahlen kompensiert wird, sondern sogar eine positive Ladung zurückbleibt.

Diese sekundäre Strahlung, die um so größer ist, je schiefer die Inzidenz der auftreffenden Kathodenstrahlen, soll ferner nach Austin und Starke bei senkrechter Inzidenz verschwinden; es findet also in dem Falle eine reine diffuse Reflexion statt. Die Emission ist desto größer, je vollkommener die Politur, je größer die Dichte des Reflektormetalles ist; Platin ist das wirksamste Metall, während Aluminium gar keinen positiven Effekt zeigt. Die Emission nimmt mit der Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen stark ab, ist aber unabhängig vom Gasdruck. Austin und Starke schließen ferner aus ihren Versuchen, daß die Geschwindigkeit der sekundären Elektronen von derselben Größenordnung, wie diejenige der primären sei.

Zu ganz anderen Ergebnissen, die den oben besprochenen widersprechen, kommt Lenard[1]) in seinen Untersuchungen über sekundäre Kathodenstrahlen. Die Primärstrahlen waren lichtelektrisch erzeugt, und ihre Geschwindigkeit entsprach Spannungen zwischen 10 und 4000 Volt. Die Sekundärstrahlung ist bei den kleinsten untersuchten Spannungen, das ist unter 100 Volt, verschwindend klein, nimmt dann zu und erreicht ihr Maximum ungefähr bei 500 Volt. Die Intensität der sekundären Emission ist nach den Messungen von Hrn. Lenard unabhängig vom Einfallswinkel der primären Strahlen, sowie von der Güte der Politur. Auch bei rauhen, senkrecht bestrahlten Oberflächen findet Lenard eine kräftige Emission, deren Intensität unter Umständen erheblich größer ist als die der Primärstrahlen. Am wirksamsten zeigte sich Aluminium. Die Geschwindigkeit der sekundären Strahlen wurde immer sehr klein gefunden. Eine Reflexion der Primärstrahlen „mit unverminderter oder auch ganz bedeutend verminderter Geschwindigkeit“ wurde nicht bemerkt.

In letzter Zeit hat das gleiche Phänomen Hr. Becker[2]) untersucht, der die Lenardschen Resultate teilweise bestätigt.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. p. 485. 1904.
2) August Becker, Ann. d. Phys. 17. p. 381. 1905.

Hr. Becker findet, daß beim Auftreffen der Kathodenstrahlen auf ein Metall an der Oberfläche eine ziemlich starke Zurückwerfung der Strahlung stattfindet. Außerdem werden sekundäre, langsame Strahlen ausgelöst, deren Menge aber geringer ist, als die der sie erzeugenden primären Strahlen. Ferner schließt auch Becker aus seinen Versuchen, daß die Größe der Sekundärstrahlung in keinem merklichen Zusammenhang mit der Richtung der Primärstrahlen steht; was die Abhängigkeit von der Natur der Substanz betrifft, erweist sich Aluminium am wenigsten wirksam.

Die folgende, auf Anregung des Hrn. Prof. Wien unternommene Arbeit soll einen Beitrag zur Klärung der oben skizzierten Verhältnisse liefern.

2. Methode der Untersuchung.

Fallen Kathodenstrahlen auf einen Körper und ist φ die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und dem Körper, i die in der Sekunde dem Körper durch die Kathodenstrahlen zugeführte Elektrizitätsmenge, alles in absolutem, elektromagnetischem Maße, so wird bekanntlich der Körper in der Sekunde von einer Energiemenge $i\varphi$ Erg getroffen. Der Körper sei durch ein Galvanometer zur Erde abgeleitet und werde in der Sekunde von N_p Elektronen getroffen. Es werde zuerst die Annahme gemacht, daß die Elektronen ihre ganze Ladung und ihre ganze Energie an den getroffenen Körper abgeben. Ist dann v_p die Geschwindigkeit der Elektronen in Zentimetern pro Sekunde, m ihre Masse in Gramm, so wird dem Körper pro Sekunde die Wärmemenge:

$$Q = \tfrac{1}{2} N_p m v_p^2 \text{ (Erg)} \tag{1}$$

zugeführt. Die Intensität des durch das Galvanometer fließenden Kathodenstromes ist:

$$i = N_p \varepsilon, \tag{2}$$

wo ε die Ladung des Elektrons bedeutet. Ist andererseits φ die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und dem Körper, so ist:

$$\varepsilon\varphi = \tfrac{1}{2} m v_p^2; \tag{3}$$

daher

$$Q = N_p \varepsilon \varphi = i\varphi,$$

oder

$$\frac{i\varphi}{Q} = 1. \tag{4}$$

Werden aber beim Auftreffen von N_p Elektronen mit der Geschwindigkeit v_p, die wir primär nennen wollen, N_r Elektronen, deren Geschwindigkeit v_r sein möge, zurückgeworfen, werden ferner außerdem beim Auftreffen der primären Kathodenstrahlen vom Körper N_s neue „sekundäre" Elektronen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_s ausgelöst, wobei die Größen v_p, v_r, v_s voneinander verschieden sind, dann werden die obigen Gleichungen, wenn die Energie der sekundären Strahlen nicht aus dem Körper selbst stammt, offenbar folgende Gestalt annehmen:

(1a) $$Q = \tfrac{1}{2} m \{N_p v_p^2 - N_r v_r^2 - N_s v_s^2\},$$

(2a) $$i = \varepsilon \{N_p - (N_r + N_s)\},$$

(3a) $$\varepsilon \varphi = \tfrac{1}{2} m v_p^2,$$

(4a) $$\frac{i\varphi}{Q} = \frac{v_p^2 \{N_p - (N_r + N_s)\}}{N_p v_p^2 - N_r v_r^2 - N_s v_s^2}.$$

Die Gleichung (4a) kann $\gtrless 1$ sein, sie wird nur dann gleich 1 werden, wenn

1. $v_r = v_p$,

und gleichzeitig

2. $v_s = v_p$ ist.

Es sollen in der vorliegenden Arbeit diese Beziehungen bei verschiedenen Metallen, verschiedenen Spannungen und verschiedenen Inzidenzwinkeln der primären Kathodenstrahlen untersucht und daraus Schlüsse über die Vorgänge bei der sekundären Kathodenstrahlung gezogen werden.

3. Die Versuchsanordnung.

Bei der Ausführung der Versuche wurde folgender, auf der nächsten Seite abgebildeter Apparat gebraucht: Fig. 1.

In die 15 cm lange, 2 cm weite Röhre R ist die schwach konkave, aus Aluminium angefertigte Kathode K eingeschmolzen. Als Anode dient das leichtverschiebbare Doppeldiaphragma D, ein 5 cm langer und in die Röhre R genau passender Messingzylinder, dessen vordere, der Kathode zugewandte Fläche auch aus Aluminium angefertigt ist. Das Doppeldiaphragma D, dessen kreisrunde Öffnungen einen Durchmesser von 3 mm haben, ist zur Erde abgeleitet, wodurch der Entladungsraum von dem Reflektorraum ganz abgesperrt ist. Die aus dem Dia-

phragma austretenden Kathodenstrahlen sind nahezu parallel, denn der Durchmesser des Flecks, der von ihnen an dem im folgenden beschriebenen Reflektor erzeugt wird, ist nur wenig größer als die Öffnungen des Diaphragmas.

An das Rohr R schließt sich das 8 cm weite, kugelförmige Gefäß U an. In das Glasrohr a des leicht drehbaren Schliffes s ist das Thermometer T eingekittet, welches zugleich als Reflektor und zur Messung der von den auftreffenden Kathodenstrahlen erzeugten Wärmemenge dient. Das Thermometergefäß hat einen Durchmesser von 1,5 cm und ist möglichst flach gemacht;

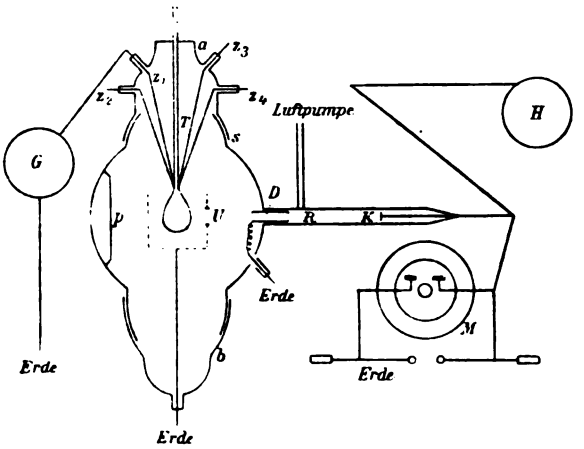


Fig. 1.

die Thermometerkapillare besitzt einen Durchmesser von $^1/_{10}$ mm und ist 40 cm lang. Eine Seite des Thermometergefäßes wurde sorgfältigst platiniert, wobei darauf geachtet wurde, daß die Platinschicht verhältnismäßig dick aufgelegt wird, so daß sicherlich keine Strahlen hindurchdringen konnten. An den Rand der platinierten Seite sind vier Platindrähte, je zwei zusammen, angelötet. Das Anlöten der Drähte gestaltete sich ziemlich schwierig. Das Thermometer wurde mit Toluol im Vakuum gefüllt. Es mußte wiederholt evakuiert werden; die letzten Luftblasen wurden durch vorsichtiges Erhitzen unter gleichzeitiger Evakuierung vertrieben.

Um den Reflektor vor irgendwelchen Störungen zu schützen, ist er von einem aus engmaschigem Drahtnetz angefertigten

Zylinder C umgeben. Der Zylinder ist in den drehbaren Schliff b eingekittet und zur Erde abgeleitet. Der Abstand zwischen dem Reflektor und den Wänden des erdabgeleiteten Schutzzylinders beträgt 3 cm; eine Störung infolge der doppelten Reflexion kommt daher nicht in Betracht.[1]) An die Hinterwand des Gefäßes U ist der Fluoreszenzschirm P angebracht.

Die ganze Versuchsanordnung ist aus der Fig. 1 ersichtlich. Zur Erzeugung des Stromes diente die Influenzmaschine M mit zwei beweglichen Platten, welche von einem Motor mit konstanter Tourenzahl getrieben wurde und sehr konstanten Strom lieferte. Vom negativen Pol führt eine in Glasrohr mit Paraffin eingeschmolzene Leitung zur Kathode K, während der andere Pol der Maschine zur Erde abgeleitet ist. Von der Kathode geht eine ähnliche Leitung zum statischen Voltmeter H von Siemens & Halske, welches zur Messung des Kathodenpotentials gebraucht wurde. Nach dem Durchgang durch das geerdete Diaphragma D fallen die Strahlen auf den Reflektor T. Die Intensität der auf das Thermometer fallenden Strahlen wird gemessen, indem es mittels des Drahtes Z durch ein Galvanometer von Hartmann & Braun von der Empfindlichkeit $5{,}44 \cdot 10^{-10}$ Amp./mm (Skalenabstand 1,9 m) zur Erde abgeleitet ist. Bei den Messungen wurde ein Nebenschluß von 1000 Ohm gebraucht. Der Draht zum Galvanometer war durch ein abgeleitetes Messingrohr gezogen; Galvanometer und Rheostatenkasten standen bei den ersten Versuchen in Drahtnetzbehältern. Letztere Vorsicht erwies sich als nicht notwendig.

Die verschiedenen Inzidenzwinkel konnten an der Kreisteilung, die an a angebracht war, abgelesen werden.

4. Ausführung der Versuche.

Nachdem das Thermometer platiniert war, wurde es mit Wiener Kalk, dann auf Leder poliert. Vor dem Gebrauch wurde es mit Alkohol und Lederlappen peinlichst gesäubert. Jedoch erwies sich die Politur ohne Einfluß auf die Resultate. Das Thermometer wurde so eingestellt, daß möglichst das ganze Kathodenbündel auf den Platinspiegel nicht nur bei senk-

1) H. Starke, Ann. d. Phys. 3. p. 86. 1900.

rechter Inzidenz, sondern auch bei schieferem Einfallswinkel falle. Drehte man den Schliff *a* (bis 88°), so sah man, wie der vom Strahlenbündel am Platinspiegel erzeugte Fleck sich mitbewegte, immer auf der Reflektorfläche bleibend. Außerdem war am Schirm *P* gar keine Fluoreszenz zu bemerken, was auch als Kontrolle dafür diente, daß das ganze Bündel auf den Reflektor fiel.

Der erste Versuch wurde immer bei senkrechter Inzidenz der Primärstrahlen ausgeführt. Das Thermometer wurde $1^1/_2$ Min. der Bestrahlung ausgesetzt. Es wurde zuerst der Ausschlag am Galvanometer und Siemensschen Voltmeter und danach sofort die Temperatur am Thermometer abgelesen; dann wurde noch rasch kontrolliert, ob die Spannung und Stromintensität konstant geblieben waren. Mit Hilfe einer Lupe konnte man leicht $^1/_{10}$ Teilstrich der Thermometerskala ablesen. Hierauf wurde die Eichung des Thermometers vorgenommen, indem durch das Platin ein Strom von bestimmter Spannung und Stromstärke hindurchgeleitet wurde, wobei die Spannung mit einem Kugelpolvoltmeter von Franke in Hannover und die Stromstärke mit einem Hitzdrahtinstrument gemessen wurde.

Die durch Kapillaren gezogenen Drähte Z_2, Z_4 standen ununterbrochen mit dem Frankeschen Voltmeter, der Draht Z_3 durch das Ampèremeter mit dem Pol eines Akkumulators in Verbindung; man brauchte nur den Draht Z_1 vom Galvanometer abzunehmen und mit dem zweiten Pol des Akkumulators zu verbinden, um die Eichung auszuführen. Ist nun die Intensität des durch das Thermometer geleiteten Stromes gleich I Amp., ist ferner die Spannungsdifferenz zwischen den Drähten Z_2 und Z_4 gleich Φ Volt, so beträgt die dem Thermometer zugeführte Wärme $I\Phi = Q$ Watt. Wird der Faden in der Kapillare um n Skt. verlängert, dann kommen auf einen Teil Q/n Watt. Eine Intensität von 0,3 Watt genügte, um eine Temperaturerhöhung von 150 Skt. zu erhalten. Die Erhöhung um einen Skalenteil war daher äquivalent mit $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ Watt.

Hierauf wurden wieder Kathodenstromintensität und Wärmemenge bei derselben Spannung, aber bei verschiedenen Einfallswinkeln gemessen.

Durch stetiges Evakuieren wurde die Spannung allmählich

erhöht; bei jeder Spannung wurden dieselben Messungen ausgeführt. Die Eichung des Thermometers wurde bei verschiedenen Spannungen von Zeit zu Zeit wiederholt.

Das statische Voltmeter von Siemens & Halske wurde mit dem absoluten Schutzringelektrometer geeicht.

5. Messungen.

Die Versuche wurden bei Platin, Gold, Silber, Kupfer, Nickel, Aluminium und Wismut im Gebiete von 3000 bis 15000 Volt ausgeführt. Die verschiedenen Reflektoren wurden erhalten, indem das platinierte Thermometer galvanisch mit dem entsprechenden Metall bedeckt wurde. Um die Erscheinungen bei Aluminium zu untersuchen, wurde auf das Thermometergefäß ein Aluminiumblatt aufgepreßt. Es wurden immer zwei Messungsreihen gemacht und dann noch einzelne Werte bei verschiedenen Spannungen kontrolliert. Die Werte stimmten sehr gut miteinander.

Die Versuche wurden ferner bei allen Metallen, bei verschiedenen Spannungen, auch bei verschiedenen Einfallswinkeln der Kathodenstrahlen ausgeführt. Der größte Inzidenzwinkel betrug 88^0, wobei noch das ganze Strahlenbündel von der Reflektorfläche aufgefangen wurde.

6. Resultate.

1. Es zeigte sich[1]), daß der Strom am Reflektor bei allen untersuchten Metallen mit der Zunahme des Inzidenzwinkels der auftreffenden Kathodenstrahlen stark abnimmt, daß er ferner bei allen Metallen mit Ausnahme von Aluminium bei einem gewissen Winkel Null wird und dann positive Werte annimmt, die sogar größer als die entsprechenden Werte bei senkrechter Inzidenz sein können.[2]) Es findet also in der Tat neben der gewöhnlichen Reflexion noch eine sekundäre Emission von Elektronen am Reflektor statt, die um so größer wird, je schiefer der Inzidenzwinkel der primären Strahlen ist. *Die*

1) Die Tabellen sind in der Dissertation enthalten.

2) In den folgenden Kurven (Fig. 2) ist die Abhängigkeit des Reflektorstromes vom Inzidenzwinkel für einige Metalle und Spannungen wiedergegeben.

sekundäre Kathodenstrahlenmenge ist daher eine Funktion des Einfallswinkels der primären Kathodenstrahlen.

2. Ferner ist bei allen untersuchten Metallen die Menge der sekundär emittierten Elektronen in beträchtlichem Maße von der Spannungsdifferenz zwischen der Kathode und dem Reflektor abhängig. Während z. B. bei „3520 Volt“ Primärstrahlen, wenn Platin als Reflektor benutzt wird, die Differenz zwischen dem Kathodenstrom bei senkrechter Inzidenz und derjenigen bei 88° 67,8 . 10^{-7} Amp. ausmacht, beträgt die entsprechende Differenz bei „13950 Volt“ Strahlen nur 28,1 . 10^{-7} Amp. ***Mit der Zunahme der Geschwindigkeit der Primärstrahlen nimmt die Emission von sekundären Kathodenstrahlen ab.***

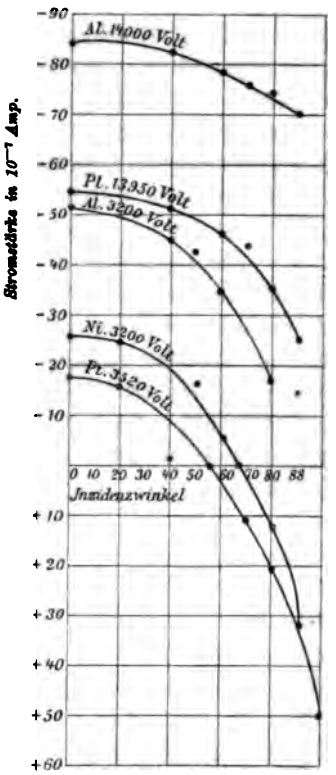


Fig. 2.

3. Was die Abhängigkeit der sekundären Strahlung von der Natur des Reflektormaterials betrifft, kann man die untersuchten Metalle in drei Gruppen einteilen; zur ersten gehören: Platin, Gold, Silber, Wismut; zur zweiten: Nickel, Kupfer; zur dritten: Aluminium. Die erste Gruppe zeigt den größten positiven Effekt, während bei Aluminium der Reflektorstrom nie positiv oder Null wird. Obzwar der positive Strom bei Platin und Gold eher und stärker eintritt als bei Silber und Wismut, muß man doch die vier Metalle zur selben Gruppe in bezug auf ihr Verhalten bei der sekundären Emission rechnen; bei Platin und Gold ist nämlich der negative Strom bei senkrechter Inzidenz wegen der größeren Reflexion schwächer als bei Silber und Wismut. Bildet man aber die entsprechenden Differenzen zwischen den Reflektorströmen bei senkrechten

Inzidenzwinkeln und denjenigen bei 88°, so ergibt sich, daß die bei Platin, Gold, Silber und Wismut keinen wesentlichen Unterschied zeigen. Aus dem Verhalten der untersuchten Metalle kann man schließen, *daß je größer die Dichte des Reflektormetalles ist, die Wirkung der sekundären Emission desto stärker zum Ausdruck gelangt.*

4. Die Messungen bei verschiedenen Inzidenzwinkeln zeigten, *daß die Wärmemenge bei allen Metallen und bei allen Spannungen vom Einfallswinkel unabhängig ist.* Aus dieser Tatsache lassen sich folgende Schlüsse ziehen: Infolge der Emission von sekundären Kathodenstrahlen nimmt der negative Strom am Reflektor mit wachsendem Einfallswinkel ab und geht unter Umständen über Null zu positiven Größen über, die sogar dreimal so groß sind als die entsprechenden Werte des negativen Stromes bei senkrechter Inzidenz. Wäre die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen von derselben Größenordnung, wie die der primären, so müßte die Wärmemenge Q bei dem Winkel, bei welchem der Reflektor stromlos ist, gleich Null sein, dagegen bei dem Winkel, bei welchem der Reflektorstrom große positive Werte annimmt, müßte sogar Q negativ werden, d. h. das Thermometer müßte sinken. Unter allen Umständen müßte sich Q mit dem Inzidenzwinkel ändern, wenn die Geschwindigkeit der sekundären und der primären Strahlen von derselben Größenordnung wäre. Da aber Q bei allen Winkeln unverändert bleibt, so muß man notwendig schließen, *daß die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen sehr gering ist,* wenn die Energie der Sekundärstrahlen nicht aus der inneren Energie der Metalle stammt. Nach den Messungen von Füchtbauer[1]) ist aber die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen in der Tat sehr klein.

5. Aus den Versuchen von Hrn. Gehrcke[2]), die innerhalb des Intervalles von ca. 3000 bis 15000 Volt ausgeführt wurden, folgt, daß unter den zurückgeworfenen Kathodenstrahlen sich auch solche finden, bei denen die Geschwindigkeit während der Reflexion unverändert bleibt, ferner daß der Geschwindigkeitsverlust, den eine gewisse Anzahl von Elektronen erleidet,

1) Ch. Füchtbauer, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 1906. p. 394.
2) E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 8. p. 81. 1902.

nur etwa bis zur Hälfte des anfänglichen Wertes geht. Würde die Reflexion mit der Änderung des Inzidenzwinkels abnehmen oder zunehmen, dann müßte sich auch die Wärme Q mit der Variation der Inzidenz dementsprechend vergrößern bez. verringern. Da aber Q bei den verschiedenen Einfallswinkeln konstant bleibt, folgt, daß bei jedem Winkel dasselbe Kathodenstrahlenbündel zurückgeworfen wird. *Die Größe der Reflexion ist von dem Einfallswinkel der Kathodenstrahlen unabhängig.*

6. Da Q bei allen untersuchten Spannungen vom Inzidenzwinkel unabhängig ist, folgt, *daß die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen bei allen untersuchten Spannungen sehr gering und von derselben Größenordnung ist.*

7. Da Q ferner bei allen untersuchten Metallen mit der Inzidenz der primären Kathodenstrahlen sich nicht ändert, so folgt, *daß die Geschwindigkeit der sekundär emittierten Kathodenstrahlen bei den verschiedenen Metallen von derselben Größenordnung ist.*

8. Aus den in der Dissertation enthaltenen Tabb. I—VIII ersieht man, daß das Verhältnis $i\varphi/Q$ bei senkrechter Inzidenz bei allen Metallen immer kleiner als 1 ist. $i\varphi/Q$ nimmt nämlich bei Platin, Gold, Silber und Wismut von 0,85 mit der Spannung zu, um in der Nähe von 10500 Volt den konstanten Wert 0,97 anzunehmen; bei Kupfer und Nickel wächst $i\varphi/Q$ von 0,86 bis 0,98, bei Aluminium von 0,88 bis 0,99. Da die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen sehr klein ist im Vergleich mit der Geschwindigkeit der primären, kann man v_s in der Formel (4a) des § 2 vernachlässigen. Die Abweichung des Ausdruckes $i\varphi/Q$ von 1 kann also nur daher herrühren, daß 1. $v_r < v_p$ ist, d. h. daß die zurückgeworfenen Elektronen dem Reflektor zwar Wärme, aber keine Elektrizität zurücklassen, und in diesem Falle muß notwendig $Q > i\varphi$ sein; 2. daß auch bei senkrechter Inzidenz eine sekundäre Emission stattfindet und dadurch der Strom i zu schwach wird. Die Tabellen bestätigen also vor allem die schon von Hrn. Gehrcke[1]) erhaltenen Resultate, daß die Kathodenstrahlen *bei der Reflexion einen Geschwindigkeitsverlust erleiden.*

Man kann aus ihnen aber auch mit großer Wahrschein-

1) E. Gehrcke, l. c.

lichkeit den Schluß ziehen, daß die Verkleinerung des Ausdruckes $i\varphi/Q$ auch auf Kosten der sekundären Emission zu rechnen ist. Das Verhältnis $i\varphi/Q$ nimmt bei allen Metallen mit der Spannung stark zu. Da die Reflexion nach den Messungen Hrn. Starkes ein von der Spannung unabhängiger Vorgang ist, so müßte $i\varphi/Q$ bei allen Spannungen konstant bleiben, wenn die Abweichung von 1 nur von der Änderung der Geschwindigkeit der Strahlen bei der Reflexion herrühren sollte. Es könnte in dem Falle eher eine Abnahme des Ausdruckes $i\varphi/Q$ eintreten. Man kann daher folgern, daß die Abweichung des Quotienten $i\varphi/Q$ von 1 auch daher kommt, daß auch bei senkrechter Inzidenz eine sekundäre Emission statthat, deren Menge mit wachsender Spannung genau so wie bei schiefer Inzidenz abnimmt. Diese Folgerung wird insbesondere durch die Tatsache bekräftigt, daß $i\varphi/Q$ bei Aluminium, welches die kleinste sekundäre Strahlung zeigt, schon bei der niedrigsten, zur Messung kommenden Spannung den Wert 0,88 hat, der dann rasch zunimmt und schließlich den Wert 0,99 erreicht, während bei Platin der höchste Wert 0,97 beträgt.

7. Ein Kontrollversuch.

Der Ausdruck $i\varphi/Q$ ist bei senkrechter Inzidenz immer kleiner als 1, weil erstens ein Teil der Kathodenstrahlen bei der Reflexion einen Geschwindigkeitsverlust erleidet und zweitens weil wahrscheinlich auch bei senkrechter Inzidenz eine sekundäre Emission statthat, die den negativen Strom i verkleinert. Wird aber der gesamte Strom, sowohl derjenige, welcher am Reflektor bleibt, wie der reflektierte aufgefangen, wird ferner die gesamte Wärme, also auch die von den reflektierten Strahlen weggeführte, aufgefangen, dann muß offenbar $i\varphi/Q$ notwendig gleich 1 werden. Um das experimentell zu prüfen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen: Fig. 3.

Die in der Pfeilrichtung ankommenden Kathodenstrahlen passieren das Diaphragma des äußeren, als elektrischer Schutz für die inneren Teile dienenden, erdabgeleiteten Metallzylinders a, und fallen, nachdem sie durch die weitere Öffnung des inneren Aluminiumzylinders b hindurchgegangen sind, auf das im Paragraph 3 beschriebene Thermometer, welches auch hier als Reflektor dient. Der äußere Zylinder ist 6 cm lang und

hat einen Durchmesser von 4 cm, der innere Zylinder dagegen 4 cm lang mit einem Durchmesser von 2,5 cm. Die Eintrittsöffnung für die Kathodenstrahlen im äußeren Zylinder hat einen Durchmesser von 3 mm, die im inneren Zylinder einen von 5 mm. Die beiden Zylinder sind in die im § 3 beschriebene Röhre gebracht. Das Thermometer war gerade so wie bei den früheren Versuchen durch ein Galvanometer von Hartmann & Braun zur Erde abgeleitet. Alles was vom Reflektor reflektiert und emittiert wird, gelangt an die Wände des inneren Zylinders b; die durch das Diaphragma des inneren Zylinders verloren gehende Strahlenmenge ist sehr gering.[1]) Der Zylinder b ist metallisch mit dem Thermometer verbunden, indem er durch einen Draht an die Platinschicht des Thermometergefäßes angelötet ist. Der Reflektor fängt dann wahrscheinlich fast die ganze Elektrizität und Wärme auf und $i\varphi/Q$ wird in der Tat gleich 1.[2])

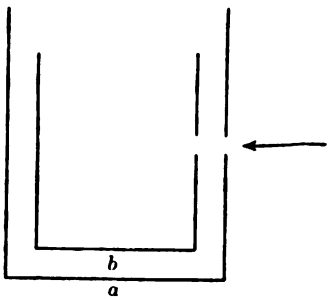


Fig. 8.

8. Versuch einer theoretischen Deutung.

Die Messungen zeigen, daß die sekundäre Emission bei allen untersuchten Metallen vom Inzidenzwinkel der primären Kathodenstrahlen abhängt, und zwar nimmt die Menge mit wachsendem Winkel ab. Diese Tatsache läßt sich folgendermaßen deuten. Als Ausgangszentren für die sekundären Strahlen betrachten wir diejenigen Stellen, an denen die primären Elektronen absorbiert werden. Wenn wir annehmen, daß die einfallenden Elektronen zum großen Teil auch innerhalb des Metalles die ursprüngliche Richtung beibehalten, so werden bei normaler Inzidenz die Primärstrahlen in tiefe Schichten eindringen, bei streifender Inzidenz müssen sie schon gleich in den äußersten Schichten absorbiert werden. Die bei senkrechter Inzidenz ausgelösten Strahlen entstehen dann auch in

1) l. c.
2) Vgl. Dissertation.

tiefen Schichten des Metalles. Berücksichtigt man noch die geringe Geschwindigkeit der sekundären Strahlen, so ist es sehr wahrscheinlich, daß die bei senkrechter Inzidenz emittierten Elektronen gar nicht mehr an die Oberfläche des Metalles gelangen, sondern schon im Innern absorbiert werden. Sie gelangen infolgedessen größtenteils nicht zur Wirkung. Die Abhängigkeit der Größe der sekundären Strahlen vom Inzidenzwinkel der auftreffenden Kathodenstrahlen wäre demnach nur als eine scheinbare zu betrachten; in Wirklichkeit löst jedes Elektron bei demselben Metall wenigstens dieselbe Anzahl von sekundären Elektronen aus, unabhängig vom Einfallswinkel, nur werden sie bei verschiedenen Winkeln in verschiedenem Maße schon in den inneren Schichten absorbiert.

Aber auch die Abhängigkeit der sekundären Menge von der Natur des Reflektormetalles ist vielleicht nur eine scheinbare. Unter den untersuchten Metallen zeigt sich Aluminium am wenigsten wirksam. Nun sind bekanntlich Aluminiumblättchen für Kathodenstrahlen viel durchlässiger als andere Metalle. Nimmt man an, daß der Absorptionskoeffizient für Aluminium stärker von der Geschwindigkeit abhängt als bei anderen Metallen, so kann man die geringe Wirkung bei Aluminium so deuten, daß infolge der Absorption der primären Strahlen bei Aluminium in tieferen Schichten auch eine größere Anzahl der sekundären, langsamen Elektronen nicht mehr an die Oberfläche kommt.

Aus demselben Grunde (des tieferen Eindringens der Primärstrahlen, dessen Folge die Absorption einer größeren Anzahl von Elektronen ist) kann man auch die Abnahme der sekundären Emission mit der Zunahme der Geschwindigkeit der Primärstrahlen als eine vielleicht nur scheinbare betrachten. Zum Schlusse mag folgende Überlegung mitgeteilt werden: Das Reflektormetall sei Gold. Um zu sehen, wie groß die Intensität i_p der Primärstrahlen ist, welche die Auslösung von Elektronen verursachen, verfahren wir auf folgende Weise: Jedenfalls gelangt bei senkrechter Inzidenz nur eine sehr geringe Anzahl sekundärer Strahlen zur Wirkung. Wir berücksichtigen diese, indem wir nach Becker[1]) annehmen, daß der

1) A. Becker, l. c.

Galvanometerstrom dadurch etwa um 15 Proz. geschwächt wird. Der am Goldreflektor bei senkrechter Inzidenz am Galvanometer gemessene negative Strom beträgt bei 3500 Volt $17{,}3 . 10^{-7}$ Amp., berücksichtigt man noch die 15 Proz. emittierten Strahlen, so kann man annehmen, daß die Intensität der auslösenden Strahlen gleich ist $i_p = 19{,}9 . 10^{-7}$, und zwar ist i_p wegen der Unabhängigkeit der Reflexion vom Inzidenzwinkel bei allen Winkeln bei gleicher Spannung gleich groß. Nun nehmen wir an, daß beim Winkel von 88° alle ausgelösten Elektronen bis auf einen kleinen Teil an die Oberfläche gelangen, denn die primären Strahlen werden bei diesem Winkel bis auf einen kleinen Teil, der infolge der Diffusion zentral gerichtet wird, schon in den äußersten Schichten absorbiert werden. Die von den zentral gerichteten primären Strahlen ausgelösten Elektronen kommen zwar nicht zur Wirkung, doch wird das nicht viel ausmachen, da wegen der äußerst dünnen Schicht nur ein kleiner Bruchteil der Primärstrahlen zentral gerichtet wird. Die bei 88° am Galvanometer abgelesene *positive* Stromstärke beträgt $50{,}4 . 10^{-7}$ Amp., die Intensität der durch die Primärstrahlen ausgelösten, sekundären Kathodenstrahlen wird daher mindestens gleich sein $i_s = 70{,}3 . 10^{-7}$ Amp. Wir gelangen also zu dem Schluß: ist $i_p = 19{,}9 . 10^{-7}$ Amp., so ist $i_s = 70{,}3 . 10^{-7}$ Amp., d. h. ein primäres Elektron löst mindestens 3,5 sekundäre Elektronen aus. Diese Zahl ist als eine untere Grenze anzusehen.

9. Zusammenfassung.

Beim Auftreffen von Kathodenstrahlen auf ein erdabgeleitetes Metall findet neben dem Reflexionsvorgang, der auf einer Zurückwerfung der Strahlen beruht, noch eine sekundäre Emission von sehr langsamen Kathodenstrahlen statt. Die geringe Geschwindigkeit der sekundären Elektronen ist bei allen Metallen von derselben Größenordnung. Die Versuche zeigen zwar, daß die Anzahl der sekundär emittierten Elektronen eine Funktion des Einfallswinkels und der Geschwindigkeit der Primärstrahlen ist, doch läßt sich diese Abhängigkeit wie auch die Abhängigkeit von der Natur des Reflektormateriales als eine nur scheinbare deuten. Jedes Elektron verursacht eine Emission derselben Anzahl von sekundären Elektronen. Die Energie der sekundären Kathoden-

strahlen entstammt nicht der Energie der Primärstrahlen, sie muß vielmehr schon im Innern des Metallatoms in irgendwelcher Form vorhanden sein. Die Rolle der Primärstrahlen ist nur eine auslösende.

Ich erfülle eine Pflicht, wenn ich zum Schlusse meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrat W. Wien, meinen allerwärmsten Dank für die gütige Förderung meiner Arbeit und die Anregungen ausspreche, die er mir auch sonst hat zuteil werden lassen.

Würzburg, Physik. Institut, im November 1906.

(Eingegangen 8. Mai 1907.)

8. *Über Sekundärstrahlen;* *von Christian Füchtbauer.*

Als ich die Geschwindigkeit der von mir beobachteten Sekundärstrahlen der Kanalstrahlen [1]) aus der magnetischen Ablenkung bestimmte, ergab sich das merkwürdige Resultat, daß die Geschwindigkeit der größten Menge der Sekundärstrahlen unabhängig war von der Geschwindigkeit der auffallenden Kanalstrahlen; ferner war sie unabhängig vom Gasinhalt und vom Einfallswinkel; schließlich war sie auch bei Platin die gleiche wie bei Aluminium. Als ich mit dem gleichen Apparat feststellte, daß die Sekundärstrahlen der Kathodenstrahlen von den reflektierten Kathodenstrahlen scharf durch ihre Geschwindigkeit unterschieden sind, erwies sich die Geschwindigkeit dieser langsamen Sekundärstrahlen der Kathodenstrahlen als unabhängig von der Geschwindigkeit der einfallenden Kathodenstrahlen, sowie vom Einfallswinkel und, was besonders auffiel, als identisch mit der Geschwindigkeit der erwähnten Sekundärstrahlen der Kanalstrahlen. Der Wert dieser charakteristischen Elektronengeschwindigkeit war $3{,}2 \cdot 10^8$ bis $3{,}6 \cdot 10^8$ cm/sec, entsprechend 27—34 Volt.

Das Auftreten der nämlichen Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen unter so verschiedenen Bedingungen legt den Gedanken an eine gemeinsame Ursache nahe. Die von mir schon l. c. als weniger wahrscheinlich bezeichnete Möglichkeit, daß diese Ursache das im Kanal- und Kathodenstrahlenbündel erzeugte ultraviolette Licht sein könnte, wird durch die folgende Beobachtung ziemlich unplausibel: Die negative Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen zeigte sich bei ganz niedrigen Gasdrucken, bei denen das Leuchten bereits sehr schwach war, am kräftigsten. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß die Elektronen durch Kanal- und Kathodenstrahlen ausgelöst

1) Vgl. Chr. Füchtbauer, Physik. Zeitschr. 7. p. 153, 748. 1906; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 394. 1906; Würzburger Habilitationsschrift März 1907.

werden, *ihre Geschwindigkeit also durch die Energie der Metallatome bedingt ist.*

Ich nehme dabei an, daß Kanal- und Kathodenstrahlen, wie sie das Gas ionisieren, so auch die *Metallatome in positives Ion und negatives Elektron zerlegen, und daß bei diesem Vorgang das Elektron mit einer durch die Eigenschaften des Atoms, nicht aber durch die ionisierende Strahlung bedingten Geschwindigkeit entweicht.*

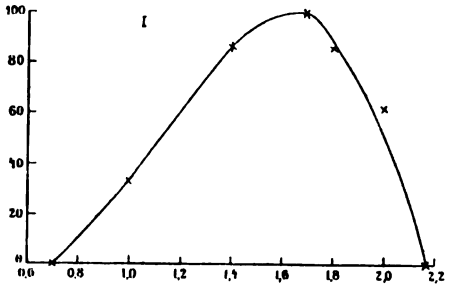
Man muß sich nun davon Rechenschaft geben, warum diese Übereinstimmung der Geschwindigkeit der größten Menge der Elektronen nicht stärker gestört wird dadurch, daß die Elektronen eine gewisse Dicke des Metalles zu durchdringen haben. Ist nämlich obige Erklärung richtig, so muß nur die bei einem und demselben Metall auftretende Maximalgeschwindigkeit unabhängig sein von der Geschwindigkeit der primären Strahlen, von dem Umstand, ob es Kanal- oder Kathodenstrahlen sind, und im Fall ersterer von dem Gas, aus dem die Kanalstrahlen bestehen. Dagegen können *kleinere* Geschwindigkeiten auch beim nämlichen Metall in der Sekundärstrahlung je nach der Art der Erzeugung in wechselnder Menge vertreten sein. Die ursprünglich dem Zerfall des Atoms in positives Ion und negatives Elektron entsprechende Geschwindigkeit des letzteren wird nämlich beim Durchgang durch das Metall vermindert werden, und zwar hängt die Verteilung der Geschwindigkeiten ab sowohl vom Einfluß des betreffenden Metalles auf die Sekundärstrahlung, wie auch vom Absorptionskoeffizienten des Metalles für die einfallenden Strahlen. Je schwächer das Metall die primären absorbiert, je tiefer sie also eindringen, desto stärker unterliegen die sekundären Strahlen der Verzögerung durch das Metall.

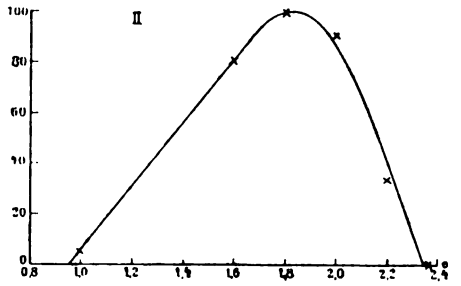
Da aber die Strahlung so absorbierbar ist, so werden die Strahlen der größten Geschwindigkeit am zahlreichsten herauskommen, und da diese Geschwindigkeit für ein bestimmtes Metall eine Konstante ist, so müssen die meisten Strahlen für verschiedene Erregungsarten bei dem nämlichen Metall nahezu gleiche Geschwindigkeit haben.

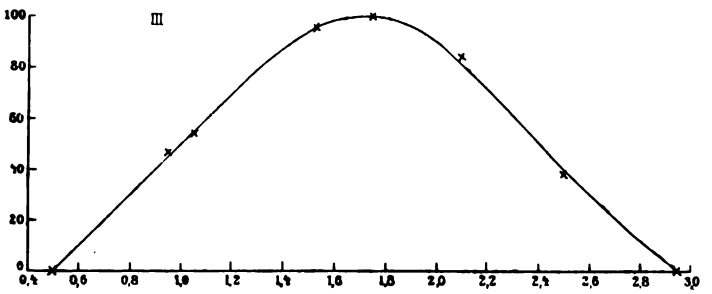
In der Tat bestätigen die oben angeführten Versuche [1])

1) Chr. Füchtbauer, l. c.

diese beiden Folgerungen: Bei diesen Versuchen wurde die Zahl der den verschiedenen Geschwindigkeiten entsprechenden Ionen in ihrer Abhängigkeit von der zugehörigen Geschwindigkeit bestimmt. Das Maximum, das nach der Seite größerer







Kurve I. Kanalstrahlen auf Aluminium in Luft. Entladungsspannung 5150 Volt.

Kurve II. Kanalstrahlen auf Platin in Luft. 8900 Volt.

Kurve III. Kanalstrahlen auf Platin in Wasserstoff. 18300 Volt.

Geschwindigkeit recht scharf war, hatte die gleiche Lage in den verschiedensten Fällen. Dabei waren aber langsamere Strahlen in verschiedenen Fällen in sehr verschiedener Menge vertreten.

Die Art des Abfalles in verschiedenen Fällen zeigen die vorstehenden Kurven I—III. Um einen besseren Vergleich verschiedener Kurven zu ermöglichen, sind die größten Ordinaten überall gleich 100 gesetzt, d. h. als Ordinaten sind die zum Elektrometer abfließenden, von den negativen Sekundärstrahlen gebildeten Ströme in Prozenten des größten Stromes gewählt. Die Abszissen sind den zugehörigen Geschwindigkeiten proportional.[1]) In der Art des Abfalles zeigt, wie man sieht, ein und dasselbe Metall bei verschiedener Gasfüllung Verschiedenheiten, trotz übereinstimmender Geschwindigkeit der größten Menge der Strahlen (vgl. Kurven II und III, die sich beide auf Platin beziehen).

Daraus, daß nicht nur bei verschiedenen Primärstrahlen, sondern auch *bei Platin und Aluminium* die Geschwindigkeit der Hauptmenge nahezu die gleiche war, ist zu schließen, daß auch *die wirkliche Geschwindigkeit der von den Atomen abgeschleuderten Elektronen* in diesen Fällen *die gleiche* ist; wir haben ja angenommen, daß die letztere von der beobachteten Geschwindigkeit der Hauptmenge der das Metall tatsächlich verlassenden Elektronen nicht sehr abweicht.[2])

Die auf Grund der erwähnten Versuche ausgesprochene Ansicht, daß die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen aus der Energie des Atomes stammt, erhält eine weitere Stütze durch folgendes:

J. J. Thomson[3]) fand gelegentlich des Versuches, die positive Ladung der α-Strahlen des Radiotellurs nachzuweisen, daß das Präparat eine sehr große Menge langsamer negativer Strahlen aussandte. Es sind offenbar die Sekundärstrahlen, welche die α-Strahlen in dem Präparat selbst erzeugen.

---

1) Es sind die Stromstärken des Magnetisierungsstromes (vgl. l. c.) in Ampère.

2) Das Vorkommen der wenn auch nur wenig größeren Geschwindigkeiten jenseits des Maximums bedarf noch der Aufklärung. Vielleicht hat es seinen Grund in der Versuchsanordnung (Breite des Spaltes).

3) J. J. Thomson, Proc. Camb. Phil. Soc. Nov. 14. 1904.

Rutherford [1]) fand, daß auch Radium eine langsame negative Strahlung aussendet, deren Menge bis zu 20mal so groß sein kann wie die der α-Strahlen. Ist dies richtig, so würde die große Menge wohl von der sehr großen Geschwindigkeit der α-Strahlen im Vergleich mit den Kanalstrahlen herrühren. Rutherford stellte gleichzeitig fest, daß Metalle unter der Wirkung der α-Strahlen ebenfalls eine solche langsame negative Strahlung aussenden. Damit ist die Annahme, daß die langsame negative Strahlung der radioaktiven Stoffe in der Tat eine solche Sekundärstrahlung ist, so wahrscheinlich gemacht, daß ich sie im folgenden zugrunde lege.

Die Geschwindigkeit solcher langsamer negativer Strahlen, die ein mit Polonium überzogenes Kupferblech aussendet, bestimmte P. Ewers [2]) durch magnetische Ablenkung. Er fand $3{,}25 \cdot 10^8$ cm/sec, entsprechend ca. 30 Volt, also ganz *den gleichen Wert, den ich bei den Sekundärstrahlen der Kanalstrahlen fand.* Ich möchte auf diese Übereinstimmung besonders hinweisen; denn damit erscheint die von mir festgestellte Tatsache, daß die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen unabhängig ist, über ein sehr großes Gebiet von Primärgeschwindigkeiten (bis zu $1{,}5 \cdot 10^9$, der Geschwindigkeit der α-Strahlen des Poloniums) ausgedehnt.

Ich erwähne, daß jüngst Logeman [3]) aus Versuchen über die Sekundärstrahlung der α-Strahlen (Sättigungsstrom) schloß, daß die Geschwindigkeit nicht größer als 10 Volt sei. Vorläufig halte ich es aber für möglich, daß hierbei Gasionen störten, und sehe deshalb zunächst die magnetischen Versuche von Ewers für sicherer an.

Die Hypothese, daß die Geschwindigkeit von Sekundärstrahlen aus der Energie der Atome herstammen soll, stellte zuerst W. Wien für die Röntgenstrahlen-Sekundärstrahlen auf. Dazu nötigte ihn die große Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen, die ihre Energie nicht aus *einem* Impuls beziehen konnten. Also bei den Röntgenstrahlen muß die Geschwindigkeit der Strahlung der Atome zum Teil groß, bei Kanal- und

1) E. Rutherford, Phil. Mag. **10.** p. 193. 1905.
2) P. Ewers, Physik. Zeitschr. **7.** p. 148. 1906.
3) Logeman, Proc. Roy. Soc. (A) **78.** p. 212. 1906.

Kathodenstrahlen nach meinen Versuchen gleich und klein [1]) angenommen werden. (Den Kanalstrahlen reihen sich, wie erwähnt, noch die α-Strahlen der radioaktiven Elemente als Erreger von Sekundärstrahlen an.) Die beiden Fälle müssen also, obwohl beide Auslösungen sind, als ganz verschiedene Vorgänge betrachtet werden, *durch Röntgenstrahlen einerseits und Kanal- sowie Kathodenstrahlen andererseits müssen verschiedene Elektronen abgespalten werden. Den letzteren Fall* allein halte ich also vorläufig für *identisch mit der Ionisation von Gasen durch Kanal- und Kathodenstrahlen.* Lenard fand ja, daß die Ionisation eines Gases durch Kathodenstrahlen sich auf dem Weg der Bildung sehr langsamer Sekundärstrahlen vollzieht, und das gleiche geschieht nach der hier zugrunde gelegten Auffassung mit dem Atom des festen Körpers. [2])

Einfluß der Absorption auf die Menge der Sekundärstrahlen.

Ähnlich wie die *Geschwindigkeit* der Sekundärstrahlen durch die Absorption der primären und durch die *Verzögerung* der sekundären Strahlen im Metall beeinflußt wird, wird auch die *Menge* der sekundären durch die Asorption der primären und die *Absorption* der sekundären Strahlen bestimmt. Je tiefer die primären eindringen, desto mehr unterliegen die sekundären der Absorption. *So erklärt sich auch die starke Vergrößerung der Emission durch schiefe Inzidenz der Kanalstrahlen*, die ich schon bei meinen ersten Versuchen (1904) feststellen konnte. Je schiefer die Kanalstrahlen auffallen, in um so oberflächlicheren Schichten werden sie absorbiert, und

1) Soweit die Methode reicht, *ausschließlich* klein bei den Kanalstrahlen.

2) Es ist denkbar, daß die Bildung der bei den Röntgenstrahlen *auch* vorhandenen langsamen Sekundärstrahlen eine erste Dissoziation vorstellt und der Erscheinung bei Kanal- und Kathodenstrahlen analog ist. Die Bildung der schnellen Sekundärstrahlen wäre dann eine zweite Dissoziation, die zum zweiwertigen positiven Rest führt. Doch kann diese letztere Hypothese nur mit allem Vorbehalt geäußert werden, solange nicht weitere Versuche über die Geschwindigkeiten der Röntgensekundärstrahlen die Sachlage geklärt haben. Jedenfalls rührt die Inhomogenität der Röntgensekundärstrahlung vom tiefen Eindringen der Röntgenstrahlen her, indem die Sekundärstrahlen bei Durchdringen des Metalles große Geschwindigkeitsverluste erleiden.

um so leichter kommen die Sekundärstrahlen, die ja bei ihrer geringen Geschwindigkeit sehr absorbierbar sind, heraus. Die Konsequenzen dieser Auffassung stimmen mit den Tatsachen überein: Nur Aluminium zeigt eine starke Zunahme bei schiefer Stellung, weil hier die Kanalstrahlen merklich tiefer eindringen als beim Kupfer.

Dieses Verhalten wurde mit folgender Anordnung nachgewiesen: Wurde eine drehbare Platte *p*, welche die Kanalstrahlen auffing, durch ein Galvanometer abgeleitet, so floß im Falle des Aluminiums durch *p* bei schiefer Stellung ein positiver Strom zur Erde, der viel größer (oft über doppelt so groß) war, als derjenige bei senkrechtem Einfall der Kanalstrahlen; dabei war aber der einfallende Kanalstrahlenstrom in beiden Stellungen der gleiche, indem in beiden Fällen das ganze Bündel die Platte traf. *Die negative Sekundärstrahlung war also bei schiefem Einfall viel größer.* Bei Kupfer dagegen war die Zunahme der Strahlung durch schiefen Einfall nur schwach, sie betrug nur einige Prozent des gesamten abfließenden positiven Stromes. Ich teile hier einige Belege für dieses Verhalten mit:

	Winkel zwischen Einfallslot und Kanalstrahlenrichtung	Stromstärke in willkürlichen Einheiten
Aluminium	0°	58
	65°	134
Kupfer	0°	73
	65°	78

Die Sekundärstrahlung der Kathodenstrahlen aber wird überhaupt nur bei niedriger Spannung und schiefer Inzidenz so groß, daß vom Reflektor statt des negativen ein positiver Strom zur Erde fließt, und zwar ist um so geringere Schiefe nötig, je stärker das Metall Kathodenstrahlen absorbiert. Dies rührt nach der vorgetragenen Auffassung daher, daß die Kathodenstrahlen viel tiefer eindringen als Kanalstrahlen, und daher die Platte schief gestellt werden muß, damit sie so oberflächlich absorbiert werden, daß genug Sekundärstrahlen entweichen können.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 3. April 1907.)

9. *Die Aufzeichnung von akustischen Schwebungen*[1]*;* *von C. Déguisne.*

(Hierzu Taf. IV, Figg. 1, 2, 3 a, 3 b, 5, 6, 8, 10 a, 10 b, 11 u. 13.)

Will man die Schwingungszahlen zweier nahe beisammen liegender Töne mit Hilfe von Schwebungen miteinander vergleichen, so muß man sich im allgemeinen auf die Beobachtung der letzteren mit dem Ohr beschränken, wenn man nicht von komplizierten Einrichtungen mit Membranen, Königschen Flammen oder dergl. in Verbindung mit photographischen Aufnahmen Gebrauch machen will. Eine direkte Abzählung der Stöße mit dem Ohr erlaubt nur die Beobachtung von höchstens sechs bis acht Schwebungen in der Sekunde; bei Schwingungszahlen, die weiter auseinander liegen, versagt diese Methode. Vor kurzem ist nun von K. Marbe gezeigt worden, daß sich Schallschwingungen direkt und ohne Membran mit genügender Intensität auf Flammen übertragen und die so erzeugten Bewegungen der Flammen durch Rußbilder in einfacher Weise sich fixieren lassen. Durch solche Rußbilder können nun Schwebungen in weit größerer Häufigkeit in der Sekunde beobachtet und aufgezeichnet werden, wodurch eine bequeme Vergleichung von relativ weit auseinander liegenden Schwingungszahlen mit großer Genauigkeit ermöglicht ist. Andererseits sind solche Aufnahmen nicht auf das Schwingungsverhältnis 1 : 1 beschränkt, sondern auch bei anderen ganzzahligen Schwingungsverhältnissen leicht durchführbar. Durch andere Untersuchungen veranlaßt, habe ich eine Anzahl solcher Aufnahmen gemacht, die im nachstehenden beschrieben und wiedergegeben werden mögen.

Zu den Versuchen wurden Stimmgabeln benutzt, die durch Laufgewichte nach Wunsch verstimmt werden konnten. Zum Teil wurden die Gabeln elektrisch zum Schwingen gebracht,

1) Aus dem Psychologischen Institut der Akademie zu Frankfurt a/M.

indem die eine Zinke mit einem Selbstunterbrecher ausgestattet war, der im Stromkreis eines zwischen den Zinken sitzenden Elektromagneten lag; zum Teil wurden sie bloß angeschlagen und klangen aus.

Die von den beiden Gabeln ausgehenden Schallschwingungen wirkten auf eine und dieselbe Flamme. Es war dies nach K. Marbe (l. c.) eine vertikal brennende Acetylenflamme von ca. 30 mm Höhe, über deren stark rußenden Spitze ein Papierstreifen in horizontaler Richtung mit verschieden wählbarer Geschwindigkeit vorbeigeführt werden konnte. Die Übertragung der Schallschwingungen auf die Flamme erfolgte nach bereits an anderen Orten beschriebenen Methoden, entweder mit einem über der Breitseite der Gabeln befindlichen Blechzylinder [1]) oder indem die schwingenden Zinken der Gabeln in unmittelbare Nähe der Flamme gehalten wurden. [2]) Hierbei wurden die Rußringe am schärfsten erhalten, wenn die durch die Zinken gehende Ebene nicht senkrecht zur Achse der Flamme, sondern parallel zu ihr stand und die Achse der Gabel auf die Mündung des Gasbrenners wies.

Da die Geschwindigkeit des bewegten Papierstreifens nur $^1/_2$—$^3/_4$ m in der Sekunde betrug, konnte man mit Leichtigkeit die Schwebungen über mehrere Sekunden aufzeichnen und bequem abzählen, selbst wenn sie in weit größerer Anzahl pro Sekunde vorhanden waren, als dies bei Beobachtungen mit dem Ohr zulässig ist.

Zwei Schallwellen setzen sich zu einer resultierenden Welle zusammen, die durch die Resultierende von zwei Sinuskurven graphisch dargestellt werden kann, wenn die Schallschwingungen selbst sinusförmig verlaufen. Für die mit Stimmgabeln erzeugten Schwingungen trifft dies mit genügender Annäherung zu. Die Form der Resultierenden kommt nun im aufgenommenen Rußstreifen in der Weise zum Ausdruck, daß die in dem einen Sinne wirkenden Maxima scharfe Rußringe erzeugen, die im anderen Sinne wirkenden dagegen nicht. Die ersteren sollen im folgenden positive Maxima oder Maxima kurzweg genannt und in der graphischen Darstellung der

---

1) C. Déguisne u. K. Marbe, Physik. Zeitschr. 8. p. 200 ff. 1907.
2) K. Marbe, Physik. Zeitschr. 8. p. 92 ff. 1907.

Resultierenden in der Richtung der positiven Ordinatenachse gezeichnet werden.

Stehen die Schwingungszahlen der beiden Komponenten in einem einfachen Verhältnis, wie 1:1, 2:1, 3:2 etc., so hat die Resultierende eine relativ einfache und leicht übersichtliche Kurvenform. Diese ist von der gegenseitigen Phasenstellung der beiden Komponenten abhängig. Sie ändert sich nicht, wenn bei gleichbleibenden Amplituden die Phasenstellung unverändert bleibt. Dies ist der Fall, solange das Verhältnis der Schwingungszahlen den oben aufgezählten ganzzahligen Werten genau gleich ist. Ist es jedoch von den ganzzahligen Werten etwas verschieden, so ändert sich die Phasenstellung und damit die Kurvenform periodisch, und zwar kehrt die gleiche Phase dann wieder, wenn die eine Kurve gegenüber der anderen um den vollen Wert oder um einen Bruchteil ihrer Periode vor- oder nachgeeilt ist. Die periodische Wiederkehr der gleichen Phase gibt sich in der Wiederkehr der gleichen Kurvenform zu erkennen und läßt sich in den Rußstreifen sehr schön beobachten, wie an den auf Taf. IV wiedergegebenen Bildern nunmehr gezeigt werden soll.

Jedem Rußstreifen ist der Maßstab für die Zeit beigefügt. Dieser wurde durch eine zweite neben der ersten brennende Flamme aufgezeichnet, auf die ein mit Stromstößen von bekannten Intervallen beschicktes Telephon oder eine Stimmgabel von niedriger Schwingungszahl einwirkte.

Es muß hier noch betont werden, daß die Deutlichkeit der Ringe nicht nur durch die Wiedergabe im Druck, sondern vor allem dadurch eine Einbuße erleidet, daß die Rußbilder mit einer Schellacklösung fixiert werden müssen, wenn sie erhalten bleiben sollen.

Die Fig. 1, Taf. IV, wurde durch zwei Stimmgabeln von 258,5 und 250,0 Schwingungen aufgezeichnet. Man kann die Schwebungen an der abwechselnden Verstärkung und Schwächung der Ringe deutlich erkennen.

Unter „Schwebung“ soll im folgenden allgemein die Wiederkehr der *gleichen* gegenseitigen Phasenstellung der beiden Komponenten verstanden sein. Es sei z die Anzahl der auf die Sekunde entfallenden Schwebungen. Ist ferner die Schwingungszahl der einen Stimmgabel n und liegt das

Schwingungsverhältnis in der Nähe des ganzzahligen Wertes a, so ist die Schwingungszahl der anderen Gabel $an \pm z$ und das gesuchte Schwingungsverhältnis

$$\frac{an \pm z}{n} \quad \text{oder} \quad a \pm \frac{z}{n}.$$

Da die Zeitmarkierung sich mit großer Schärfe durchführen läßt, so ist die Genauigkeit von z nur bedingt durch den Fehler, dem die Festlegung der Grenze zwischen zwei Schwebungen unterliegt. Es sei p derjenige Bruchteil des Abstandes zweier Schwebungen, um den die Abgrenzung der gezählten Schwebungen am Anfang und am Ende des Streifens unsicher ist. Ist t die Anzahl der aufgeschriebenen Sekunden, so ist zt die Gesamtzahl der beobachteten Schwebungen, und der relative Fehler bei der Bestimmung von z ist im ungünstigsten Falle $\pm 2p/zt$. Als Verhältnis der Schwingungszahlen wird dann gefunden

$$a \pm \frac{z}{n}\left(1 \pm \frac{2p}{zt}\right) = a \pm \frac{z}{n} \pm \frac{2p}{n.t},$$

wobei $\pm 2p/n.t$ der größte mögliche absolute Fehler bei der Bestimmung des Schwingungsverhältnisses ist. In dem Original unserer Fig. 1, Taf. IV, ist p ca. 0,1, $n = 250$, t war ca. 10 Sek. Demnach ist der größte Wert des möglichen Fehlers

$$\pm \frac{0{,}2}{2500} = \pm 0{,}01 \text{ Proz.}$$

Die Schwebungen können sich auch durch periodisch auftretende Verbreiterungen des Rußstreifens bemerkbar machen, wie dies in Fig. 2, Taf. IV, der Fall ist. Diese ist aus 300,0 und 254,6 Schwingungen erhalten. Trotz der relativ hohen Anzahl von 45,4 Schwebungen pro Sekunde ist auch hier die Abzählung der Schwebungen ebenso sicher und die Genauigkeit in der Bestimmung des Schwingungsverhältnisses die gleiche wie oben.

Die Anzahl der Schwebungen während einer längeren Zeitdauer kann natürlich in derselben bequemeren Weise bestimmt werden, wie dies bei der Messung der Schwingungsdauer von Pendeln, Magnetnadeln üblich und z. B. von Kohlrausch [1]) beschrieben ist.

---

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik. 10. Aufl. p. 115. 1905.

Verhalten sich die Schwingungszahlen nahe wie 2 : 1, so erhält man ein Rußbild, von dem in Fig. 3, Taf. IV, zwei charakteristische Stellen wiedergegeben sind. Die aus den entsprechenden Sinuskurven graphisch konstruierte Resultierende zeigt, wie aus den Figg. 4a und 4b zu ersehen ist,

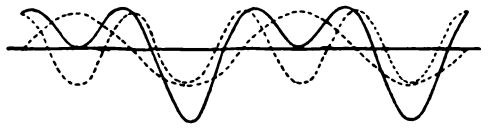


Fig. 4a.

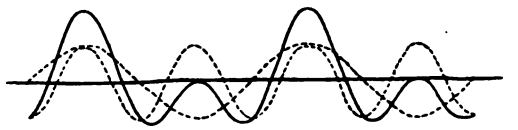


Fig. 4b.

Figg. 4a und 4b: Schwingungsverhältnis 2 : 1.

je nach der gegenseitigen Phasenstellung der beiden Komponenten bald gleiche, bald verschiedene Maximalwerte. Dem ersteren Falle entspricht das Rußbild 3a, dem zweiten das Bild 3b. Die Größe der Maximalwerte macht sich dabei durch größere oder geringere Höhe der Ringe kenntlich. Jeder Wiederkehr der gleichen Konfiguration im Rußbild entspricht eine Vor- bez. Nacheilung der höheren Schwingungszahl um eine volle Schwingung. In Fig. 3 entfallen 0,77 Voreilungen auf die Sekunde. Die eine Gabel hatte 100 Schwingungen, demnach die andere, die etwas verstimmt worden war, 49,61 Schwingungen.

Die Figg. 5 und 6, Taf. IV, sind in der Weise erhalten worden, daß ein Wechselstrom von ca. 45 Perioden durch ein Telephon geschickt wurde; über dessen Membran stand die Beobachtungsflamme, die gleichzeitig von den Schallwellen einer Stimmgabel von 49,6 Schwingungen in Fig. 5 und von 100 Schwingungen in Fig. 6 beeinflußt wurde. Die Schwebungen, die hier besonders stark ausgeprägt sind, lassen aus Fig. 5 eine Periodenzahl von 44,4, aus Fig. 6 eine solche von 44,1 errechnen. Der Unterschied zwischen beiden Werten ist

nicht etwa durch Fehler der Beobachtung, sondern durch Schwankungen der Periodenzahl verursacht.

Kombiniert man zwei Schallwellen mit dem Schwingungsverhältnis 3 : 1, so erhält man eine Resultierende, die die in Figg. 7 a und 7 b aufgezeichneten Formen annimmt. Bei der einen Phasenstellung, Fig. 7 a, folgen sich die Maximalwerte in Gruppen von je dreien, nämlich ein hoher von zwei kleineren benachbart, bei der anderen, Fig. 7 b, in Gruppen von zwei gleich hohen abwechselnd mit einem einzelnen erheblich

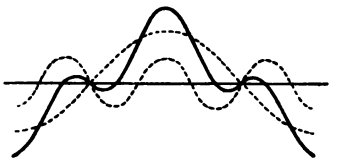


Fig. 7 a.

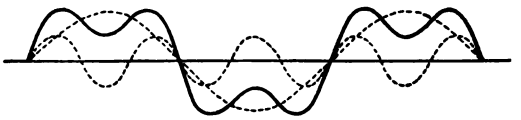


Fig. 7 b.

Figg. 7 a und 7 b: Schwingungsverhältnis 3 : 1.

kleineren Maximum. Den Figg. 7 a und 7 b entsprechen in dem mit Gabeln von ca. 300 und 100 Schwingungen erhaltenen Rußbild der Fig. 8, Taf. IV, die Stellen *A* und *B* (linke Hälfte der Ringe!), wenn man berücksichtigt, daß hier die Größe der Maxima durch die Stärke der Ringe zum Ausdruck kommt. Es entfallen hier 2,7 Schwebungen auf die Sekunde.

Die Frage, welche der beiden Gabeln in ihren Schwingungen zurückbleibt, läßt sich bei diesem Bilde aus der Verschiebung des schwach gezeichneten Rußringes, der von der Gabel mit 300 Schwingungen herrührt, gegenüber den anderen Ringen entscheiden. Dieser wandert etwas schneller als die starken, von der Gabel mit 100 Schwingungen gezeichneten Ringe. Es folgt daraus, daß die Gabel von 300 Schwingungen etwas größere Wellenlängen, also etwas kleinere Schwingungszahl lieferte, als dem genauen Schwingungsverhältnis 3 : 1 ent-

sprechen würde. Das Schwingungsverhältnis der Gabeln ist demnach 297,3 : 100,0.

Mindestens ebenso charakteristisch ist das Bild, das man mit dem Schwingungsverhältnis 3 : 2 erhält. Die Figg. 9 a und 9 b geben die Kurven in verschiedenen Phasen nebst den

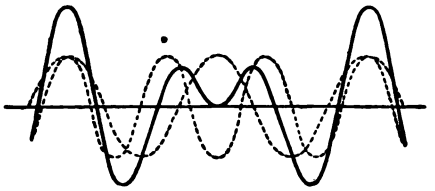


Fig. 9 a.

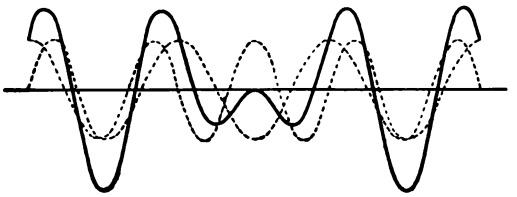


Fig. 9 b.

Figg. 9 a und 9 b: Schwingungsverhältnis 3 : 2.

jeweiligen Resultierenden und die Figg. 10 a und 10 b, Taf. IV, die Rußbilder zweier Gabeln von nominell 300 und 200 Schwingungen. In Fig. 9 a sind die spitzen, stark hervortretenden Maxima durch je zwei erheblich kleinere Maxima getrennt. Dieselbe Reihenfolge zeigen die Rußringe in Fig. 10 a. In Fig. 10 b dagegen ist je ein Paar stärkerer Rußringe durch einen schwachen getrennt, ebenso wie in Fig. 9 b zwei stärkere Maximalwerte mit einem schwächeren abwechseln. Figg. 10 a und 10 b zeigen 0,83 Schwebungen pro Sekunde. In Fig. 11, Taf. IV, jedoch sieht man die paarweise auftretenden Ringe mit den Einzelringen in rascherer Folge abwechseln. Es sind hier 20,0 Schwebungen in der Sekunde vorhanden. Auch hier läßt sich aus dem Rußbild entscheiden, welche Schwingung beispielsweise nacheilt. Geht man von einem Paar gleich starker Ringe aus in einer Richtung, z. B. nach rechts, so findet man bei den folgenden Paaren, daß der linke Ring allmählich stärker wird. Es folgt daraus, daß die Gabel mit

200 Schwingungen zu große Wellenlängen, also zu kleine Schwingungszahl besitzt. Tatsächlich war auch die Gabel mit 200 Schwingungen durch ein auf die Zinke geschobenes Laufgewicht ziemlich stark verstimmt worden. Das Schwingungsverhältnis war danach 300,0 : 186,7.

Zum Schluß sei noch ein Schwingungsverhältnis besprochen, bei dem die Schwebungen mit dem Ohr wohl kaum abgezählt werden können, selbst wenn sie genügend langsam aufeinanderfolgen. Es ist das Schwingungsverhältnis 5 : 2. Dieses Verhältnis könnte zwar als Verhältnis 2 : 1 oder 3 : 1 durch Ab-

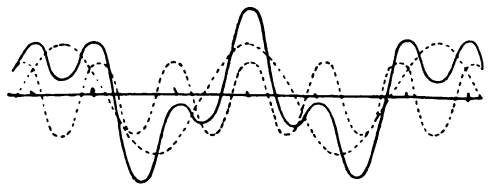


Fig. 12a.

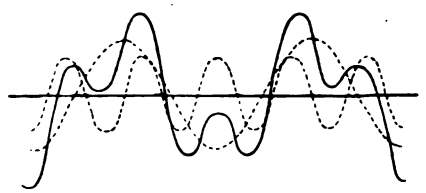


Fig. 12b.

Figg. 12a und 12b: Schwingungsverhältnis 5 : 2.

zählen der Schwebungen ausgewertet werden. Da aber hierbei auf jede zweite Schwingung des unteren Tones schon eine Schwebung entfällt, würde die Abzählung der letzteren leicht zu Unsicherheiten und Fehlern führen. Genauer wird das Resultat, wenn man die dem Verhältnis 5 : 2 eigene Resultierende zugrunde legt. Diese ist in Figg. 12a und 12b bei zwei um eine viertel Periode verschiedenen Phasenstellungen der kürzeren Welle gezeichnet. Das entsprechende Rußbild Fig. 13, Taf. IV, wurde mit zwei Gabeln von ca. 250 und 100 Schwingungen erhalten. Ein Vergleich der beiden Figuren läßt an den mit *A* bezeichneten Stellen den starken, zwischen zwei schwächeren liegenden Maximalwert, entsprechend Fig. 12a,

und bei den Punkten *B*, der Fig. 12 b entsprechend, das schwache Maximum in der Mitte zwischen zwei Paaren von stärkeren Maximalwerten wiederfinden. Es wurden 12,8 Schwebungen pro Sekunde abgezählt. In ähnlicher Weise wie früher kann gefolgert werden, daß die kleinere Gabel voreilt. Da hier jeder Schwebung eine Verschiebung um eine *halbe* Schwingung entspricht, so ist das Schwingungsverhältnis der beiden Gabeln 256,4 : 100,0.

Es ist im vorhergehenden gezeigt worden, wie mit Hilfe der Marbeschen Rußmethode Schwebungen von Stimmgabeln fixiert und bequem abgezählt werden können. Die Anzahl der auf die Sekunde entfallenden Schwebungen darf dabei 50 und mehr erreichen. Solange die Schwingungszahl des tieferen Tones das Vier- bis Fünffache der Anzahl der Schwebungen beträgt, kann die Abzählung der letzteren mit genügender Sicherheit erfolgen. Nicht nur das Verhältnis 1 : 1, sondern auch Schwingungszahlen mit den Verhältnissen 2 : 1, 3 : 1, 3 : 2, 5 : 2 lassen sich miteinander vergleichen. Andere Verhältnisse können auf diese zurückgeführt und durch Abzählung der Schwebungen bestimmt werden. So ist es möglich, mit einer Stimmgabel von z. B. 100 Schwingungen sämtliche Schwingungszahlen zwischen 30 und 300 ohne weiteres zu messen. Die Periodenzahlen von Wechselströmen lassen sich in gleicher Weise bestimmen. Es ist wahrscheinlich, daß die beschriebene Methode sich auch auf Töne, die mit Zungen, Pfeifen, Sirenen etc. erzeugt werden, anwenden läßt.

Die oben wiedergegebenen Rußbilder sind im Psychologischen Institut der Akademie zu Frankfurt a. M. aufgenommen worden, wo mir Prof. Marbe seine Apparate und Institutseinrichtungen in entgegenkommendster Weise zur Verfügung stellte. Ich möchte ihm dafür auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 10. April 1907.)

10. *Versuche über Entstehung von Nebel bei Wasserdampf und einigen anderen Dämpfen;* *von Erich Barkow.*

(Aus der Marburger Dissertation vom 4. März 1906.)[1])

R. v. Helmholtz[2]) hat eine Formel für die Spannung von Dämpfen über beliebig stark gekrümmten Oberflächen hergeleitet, aus welcher er durch vereinfachende Annahmen zu der von Sir Will. Thomson[3]) für schwache Krümmung abgeleiteten Formel gelangt. Umgekehrt kann man auch die Thomsonsche Schlußweise, in prinzipiell derselben Weise, wie die barometrische Höhenmeßformel, so erweitern, daß man zu der R. v. Helmholtzschen Formel gelangt, wie in meiner Inauguraldissertation p. 8 entwickelt ist.

Aus dieser Formel ist bekanntlich zu ersehen, daß sehr kleine Tropfen äußerst schwer entstehen werden. Notwendig ist daher die Anwesenheit von Kernen, um die sich der Dampf in Tropfenform kondensieren kann. Als solche Kerne können zunächst Staubteilchen und Ionen dienen.

Nach J. J. Thomsons[4]) Rechnung muß jedes Ion in einer mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre einen Wassertropfen um sich bilden, dessen Radius außerordentlich schnell bis zur Gleichgewichtsgröße $r = 1 : (3{,}2 \cdot 10^7)$ cm wächst, wenn man als Ladung ein Elementarquantum und die Kapillarkonstante $T = 76$ setzt. Dem Gewichte eines Tröpfchens dieser Größe

1) Kurze Berichte von F. Richarz in den Marburger Sitz.-Ber. vom Juli 1905. p. 92 und vom 11. Juli 1906. p. 123.

2) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 27. p. 508—43. 1886; vgl. auch H. v. Helmholtz, Vorl. 6. p. 334.

3) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 42. p. 448. 1871; vgl. auch H. v. Helmholtz, Vorl. 6. p. 336.

4) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen. Deutsch von E. Marx. Teubner, 1906. p. 150. Dort sind auch die anderen Literaturangaben zu finden.

entsprechen, wie sich leicht ergibt, nur 10 Wasserdampfmoleküle. Man kann also wohl mit gleichem Rechte diese Gebilde als Wassertröpfchen oder als Molionen ansehen. Solche Tröpfchen sind natürlich unsichtbar. Wenn aber dann hinreichende Übersättigung erzeugt wird, können sie wachsen bis zur Bildung sichtbaren Nebels. Nach C. T. R. Wilson kondensiert sich das Wasser leichter, bei geringerer Übersättigung, an negativen Ionentröpfchen, als an positiven, während nach K. Przibram (vgl. diese Abh. p. 343) bei anderen Dämpfen das Umgekehrte eintreten kann.

In den bisherigen Untersuchungen sind die Unterschiede im optischen Verhalten der Nebel nicht genügend beachtet worden. Bei meinen experimentellen Untersuchungen achtete ich daher besonders darauf, ob der Nebel nach der J. Kiesslingschen Definition [1]) homogen war und infolgedessen dann farbenprächtige Beugungsringe in durchfallendem Lichte zeigte. Außerdem aber ergab sich als von besonderer Wichtigkeit die Erscheinungsform eines äußerst feinen blauen Nebels, der völlig verschieden ist von dichtem inhomogenem und homogenem Nebel, zu diesen letzteren Formen aber führen kann.

I. Versuchsanordnung.

Zur Untersuchung der Nebelbildung wandte ich die Entspannungsmethode an. Das Nebelgefäß (Fig. 1) bestand aus einer Glaskugel A, die durch einen Gummistopfen mit drei Durchbohrungen verschlossen war. Die Entspannung wurde hervorgerufen durch Verbindung mit einem evakuierten Gefäß V. Das etwa 1 cm weite Verbindungsrohr zwischen V und A trug einen Metallhahn H_1 mit weiter Bohrung. Der Druck in A wurde an dem Quecksilbermanometer M_1 abgelesen. Das Gefäß V, das die verdünnte Luft enthielt, war eine Kugelflasche aus Glas von 40 cm Durchmesser; der Grad der Luftverdünnung konnte an dem Metallvakuummeter M_2 abgelesen werden. V stand durch R mit einem großen luftverdünnten Raum, bestehend aus fünf Kugelflaschen von 30 cm Durchmesser, in Verbindung. In diesem wurde die Luft durch eine

1) J. Kiessling, Die Dämmerungsersch. im Jahre 1883 und ihre physik. Erkl. L. Voss, Hamburg 1885 u. 1888; Pogg. Lex. 4. p. 746.

Luftpumpe verdünnt. Diese komplizierte Einrichtung wurde getroffen, um eine längere Versuchsreihe unter denselben Bedingungen ausführen zu können, ohne für Erneuerung der Luftverdünnung Sorge tragen zu müssen.

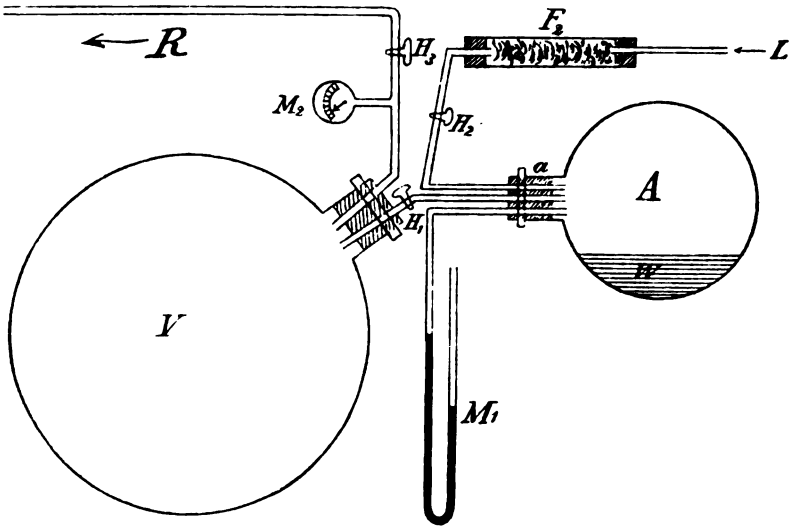


Fig. 1.

Nachdem die Luft aus dem Vakuumreservoir R ausgepumpt war, konnte durch einfache Öffnung des Hahnes H_3 das Gefäß V bis auf den gewünschten Druck gebracht werden. Dann wurde H_3 geschlossen und H_1 geöffnet, bei geschlossenem H_2. Dadurch wurde der Druck in A vermindert. Durch Probieren ließ sich leicht herausfinden, wie groß der Druck in V sein mußte, um in A die gewünschte Entspannung zu erhalten. In V wurde dann durch Öffnung von H_3 wieder der vor dem Versuch herrschende Druck hergestellt. Die aus A abgesaugte Luft wurde nach einem Versuch durch Luft ersetzt, die durch das Wattefilter F_2 gegangen war. Bei allen folgenden Versuchen war es von größter Wichtigkeit, daß die Luft in A vollkommen gesättigt war. Wenn die Versuche schnell hintereinander gemacht wurden, genügte dazu nicht, daß sich in A eine Wassermenge W befand. Es wurde daher folgende Einrichtung getroffen.

In einer größeren Kochflasche wurde Wasser zum Sieden gebracht. Die von L her angesogene Luft mischte sich mit dem heißen Wasserdampfe. Das Gemisch strömte weiter in eine Woulffsche Flasche, wo sich ein großer Teil des kondensierten Wassers absetzen konnte, durch ein Glaswollefilter in eine zweite Woulffsche Flasche, in der sich der Rest des kondensierten Wassers sammelte, und schließlich durch L und das Wattefilter F_2 (Fig. 1) in das Nebelgefäß A. Auf ihrem langen Wege hatte sich die heiß gesättigte Luft wieder auf Zimmertemperatur abgekühlt und war nun natürlich erst recht vollkommen mit Wasserdampf gesättigt. Das Filter F_2 bestand aus einem 35 cm langen, 3 cm weiten Glasrohr, das auf beiden Seiten mit durchbohrten Gummistopfen verschlossen und mit Watte dicht vollgestopft war. Um die Wirksamkeit dieses Filters zu prüfen, saugte ich durch dasselbe Flammengase von einem Bunsenbrenner in das Nebelgefäß, ohne eine Spur verstärkter Nebelbildung erkennen zu können, obwohl bei einem Versuche sogar die erste Watteschicht Feuer fing. Da Flammengase sonst bekanntlich sehr kräftig auf die Nebelbildung einwirken, so ergab sich, daß das Filter jede Spur von Kondensationskernen wegfing.

Bei geringen Entspannungen bis ca. 15 cm Quecksilber — entsprechend einem Expansionsverhältnis von 1,25 — zeigen sich nur vereinzelte Tropfen, die nach C. T. R. Wilson keine Ionentropfen sind. Werden die Entspannungen etwas größer als 15 cm, so zeigen sich zahlreichere Tropfen zunächst durch Kondensation an den negativen, dann auch an den positiven Ionen. Bei sehr starken Entspannungen auch staub- und ionenfreier Luft treten dichte Nebel auf. Diese starken Nebel bilden sich nach C. T. R. Wilson bei 21 cm Entspannung — entsprechend 1,38 Expansionsverhältnis —, während C. Barus erst bei 26 cm diese starke Vermehrung der Tropfenzahl beobachtete. Ich selbst konnte stets oberhalb 21 cm Druckerniedrigung diesen dichteren Nebel konstatieren, aber keine weitere Steigerung bei 26 cm. Auch die außerordentliche Steigerung der Nebeldichte und damit (da bei größerer Anzahl die einzelnen Tröpfchen kleiner sind) den weit größerer Wert des Radius der Beugungsringe, wie sie C. T. R. Wilson beschreibt, habe ich nie wahrnehmen können. Selbst bei Druck-

differenzen von 40 cm und mehr trat bei mir nie ein so dichter Nebel auf, daß das zentrale Feld gefärbt gewesen wäre.[1]) Es mag dies seine Ursache darin gehabt haben, daß Wilson sehr kleine Gefäße benutzte. In solchen ist eine außerordentlich schnelle Entspannung möglich. Dabei können sehr viele Kerne ergriffen werden, während bei langsameren Entspannungen, wie in meinen größeren Gefäßen, die größeren der vorhandenen Kerne rasch wachsen und die kleineren nicht mehr aufkommen lassen, so daß also der resultierende Nebel geringere Dichtigkeit hat. Der Nachteil der kleinen Gefäße ist aber der, daß die Wände schnell zu Niederschlag der entstehenden Kondensation und Verschwinden der Kerne, besonders der Ionen, Gelegenheit geben. Bei den großen (etwa 20 cm Durchmesser) Gefäßen, wie ich sie verwandte, ist der Einfluß der Wände zu vernachlässigen. Der Nachteil der langsameren Entspannungen wird aufgehoben durch die Möglichkeit, sekundäre Erscheinungen zu verfolgen, die sich in kleinen Gefäßen nicht ausbilden können. Meine Untersuchungen erstreckten sich nicht so sehr auf die primäre Ionenkondensation, als vielmehr auf diese sekundären Erscheinungen. Daher waren für mich die großen Gefäße nur von Vorteil.

II. Versuche über die Entstehung und die Art des Nebels in Wasserdampf.

1. Einwirkung eines elektrischen Wechselfeldes.

Den Anlaß zu diesen Versuchen gab eine Bemerkung von Lummer[2]), wonach ein „elektrischer Nebel" nicht homogen sei und also auch keine Beugungsringe zeige. Bei der näheren Untersuchung dieser Frage fand ich[3]), daß zwar bei der ersten

1) Bei den Beugungsfarben in homogenem Nebel lassen sich drei Teile unterscheiden:

I. Die Färbung der Lichtquelle selbst, die aber erst bei sehr dicker Nebelschicht sichtbar wird.

II. Das zentrale Feld, d. h. die Färbung der Umgebung der Lichtquelle bis zum ersten Beugungsringe, das zentrale Feld ist bei größeren Tropfen > 9—$10\,\mu$ weiß, bei kleineren Tropfen farbig.

III. Die Beugungsringe selbst.

2) O. Lummer, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 6. p. 142. 1904.

3) J. Kiessling und E. Barkow, Marburger Sitzungsber. 1904. Nr. 6; Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 7. Nr. 1 u. 2. 1905.

Entspannung der Nebel nicht homogen war, wohl aber bei den folgenden.

Das oben beschriebene Nebelgefäß ruhte auf einer großen Hartgummiplatte zwischen zwei vertikal stehenden Metallplatten. Zur Erzeugung des Wechselfeldes wurden sie mit den Polen eines Induktoriums verbunden. Der Abstand der Platten betrug 21 cm, die Schlagweite des Induktors 12 cm. Als Unterbrecher diente zuerst ein Quecksilberunterbrecher und später ein Wehneltunterbrecher, der in späterer Zeit immer benutzt wurde, weil seine Wirkung in derselben Zeit intensiver war. Prinzipiell dieselbe Anordnung wurde übrigens schon von Robert v. Helmholtz und F. Richarz[1]) bei den Untersuchungen über den Dampfstrahl angewandt, ebenso später auch von Barus.

Nach dem Ingangsetzen des Induktoriums gehen zwischen den Platten und den ihnen zunächst liegenden Teilen des Nebelgefäßes zahlreiche Lichtbüschel über. Im Innern des Beobachtungsgefäßes selbst sind keine Lichterscheinungen wahrnehmbar.

Nachdem die Luft auf diese Weise etwa 10 Sek. elektrisiert worden war, wurde eine Entspannung vorgenommen. Der entstandene Nebel ist irisierend, d. h. wenn man durch ihn gegen eine entfernte Lichtquelle sieht, so tritt ein einige Zeit anhaltender, schneller Wechsel zwischen hauptsächlich roten und grünen Farbentönen ein. Dabei ist der Nebel in stark wirbelnder Bewegung. Allmählich hören die Wirbel und damit auch das Irisieren auf, und es zeigt sich nur die Lichtquelle von einem braunroten Ring umgeben. Diese Erscheinung zeigt deutlich, daß nur in kleinen Partien des Nebels die Tropfen gleiche Größe haben, und jede von diesen zeigt eine besondere Farbe; durch die wirbelnde Bewegung werden sie abwechselnd in die Sehrichtung gebracht und rufen so das Irisieren hervor. Dieser inhomogene Nebel setzte sich verhältnismäßig schnell.

Es blieb aber, nachdem dieser Nebel verschwunden war, noch ein feiner blauer Nebel übrig, der nur in dem Lichtkegel einer Bogenlampe bei sonst verdunkeltem Zimmer sichtbar war. Der blaue Nebel trat hin und wieder auch ohne

1) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. 40. p. 175 ff. 1890.

jegliche Entspannung auf, besonders dann, wenn die Elektrisierung sehr stark war. Er verschwand auch dann nicht, wenn nach der Entspannung wieder filtrierte Luft zuströmte, und dadurch adiabatische Erwärmung stattfand. Ebenso senkte er sich nicht merklich und war noch sehr lange nach seinem Entstehen vorhanden. Er besteht aus außerordentlich kleinen Tröpfchen, wie man aus seiner geringen Fallgeschwindigkeit, seiner blauen Farbe und aus dem Fehlen von Beugungserscheinungen erkennt; seiner Dichtigkeit nach zu urteilen, müßte er Beugungserscheinungen zeigen, da viel weniger dichte Nebel sie sonst hervorbringen. Auf seine Entstehungsart und seine wahrscheinliche Zusammensetzung werde ich noch zu sprechen kommen.

Jedenfalls hängt mit seiner Bildung die Stärke des nachher bei der Entspannung entstehenden Nebels zusammen; denn wenn vorher der blaue Nebel deutlich zu sehen war, so ist auch der Entspannungsnebel stark, im anderen Falle ist er kaum oder gar nicht wahrnehmbar. Vermutlich ist immer etwas Ähnliches vorhanden, denn sonst läßt sich die Entstehung von Nebel bei geringen Entspannungen unter 15 cm schwer erklären. Nach den Untersuchungen C. T. R. Wilsons und anderer tritt die Kondensation an negativen bez. positiven Ionen nur bei Entspannungen größer als 15 cm bez. 21 cm auf; außerdem nimmt die Kondensationsfähigkeit der Ionen sehr schnell mit der Zeit ab, einige Sekunden genügen schon, sie inaktiv zu machen. Hier jedoch halten sich die Kondensationskerne viele Stunden. Also können es nicht die Ionen in eigentlichem Sinne sein, die hier die Kondensation hervorrufen, sondern höchstens ein sekundäres Erzeugnis der Ionisation. Dafür spricht ferner die Tatsache, daß die Zahl der Kerne auch noch nach dem Aufhören der Elektrisierung einige Sekunden lang zunimmt, während die Ionenzahl rapide abnimmt, wie Rutherford durch Leitfähigkeitsuntersuchungen gezeigt hat. Wenn ich nämlich sofort nach dem Aufhören des Elektrisierens entspannte, so war der entstehende Nebel schwach, wartete ich aber einige Sekunden, so nahm die Dichte des Nebels und die Zahl der Entspannungen, die nötig war, um die Kondensationskerne zu beseitigen, beträchtlich zu und nahm schließlich einen maximalen Wert an. Ganz allmählich

nahm dann die Kernzahl ab, öfter waren aber noch nach etwa 15 Stunden eine größere Anzahl Kerne vorhanden, so daß noch ziemlich kräftiger Nebel auftrat. Um von der erzeugten Kernzahl einen Begriff zu geben, sei angeführt, daß in einem Falle 22 Entspannungen von 7—8 cm nötig waren, um sie sämtlich zu entfernen. Wenn daher auch zweifellos im Wechselfeld Ionen entstehen, wie ich in meiner Dissertation p. 22, 23 des näheren auseinandergesetzt habe, so können diese Ionen doch primär nicht die Kerne der *vorbeschriebenen* Kondensation sein. Bei *stärkeren* Expansionen unmittelbar nach Wirkung des Wechselfeldes werden natürlich auch Ionen primär als Kondensationskerne dienen.

Ist der erste inhomogene Nebel verschwunden, so wird wieder staubfreie Luft zugelassen und von neuem entspannt. Der dann entstehende Nebel ist meistens homogen und zeigt prächtige Beugungsbilder. Ist auch dieser gesunken, so zeigt sich wieder der permanente blaue Nebel, wenn auch schwächer. Die folgenden Entspannungen zeigen im allgemeinen dieselben Erscheinungen, nur sind die Beugungsringe anders gefärbt und kleiner (vgl. weiter unten p. 336), der blaue Nebel zeigt immer abnehmende Intensität und ist zuletzt nicht mehr wahrnehmbar. Schließlich ist der Normalzustand erreicht und das Nebelgefäß zu einem neuen Versuch vorbereitet.

2. Einwirkung von Röntgenstrahlen.

Die Wirkung von Röntgenstrahlen auf die Kondensation des Wasserdampfes stellte zuerst F. Richarz[1]) fest. Weitere Untersuchungen liegen vor von C. T. R. Wilson, J. J. Thomson und Barus.

Meine eigenen Versuche über diesen Gegenstand ergaben folgendes: Zwischen dem Nebelgefäß aus Glas und der Röntgenröhre befand sich ein zur Erde abgeleiteter Aluminiumschirm. Das Induktorium hatte eine Schlagweite von etwa 15 cm. Erfolg hatte ich erst bei einer für Wehneltbetrieb konstruierten Röntgenröhre mit verstärkter Antikathode; ich beanspruchte sie bis zur Grenze ihrer Leistungsfähigkeit. Hierdurch gelang

1) F. Richarz, Mitteil. d. Naturw. Ver. Greifswald 1896; Wied. Ann. 59. p. 592—594. 1896.

es mir, schon nach einer halben Minute Strahlungsdauer einen kräftigen Nebel zu erhalten, der deutlich sichtbare, auch objektiv darstellbare Beugungsringe zeigte. Die Größe der Entspannung betrug etwa 8 cm, war also weit geringer als bei Wilson. Ja, dieser sagt sogar ausdrücklich, selbst sehr starke Strahlung beeinflusse nur die Tropfenzahl aber nicht die Größe der Entspannung. Das war also bei meinen Versuchen anders.

Da es sehr unwahrscheinlich ist, daß die Art der Ionen von der Stärke der Strahlung abhängig ist, so sind auch die bei diesen Versuchen wirksamen Kondensationskerne vermutlich nicht Ionen, sondern, entsprechend dem blauen Nebel im vorigen Abschnitt, etwas, das sekundär durch die Ionen entsteht. Der einzige Unterschied würde der sein, daß dort der blaue Nebel sichtbar ist, während hier ein solcher nicht sichtbar ist. Wenn das Wechselfeld so kurze Zeit wirkt, daß der Nebel nur dem bei Röntgenstrahlen entstehenden an Dichte gleich ist, so ist auch dort der blaue Nebel noch nicht sichtbar.

Auch hier ist der bei der *ersten* Entspannung entstehende Nebel nicht ganz homogen.

3. Wirkung von ultraviolettem Licht.

Daß ultraviolettes Licht die Nebelbildung in Wasserdampf begünstige, fanden zuerst Lenard und Wolf.[1]) Sie schrieben aber diese Wirkung einer durch das ultraviolette Licht hervorgerufenen Zerstäubung des Quarzfensters zu, das sie zwischen Lichtquelle und Dampfstrahl bez. Nebelgefäß eingeschaltet hatten. R. v. Helmholtz und F. Richarz bestritten diese Ansicht[2]), führten als Grund für die Verstärkung der Kondensation die Ionisation der Luft an und zeigten, daß durch ultraviolettes Licht Ozonpapier in Luft gebläut wird. Durch viele Untersuchungen wurde dargetan, daß ultraviolettes Licht wirklich die Luft ionisiere, unter anderen von Lenard selbst und C. T. R. Wilson, welche auch die Kondensationswirkung genau verfolgten.

Die wirksamste Quelle ultravioletter Strahlen ist wohl die Quecksilberbogenlampe aus Quarzglas.

---

1) P. Lenard u. M. Wolf, Wied. Ann. **37**. p. 443—456. 1889.
2) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. **40**. p. 187. 1890.

Das Nebelgefäß A (Fig. 1) wurde durch eine dreifach tubulierte Glaskugel A_1 wie in Fig. 2, p. 328, ersetzt; a entspricht dem a in Fig. 1; b wurde im vorliegenden Falle nicht gebraucht und war durch einen Gummistopfen verschlossen; c war durch eine mit Siegellack aufgekittete Quarzlinse Q bedeckt. Die Quecksilberbogenlampe war etwa 15 cm von Q entfernt.

Zuerst wurde A_1 in der bekannten Art und Weise staubfrei gemacht und dann ultraviolett bestrahlt. Bei der Entspannung entstand ein außerordentlich dichter, nicht homogener Nebel. Der bei weiteren Entspannungen auftretende Nebel ist homogen und zeigt prächtige Beugungsfarben. Dauert die Belichtung einige Minuten, so entsteht schon ohne Expansion ein dichter, fein bläulich glänzender Nebel, der bei starker Beleuchtung sichtbar ist. Im durchgehenden Lichte waren bei diesem bläulichen Nebel keine Beugungserscheinungen zu sehen; die Tröpfchen sind also wohl zu klein dazu, vielleicht kleiner als Lichtwellen; denn mangelnde Zahl der Tröpfchen kann nicht Ursache des Ausbleibens der Beugungsfarben sein, vielmehr ist die Dichtigkeit bedeutend größer als bei vielen Nebeln, die Beugungsringe hervorrufen, wie der Augenschein zeigt. Der blaue Nebel ist geschichtet. Im allgemeinen sind die etwa 1 mm breiten Schichten senkrecht zu den ultravioletten Strahlen angeordnet. Diese auch schon von C. T. R. Wilson und J. H. Vincent beobachtete Erscheinung wäre noch genauer zu untersuchen, um ihre Entstehung erklären zu können. Der blaue Nebel, der hier entsteht, hat dasselbe Aussehen und wahrscheinlich auch dieselbe Entstehungsursache wie der blaue Nebel, der durch das Wechselfeld entsteht.

Auch hier ist die notwendige Entspannungsgröße so gering, daß man nicht Ionen als primäre Kondensationskerne annehmen kann, sondern sekundär durch Ionen gebildete Produkte.

4. Einwirkung elektrischer Spitzenentladung.

Die erste Beobachtung über die Wirkung der Spitzenentladung auf die Kondensation des Wasserdampfes machte R. v. Helmholtz.[1]) Weiter untersucht wurde diese Erschei-

1) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32. p. 1—19. 1887; Verh. d. Physik. Gesellsch. Berlin 1886. p. 20—21; Naturw. Rundschau 1. p. 69—71. 1886.

nung besonders von R. v. Helmholtz und F. Richarz[1]), Lemme[2]) und Rebenstorff.[3]) Schon R. v. Helmholtz und F. Richarz hatten nachgewiesen, daß die Wirkung nicht herrühre von Staub oder Metallteilchen, die von der Spitze abgeschleudert würden, sondern daß es sich nur um die Wirkung von Ionen handeln könne. Ferner zeigten sie, daß das wirksame Agens eine gewisse, wenn auch kurze Zeit sein Kondensationsvermögen beibehalte.

C. T. R. Wilsons Untersuchungen hatten folgendes Ergebnis. Wird eine Entspannung vorgenommen, während die Spitzenausströmung noch fortdauert, so ist die für Ionen charakteristische Entspannungsgröße erforderlich, um Nebelbildung hervorzubringen. Wird dagegen erst entspannt, wenn die Spitzenentladung etwas vorher aufgehört hat, so ist die zur Nebelbildung notwendige Druckverminderung viel geringer. Es bilden sich also neue, anders geartete Kerne nach Aufhören der Spitzenentladung.

Meine eigenen Untersuchungen ergaben folgendes. Der Nebel bei der ersten Entspannung war nicht homogen, und erst bei weiteren Entspannungen traten kräftige Beugungsbilder auf. Die notwendige Größe der Entspannung war sehr gering, und die Kondensationskerne waren noch nach mehreren Stunden vorhanden. Dies würde auch wieder ein Beweis dafür sein, daß es nicht primär die Ionen sind, die die Nebelbildung hervorrufen.

Einen blauen Nebel, wie er bei dem Wechselfeld und dem ultravioletten Licht auftritt, konnte ich kaum bemerken. Vermutlich rührt es daher, daß er an seiner Ansammlung durch den elektrischen Wind verhindert wird, der ihn gegen die Wände wirft. Indessen läßt sich wohl die Beobachtung von Lemme, daß im Nebelgefäß ein feiner Nebel übrig bleibt, wenn sich der dichte Nebel gesetzt hat, mit dem blauen Nebel in Zusammenhang bringen.

---

1) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. **40.** p. 161 bis 203. 1890.

2) W. Lemme, Dissertation Greifswald 1901; Mitt. d. Naturw. Ver. Greifswald **33.** 1901.

3) H. Rebenstorff, Physik. Zeitschr. **5.** p. 571—574. 1904; Naturw. Rundschau **19.** p. 629. 1904.

5. Einwirkung des elektrischen Funkens.

Die Anregung zu diesen Versuchen gab eine am Vierwaldstättersee gemachte Beobachtung von Joh. Kiessling,[1]) die er folgendermaßen beschreibt. „Unmittelbar nachdem aus einer auf dem Uri-Rotstock lagernden, nach unten hin scharf begrenzten Gewitterwolke ein sehr hell leuchtender Blitz fast senkrecht zum Seeniveau sich entladen hatte, konnte ein genau der Blitzbahn entsprechender, schmaler grauer Regenstreifen beobachtet werden, der 8—10 Sek. lang sich sehr deutlich von den dunkelviolett erscheinenden Felswänden abhob."

Es handelte sich bei den Versuchen darum, diese Erscheinung experimentell nachzumachen und die Bedingungen ihres Auftretens genauer zu untersuchen.

Als Versuchsgefäß diente eine Glaskugel, wie sie Fig. 2 zeigt. Der Tubulus *a* ist mit der Entspannungsvorrichtung, die Fig. 1

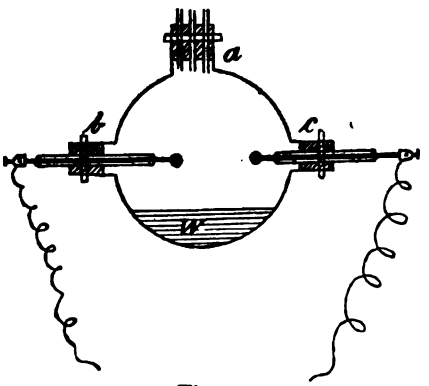


Fig. 2.

zeigt, verbunden. Durch *b* und *c* führen durch Gummistopfen und Glasröhren gut isoliert zwei Drähte, die im Beobachtungsgefäß in 2 cm großen Messingkugeln endigen. Die Kugeln sind mit feinem Musselin oder Fließpapier umhüllt, die mit Wasser getränkt waren, um jegliche Zerstäubung des Metalls auszuschließen. Die beiden Drähte wurden mit den Polen eines Induktoriums von etwa 16 cm Schlagweite verbunden. Der selbsttätige Unterbrecher wurde ausgeschaltet; statt dessen

1) Joh. Kiessling, Marburger Sitzungsber. 1904. Nr. 7.

wurde der Primärstrom durch einen Quecksilberkontakt geschlossen und geöffnet.

Ließ ich dann ohne weiteres einen 10 cm langen Funken in staubfreier Luft zwischen den Kugeln übergehen, so trat keine sichtbare Nebelbildung auf. Das Nebelgefäß wurde durch Bogenlicht hell beleuchtet, so daß jede Spur von Nebel zu erkennen gewesen wäre. Wurde die Luft nachträglich entspannt, so zeigte es sich, daß Kondensationskerne vorhanden waren. Der Nebel war nicht homogen.

Folgender Versuch aber hatte sofortigen Erfolg. Die wieder kernfreie Luft wurde einer so kleinen Entspannung — etwa 4—5 cm Quecksilber — unterworfen, daß dadurch kein Nebel entstehen konnte; gleichzeitig damit ließ ich einen Funken übergehen. Es zeigte sich dann zwischen den Elektroden ein Büschel von feinen Nebelstreifen, die 1—2 Sek. lang sichtbar blieben, bis der durch die Funkenwärme erzeugte Luftstrom sie zerriß. Daß der Nebelstreifen nicht einfach war, wie bei der Kiesslingschen Gewitterbeobachtung, erklärt sich leicht daraus, daß auch der Funke nicht einfach war, sondern neben dem glänzenden Hauptfunken bläuliche, schwache Nebenfunken zwischen den Elektroden übergingen, wie auch durch direkte Beobachtung des Funkens im Dunkeln zu erkennen war. Für die Nebelbildung wirken sowohl Haupt- als Nebenfunken. Die Kernbildung durch den Funken ist so kräftig, daß in den Nebelstreifen sich nicht an jedem Kern ein Tropfen bilden kann, wie die Entstehung von Nebel bei weiteren Entspannungen zeigt.

Daß die Funkengase auf die Kondensation einwirken, ist schon längere Zeit bekannt. Der Dampfstrahl zuckt jedesmal auf, wenn ein Funke durch ihn schlägt. Einen ähnlichen Versuch wie den oben beschriebenen, haben, veranlaßt durch eine Bemerkung von W. v. Bezold, Elster und Geitel[1]) gemacht. Sie hatten im wesentlichen dieselbe Versuchsanordnung, nur war die Funkenlänge so klein, daß sie keine Einzelheiten daran erkennen konnten. Sie wollten durch ihren Versuch auch nur zeigen, daß Luft mit Wasserdampf übersättigt sein,

1) J. Elster u. H. Geitel, Meteorol. Zeitschr. 12. p. 187—188. 1895; Beibl. 19. p. 874. 1895.

und daß die Kondensation aus Übersättigung durch elektrische Vorgänge ausgelöst werden könne. W. v. Bezold hatte nämlich, um einige Erscheinungen bei Gewittern, z. B. die sogenannten Gewitternasen erklären zu können, die Existenz von übersättigtem Wasserdampf auch in der freien Atmosphäre angenommen. Übrigens hatten für Laboratoriumsbedingungen schon R. v. Helmholtz[1]) und F. Richarz[2]) das Bestehen eines solchen labilen Zustandes der Übersättigung und dessen Auslösung durch elektrische Kräfte aus dem Verhalten des Dampfstrahles geschlossen.

Die von Kiessling beobachtete Erscheinung tritt nur dann auf, wenn die staubfreie Luft mit Wasserdampf übersättigt ist und wird außerdem gut sichtbar nur, wenn ein günstiger Hintergrund vorhanden ist, von dem sich der Nebelstreifen deutlich abheben kann. Diese Bedingungen können in der Natur erfüllt sein, wenn durch vorübergehenden Regen der Staub niedergeschlagen ist und die so gereinigte Luft aufsteigt und sich dabei adiabatisch abkühlt. Daß die Luft an Regentagen arm an Staub ist, ist bekannt. Und damit hängt auch die hohe Durchsichtigkeit der Luft an solchen Tagen zusammen.

6. Wirkung von radioaktiven Substanzen.

Da die von den radioaktiven Substanzen ausgehenden Strahlen die Luft zu ionisieren vermögen, so war zu erwarten, daß sie auch die Kondensation von Wasserdampf beeinflussen würden. Hierher gehörende Versuche machten z. B. mit dem Dampfstrahl Lemme[3]) und Schaum.[4]) Wie schon Schaum bei seinen Untersuchungen über den Dampfstrahl bemerkte, ist die Kondensationswirkung sehr schwach, viel schwächer, als man nach der entladenden Fähigkeit erwarten sollte.

Auch meine Versuche im Nebelgefäß ergaben, daß die Verstärkung des Nebels sehr schwach, ja kaum bemerkbar

1) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 27. p. 512. 1886; 32. p. 11. 1887.

2) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. 40. p. 164, Zeile 5 v. o. 1890; p. 182, Zeile 10 v. u.

3) W. Lemme, Dissertation Greifswald 1901.

4) K. Schaum, Marburger Sitzungsber. 1902. Nr. 8; Zeitschr. f. wissensch. Photographie 3. p. 239—241. 1905.

war. Untersucht wurden Radiumbromid (in geschlossener Kapsel, so daß es sich nur um β- und γ-Strahlen handelte), ein Polonium enthaltender Stab und eine Platte mit Radiotellur. Die Substanzen wurden in das Nebelgefäß gebracht und dann die Luft entspannt. Auch ließ ich das Präparat mehrere Tage im Nebelgefäß und entspannte dann, ohne besseren Erfolg. Auch wenn ich feuchte Luft eine Woche und länger in abgeschlossenen Gefäßen der Strahlung aussetzte und diese Luft in das Nebelgefäß saugte, erhielt ich keine anderen Resultate.

In diesen Fällen ist also offenbar der Dampfstrahl empfindlicher.

7. Versuche mit Ozon.

Wie man sieht, ist die bloße Anwesenheit von Ionen in einem Gase nicht genügend, um so starke Kondensation des Wasserdampfes wie in den Fällen 1, 3, 4, 5 hervorzubringen, sondern es kommt dabei wesentlich auf die Art der Ionen oder auf sekundäre Wirkungen von ihnen an; denn sonst müßten z. B. radioaktive Substanzen kräftiger auf die Nebelbildung einwirken. Es liegt nahe, unter den sekundären Wirkungen an die Ozonbildung zu denken, die bei Spitzenausströmung und Funkenbildung auftritt. Hierbei spielt nach Warburgs Untersuchungen[1]) das ultraviolette Licht, das bei der stillen Entladung auftritt, eine Rolle, wenn auch wohl nicht die primäre.[2]) Unter den angewandten Versuchsbedingungen erzeugt die Quecksilberbogenlampe am meisten Ozon und auch die stärkste Nebelbildung. Es ist bei den oben beschriebenen Versuchen ein Parallelismus zwischen Ozonentstehung und der Stärke der Nebelbildung vorhanden.

Aus diesen Gründen wurden direkt Versuche mit Ozon angestellt. Diese Versuche sind noch nicht abgeschlossen. Ich will daher vorläufig nur folgendes mitteilen. Der blaue Nebel tritt auch bei der Einwirkung fertigen Ozons sehr

---

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1903. p. 1011—1015.

2) Vgl. F. Richarz, Marburger Sitzungsber. Nr. 7 p. 47—53. Juli 1903; K. Klüpfel, Dissertation Marburg 1903. p. 41; Ann. d. Physik **16.** p. 578. 1905.

und daß die Kondensation aus Über- … stoff durch einige Vorgänge ausgelöst werden … und überläßt dann lich, um einige Ers… im Dunkeln, so sind nannten Gew… vorhanden. Starke Beübersättigt… es Licht sein — erhöht angenomm… Durch meine Versuche schon R… hierbei irgendwelche eines a… letzte Reste nur sehr schwer Auslös… sind, eine wesentliche Rolle Dam… diese Vermutung durch Versuche von … im Marburger physikalischen Institut … meine Untersuchungen fortzuführen. Je … den benutzten Sauerstoff von Stickstoff, … den ozonisierten Sauerstoff von seinen Verdurch Stickoxyde befreit, um so mehr nimmt mit zunehmender Reinheit des Ozons die Nebeldichte ab.

b. Untersuchung von Sauerstoff-Stickstoffverbindungen.

Von Wichtigkeit ist es unter diesen Umständen, die Wirksamkeit einiger fertiger Stickoxyde zu untersuchen.

In bezug auf den Dampfstrahl ist dies bereits von R. v. Helmholtz und F. Richarz geschehen; sie fanden, daß die Dämpfe von rauchender Salpetersäure (NO_3H mit N_2O_5) sehr kräftig, sowie die nitrosen Gase NO_2 und N_2O_4 stark wirkten. Folgendes sind die mit meiner Versuchsanordnung gewonnenen Resultate.

Ich löste Natriumnitrit in Wasser; diese Lösung zeigte keine Wirkung. Führte ich Schwefelsäure zu, so entwickelten sich die rotbraunen Dämpfe. Der Nebel, der bei einer Entspannung entstand, war dichter als normal durch die spontane Ionisation der Luft, aber nicht besonders stark. Um besser die Verhältnisse überblicken zu können, entwickelte ich die braunen Dämpfe von Stickstoffdi- bez. -tetroxyd nicht im Nebelgefäß selbst, sondern gesondert in einer Kugelflasche. Von dort konnten sie dann leicht in das Nebelgefäß gebracht werden. Zuerst wurde eine Anzahl Entspannungen vorgenommen, die starke Nebel gaben, bis eine braune Färbung im Nebelgefäß kaum noch wahrzunehmen war. Reste von NO_2 bez. N_2O_4 werden aber doch noch vorhanden gewesen sein.

Es war anzunehmen, daß die Nebeldichte wachsen würde, wenn den Nebelkernen Zeit bliebe, sich anzusammeln. Dies zeigte sich in der Tat. Der Nebel ist nicht homogen; es treten immer Tropfen von zweierlei Größe auf. Da verschiedene große Tropfen auch verschieden schnell fallen, so kann man die beiden Tropfenarten nacheinander beobachten. Die kleineren Tropfen zeigen etwa doppelt so große Beugungsringe wie die größeren.

Wird das Nebelgefäß mit Bogenlicht fortgesetzt belichtet, so werden die zuerst wenigen Tröpfchen immer zahlreicher. Bei einer Entspannung ist der jetzt entstehende Nebel außerordentlich dicht und nicht homogen. Er zeigt oft irisierende Färbungen. Zu dieser starken Vermehrung des Nebels ist übrigens nur äußerst wenig N_2O_4 notwendig. Bei einem Versuche hatte ich das Nebelgefäß mit dicken rotbraunen N_2O_4-Dämpfen gefüllt. Ich nahm dann im Dunkeln eine Anzahl Entspannungen vor von etwa $^1/_3$ Atmosphäre und größer. Die abgesaugte Luft wurde natürlich jedesmal durch filtrierte Luft ersetzt. Nachdem ich dies 24mal wiederholt hatte, belichtete ich 5 Min. und entspannte wieder. Der entstehende Nebel war äußerst dicht. Nach fünf Exhaustionen sind die Kerne wieder beseitigt. Ich belichtete wieder 5 Min. und fand wieder sehr dichten Nebel. Dies wiederholte ich noch oft. Nach der 65. Entspannung belichtete ich 5 Min. und fand einen Nebel, dessen Dichtigkeit kaum geringer war als bei früheren Belichtungen. Ich überließ dann das Gas etwa 20 Stunden sich selbst am Fenster, also dem Tageslicht ausgesetzt. Durch einige Expansionen wurden die Kerne beseitigt und das Gas wieder 5 Min. dem Bogenlicht ausgesetzt. Bei einer Entspannung trat sehr dichter Nebel auf, wenn auch seine Dichte geringer war als am vorhergehenden Tage. Damit wurde dieser Versuch abgebrochen. Wenn man jede Entspannung zu $^1/_3$ Atmosphäre annimmt, so wären zuletzt nur noch etwa $(^2/_3)^{70}$ des ursprünglichen N_2O_4 vorhanden, und diese äußerst geringe Menge genügte, um bei Belichtung noch kräftige Wirkung zu geben.

Die zur Nebelbildung notwendige Entspannung braucht übrigens nicht so groß zu sein, wie bei dem obigen Versuch; es genügen vielmehr schon ganz geringe Expansionen.

Wir haben hier eine weitgehende Analogie zu der Wirkung des Ozons mit Spuren von Stickstoff oder nitrosen Gasen. Hier wie dort haben wir eine spontane Kernbildung, sowie bei starker Belichtung eine Vermehrung der Kernzahl. Zu letzterem ist nur eine sehr geringe anfängliche N_2O_4- bez. O_3-Menge (mit Stickstoff oder nitrosen Gasen verunreinigt) nötig.

9. Untersuchung von Wasserstoffsuperoxyd.

Eine andere Verbindung, die sich in dem Luft- bez. Sauerstoff–Ozon–Wasserdampfgemisch unter Umständen bilden könnte, ist das Wasserstoffsuperoxyd. Es ist deshalb erforderlich, auch dieses zu untersuchen. Es ergab sich, daß sich selbst überlassen Wasserstoffsuperoxyd die Nebelbildung nicht vermehrt. Für das Dampfstrahlphänomen haben bereits R. v. Helmholtz und F. Richarz[1]) dasselbe Resultat erhalten. Aitken fand, daß durch Sonnenlicht zersetzter H_2O_2-Dampf recht kräftige Nebelbildung bei der Entspannung hervorrief, und die entstandenen Kerne langen Bestand hatten. Diesen Versuch konnte ich bestätigen. Es wirkt aber nur sehr intensives Licht, wie Sonnenlicht, in diesem Sinn. Um ultraviolettes Licht handelt es sich hierbei nicht; denn die Strahlen mußten die Wände des Glasballons passieren. Mit der elektrischen Bogenlampe konnte ich keinen Nebel erhalten. Ob diese Belichtung des H_2O_2-Dampfes durch Sonnenlicht auch elektrische Leitfähigkeit hervorruft, wäre noch zu untersuchen.[2])

III. Erklärung der verschiedenen Formen des Nebels.

1. Homogener und inhomogener Nebel.

Wir haben einen Nebel nach der Kiesslingschen Definition „homogen" genannt, wenn alle Tropfen so weit von derselben Größe sind, daß sie farbige Beugungsringe erkennen lassen. In den vorhergehenden Versuchen zeigte sich stets, daß sehr starke Nebel, wie sie bei der ersten Entspannung nach kräftigen Einwirkungen auftraten, auch inhomogen waren. Dies erklärt sich folgendermaßen.

---

1) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. 40. p. 161 bis 203. 1890.

2) Vgl. auch d'Arcy, Phil. Mag. (6) 3. p. 42—52. 1902.

Ob ein Nebel homogen wird, hängt, wie man sofort sieht, davon ab, ob die Kondensationskerne gleichartig und gleichmäßig verteilt sind, so daß der Bereich, aus dem sie den Wasserdampf an sich reißen, für jeden gleich groß ist. Wenn wenig Kerne vorhanden sind, so werden die Tropfen verhältnismäßig groß, weil ihr Kondensationsbereich groß ist. Kleine Unterschiede des letzteren haben dann hierbei wenig Einfluß auf die Tropfengröße. Bei größerer Zahl der Kerne werden erstens die einzelnen Tropfen kleiner werden, zweitens werden sie nicht mehr alle gleich groß werden, da hier die Verteilung, die doch nie ganz regelmäßig ist, einen bedeutend größeren relativen Einfluß auf den Kondensationsbereich hat und damit auch auf den Tropfenradius. Der so entstandene Unterschied in der Tropfengröße wird seinen Einfluß auf das Beugungsbild dahin äußern, daß die von den einzelnen Tropfen erzeugten Beugungsbilder nicht mehr genau aufeinander fallen. Die Folge ist, daß das Beugungsbild an Schärfe verliert, seine Farbenreinheit beträchtlich abnimmt und äußersten Falles gänzlich verschwindet. Solche Nebel sind inhomogen. Wir sehen also, daß auf diese Weise zu erklären ist, weshalb gerade sehr starke Nebel auch inhomogen sind.

Eine Zwischenstufe sind die im vorhergehenden als „irisierende" bezeichneten Nebel, die in kleinen Gebieten Färbungen zeigen, aber keine Ringe. Bei ihnen kann man annehmen, daß in kleinen Gebieten die annähernd gleichen Ursachen eine annähernd gleiche Verteilung der Kerne, damit homogene Nebel und wenigstens schwache Beugungsfarben hin und wieder erzeugen. Da sich diese gefärbten Wolken infolge von Luftströmungen bewegen, entsteht der Eindruck des Irisierens.

Bei einem dichten nicht homogenen Nebel wird durch erstmalige Expansion, die eventuell wiederholt werden muß, eine große Zahl der Kerne in den sich setzenden Tröpfchen niedergeschlagen. Für folgende Kondensationen ist eine geringere, aber immer noch erhebliche Anzahl von Kernen übrig geblieben, oder nachträglich wieder neu gebildet worden (letzteres mehrfach bei den vorhergehenden Versuchen). Nach den obigen Überlegungen ist daher bei den folgenden Kondensationen Homogenität des Nebels zu erwarten und in der Tat, wie beschrieben, gefunden. Zuerst sind dann die Tröpfchen,

wegen ihrer immer noch großen Zahl, relativ klein und geben daher weite Beugungsringe mit prächtigen Färbungen. Bei den folgenden Expansionen sind die noch übrig gebliebenen Kerne immer weniger zahlreich, die an ihnen niedergeschlagenen Tröpfchen wegen des größeren ihnen zur Verfügung stehenden Kondensationsbereiches größer, die Beugungsringe immer kleiner und weniger intensiv, alles wie beobachtet (vgl. z. B. oben p. 324).

2. Erklärungsmöglichkeiten der Entstehung des blauen Nebels.

Ein ohne Expansion sichtbarer blauer Nebel entsteht bei Einwirkung eines Wechselfeldes, von ultraviolettem Licht und von Ozon bei Gegenwart von Stickstoff oder von nitrosen Gasen. Er ist nicht identisch mit den Ionentröpfchen, die an und für sich unsichtbar sind und erst bei 4—8facher Übersättigung wachsen, sondern muß etwas anderes sein, da er spontan in gesättigtem, ja in ungesättigtem Wasserdampf entsteht. Daß indessen die Ionentröpfchen bei seiner Entstehung einen Anteil haben, ist denkbar. Die eine Erklärungsmöglichkeit seiner Entstehung wäre die folgende.

Wie schon auseinandergesetzt, bildet jedes Ion ein Wassertröpfchen um sich, dessen Radius $r = 1 : (3{,}2 \cdot 10^7)$ cm ist. Die ungleichnamig geladenen ziehen sich gegenseitig an. Im einfachsten Fall können ein positives und ein negatives Ionentröpfchen sich nähern und schließlich miteinander verschmelzen.[1]) Es werden dann weiterhin auch Vereinigungen von einer größeren Anzahl zustande kommen. Der mittlere Tropfenradius wird einen Wert haben, der einem Gleichgewichtszustand entspricht und von der Stärke der Ionisation und der Menge des vorhandenen Wasserdampfes abhängen wird; denn je mehr Ionentröpfchen vorhanden sind, desto größere Komplexe von ihnen werden sich dann bilden können. Diese so entstandenen Tropfen sind elektrisch neutral und werden infolgedessen leichter verdampfen. Wir werden also in dem sich selbst überlassenen Dampf eine große Anzahl feiner Wassertropfen bekommen, deren meiste kleiner als jene Grenze

1) Vgl. F. Richarz, Zur Erklärung neutraler Tropfen; Marburger Sitzungsber. 1905. Nr. 3.

sind, weil sie nach der gegenseitigen Neutralisierung wieder verdampfen. Sollen dagegen weiterhin diese Tropfen durch Übersättigung bei einer Entspannung wachsen, so muß diese sehr groß sein, wahrscheinlich größer als bei Ionentröpfchen; denn ihnen fehlt die elektrische Ladung, die die Dampfspannung herabsetzt, und dies wird nicht aufgehoben durch den größeren Tropfenradius. Solche kleine Tropfen, die ungeladen sind und etwa 8fache Übersättigung zum Wachstum erfordern, hat C. T. R. Wilson und Barus tatsächlich gefunden. Wenn die erste Ionisation sehr stark ist, so könnte die mittlere Größe der ursprünglichen, durch Vereinigung von Ionentröpfchen entstehenden neutralen Tropfen größer werden und vielleicht die Tropfengröße des blauen Nebels erreichen. Diese Tropfen können aber nicht stabil sein, da sie aus reinem Wasser bestehen, ungeladen sind, und infolge ihrer größeren Dampfspannung rasch wieder verdampfen würden. Zur Erklärung der Permanenz des blauen Nebels muß daher eine andere Erklärung herangezogen werden.

Bei kräftiger Ionisation werden nicht alle Atomionen Gelegenheit haben, sich mit einer Wasserhülle zu umgeben, sondern sie werden sich, wenn verschiedene Gase vorhanden sind, möglicherweise zu irgendwelchen chemischen Verbindungen vereinigen. Diese können sich dann in den Wassertröpfchen lösen und so deren Dampfspannung vermindern, so daß sie weiter wachsen können, unter günstigen Bedingungen, bis sie im Bereich der Sichtbarkeit liegen. Wenn die Tropfengröße von der Größe der Lichtwellen des blauen Lichtes ist, so werden wir einen blau erscheinenden feinen Nebel sehen, wie er oben beschrieben ist. Begünstigt wird dieser Vorgang, wenn sich chemische Verbindungen besonders leicht bilden können. Dieser Fall wird z. B. eintreten, wenn Sauerstoff ionisiert wird. Haben wir freie Sauerstoffionen, so wird ein Teil von ihnen zur Ozonbildung beitragen, ein anderer kann chemische Verbindungen eingehen. Daß Sauerstoff bei der Bildung des blauen Nebels eine wesentliche Rolle spielt, geht daraus hervor, daß er z. B. in reinem Wasserstoff nicht entsteht, wie C. T. R. Wilson und Vincent gezeigt haben. Auch in reinem Wasserdampf, in Abwesenheit von anderen Gasen, tritt der blaue Nebel nicht auf. Ebenso bilden sich bei

Spitzenentladung in Wasserstoff keine Kerne, die bei *geringen* Expansionen wachsen können. Dagegen war in allen oben beschriebenen Beobachtungen des blauen Nebels Luft oder Sauerstoff vorhanden.

Die Tröpfchen des blauen Nebels werden zu ihrem Entstehen aus den primären Ionen Zeit gebrauchen. Im Einklang hiermit steht die Erscheinung, die ich bei der Nebelbildung durch Wechselfeldwirkung beobachtete (vgl. oben p. 323).

Von den elektrischen Eigenschaften der Tröpfchen des blauen Nebels wird sich folgendes vermuten lassen. Ein großer Teil wird ungeladen sein, ein anderer positiv oder negativ. Die Zahl der geladenen Tropfen wird nach dem Abstellen des Ionisators rasch abnehmen. Dies sind alles Erscheinungen, wie sie Vincent tatsächlich gefunden hat.

3. Versuche und Erörterungen über die Zusammensetzung des blauen Nebels.

Nach obigem muß in den Tropfen des blauen Nebels eine Substanz gelöst sein, die sie stabil macht. Jede Substanz, die den Dampfdruck genügend herabsetzt, auch ein gelöstes Gas, leistet das Verlangte. In unseren Fällen können diese Stoffe Stickoxyde oder Wasserstoffsuperoxyd sein. C. T. R. Wilson vermutete als gelöste Substanz das Wasserstoffsuperoxyd. Vincent glaubte diese Auffassung als unhaltbar nachgewiesen zu haben. Er leitete nämlich die mit dem blauen Nebel geschwängerte Luft in einen Messingkasten, der eine photographische Platte enthielt. Bei der Entwickelung zeigte sich keine Spur von Wirkung auf der Platte, während H_2O_2 recht kräftig die photographische Platte schwärzt. Ozon war vorhanden, wie die Bläuung von Jodkaliumstärke bewies. Dieser Versuch ist jedoch nicht einwandfrei; denn wie K. Schaum und W. Braun[1]) nachgewiesen haben, gibt H_2O_2 Solarisation (Umkehr), kann also scheinbar unwirksam sein; und die Wirkung von O_3 auf die photographische Platte hängt von der Plattensorte ab.

---

1) K. Schaum u. W. Braun, Physik. Zeitschr. 6. p. 73—74. 1905; Marburger Sitzungsber. Jan. 1905.

Ich versuchte nun, auf eine andere Art zu kontrollieren, ob H_2O_2 in den Tröpfchen vorhanden sei. Löst man etwas Titandioxyd in verdünnter Schwefelsäure und setzt eine Spur von H_2O_2 zu, so tritt eine kräftige Gelbfärbung der Lösung auf. Diese Reaktion ist außerordentlich empfindlich.[1]) Die Versuchsanordnung war die folgende: Durch den Tubulus *b* (Fig. 2) führte eine Glasröhre mit einem Wattefilter, durch das die atmosphärische Luft eintrat. Der Tubulus *a* war durch einen Gummistopfen verschlossen; durch seine Bohrung führte eine Glasröhre sofort in eine Waschflasche, die Titanschwefelsäure enthielt. Durch dieses System wurde mit Hilfe einer Wasserstrahlluftpumpe die Luft langsam hindurchgesaugt. Die Luftmenge wurde an einer Gasuhr gemessen. Der Luftstrom wurde durch ein mit Watte dicht gestopftes, enges Glasrohr hindurchgesaugt und dadurch so verlangsamt, daß stündlich nur 10—15 Liter Luft hindurchgingen.

Durch genügend langes Stehen wurde die Luft staubfrei. Dann wurde sie durch ein Quarzfenster *Q*, das den Tubulus *c* verschloß, mit der Quecksilberbogenlampe bestrahlt, so daß sich der spontane blaue Nebel kräftig entwickeln konnte. Dann wurde bei fortdauernder Strahlung die Luft hindurchgeleitet, öfter auch die Lampe aus äußeren Gründen für einige Minuten ausgeschaltet und wieder eingeschaltet etc. Bei einem Versuch dauerte die Gesamtstrahlungszeit 305 Min., und die durch geleitete Luft betrug 134 Liter.

Um die Reaktion möglichst empfindlich zu machen, füllte ich ein hohes, schmales Reagensglas mit Titandioxydlösung; dann brauchte ich nur wenige ccm Lösung, während die durchperlte Schicht doch ziemlich hoch war. Das Reagens zeigte keine bemerkbare Gelbfärbung. Die zur Erklärung des blauen Nebels in seinem Tröpfchen anzunehmende Substanz scheint also nicht H_2O_2 zu sein.

Dagegen halte ich es nach den oben auf p. 332 bis 334 angeführten Versuchen und Überlegungen für höchstwahrscheinlich, daß jene Substanz eine Stickstoff—Sauerstoffver-

---

1) F. Richarz u. K. Lonnes, Zeitschr. f. physik. Chemie **20.** p. 147. 1896; W. Staedel, Zeitschr. f. angew. Chemie **15.** p. 642. 1902.

bindung ist. Die Wirksamkeit des O_3 tritt immer nur ein, wenn Anwesenheit von Stickstoff, bez. Stickoxyden nicht völlig ausgeschlossen ist. Von den nitrosen Gasen zeigte ich oben, daß sie spontan Kerne bilden, die bei sehr geringer Expansion starke, dichte Nebelbildung hervorrufen. Von rauchender Salpetersäure haben bereits R. v. Helmholtz und F. Richarz mit dem Dampfstrahl nachgewiesen, daß sie kräftige Kondensation hervorruft. Das dampfförmige Anhydrid N_2O_5 wird in der Tat kräftig hygroskopisch sein, wie auch schon R. v. Helmholtz für die minimalen Mengen von SO_4H_2-Dämpfen nachwies, die in einem Luftstrom enthalten sind, der über Schwefelsäure gestrichen ist. Alle Beobachtungen würden sich also vollkommen erklären lassen, wenn niedere Oxydationsstufen des Stickstoffs als Grund der schwächeren Kondensation angesehen werden; durch Ozon oder Belichtung erzeugte höhere und noch stärker hygroskopische Oxyde als Ursache der sehr starken Kondensation. Wie erwähnt, wird dies von Hrn. Pringal weiter untersucht.

IV. Untersuchung von anderen Dämpfen und Gasen.

1. Benzol im Wasserstoff.

Bei allen bisherigen Versuchen war Sauerstoff vorhanden. Wie wir gesehen haben, spielt er bei der Nebelbildung eine große Rolle. Deshalb war es interessant, sauerstofffreie Gase und Dämpfe zu untersuchen.

Ich nahm Benzoldämpfe in Wasserstoff. Die Versuchsanordnung war dieselbe wie früher. Der Wasserstoff wurde einer Stahlbombe entnommen; er passierte zuerst eine Woulffsche Flasche mit Kaliumpermanganat, um etwa vorhandene organische Stoffe zu entfernen, dann eine Waschflasche mit Kalilauge, um Kohlensäure zu beseitigen, dann zwei Waschflaschen mit Pyrogallussäure zur Absorption des Sauerstoffs, und zwecks Trocknung eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure, ein U-Rohr mit Chlorcalcium und zwei U-Röhren mit Phosphorpentoxyd. Im Nebelgefäß befand sich am Boden eine Schicht reinen Benzols. Zuerst machte ich eine größere Anzahl von Entspannungen, um die im Nebelgefäß noch vorhandene Luft zu entfernen. Es zeigte sich, daß man in Benzoldämpfen

nur sehr schwer Nebel erhalten kann. Es entstehen nur sehr wenige große Tropfen, die wegen ihrer geringen Anzahl keine Beugungsfarben zeigen. Erst bei sehr starken Entspannungen (etwa 40 cm Quecksilbersäule) zeigt sich ein etwas stärkerer Nebel, der kleine Beugungsringe erkennen läßt.

Ließ ich das elektrische Wechselfeld wie p. 322 längere Zeit, bis 11 Min., einwirken, so ergab sich keine verstärkte Nebelbildung. Auch Röntgenstrahlen wirkten nicht auf die Kondensation ein. Ebensowenig Erfolg hatte eine 15 Min. lange Bestrahlung mit ultraviolettem Licht der Quecksilberbogenlampe durch die Quarzlinse Q, Fig. 2 (an Stelle des Tubulus c). Benzol in Wasserstoff vermag sich also nicht an Ionen zu kondensieren; denn daß Ionen in Wasserstoff z. B. durch Röntgenstrahlen entstehen, ist ja nachgewiesen.

2. Schwefelkohlenstoff in Wasserstoff.

Weitere Versuche ähnlicher Art machte ich mit reinem Schwefelkohlenstoff in einer Wasserstoffatmosphäre.

Es zeigte sich, daß die Versuche nur im Dunkeln angestellt werden dürfen, da sich im Lichte zahlreiche Kondensationskerne bilden. Das zur Beobachtung der Beugungsringe dienende, 4,5 m entfernte Gasglühlicht ist zu schwach, um erhebliche Mengen von Kernen liefern zu können. Bogenlicht wirkt sehr stark ein. Schon eine Belichtungsdauer von etwa 15 Sek. genügt, um soviel Kerne zu erzeugen, daß sieben Entspannungen von etwa 28 cm Quecksilber nötig sind, sie wieder zu entfernen. Die Kerne ordnen sich so an, daß die größten sich unten im Gefäß befinden und die kleineren im oberen Teile. Bei kleinen Entspannungen bildet sich deshalb auch nur im untersten Teil des Gefäßes eine dünne Nebelschicht aus, und erst bei stärkeren Expansionen wird der ganze Raum mit Nebel erfüllt. Aus diesem Grunde wurden auch die Entspannungen so groß gewählt. Die wirksamen Strahlen sind hier die sichtbaren Lichtstrahlen; denn das Bogenlicht geht zuerst durch die dicken Kondensorlinsen, durch das Kühlwasser und durch die Wand des Nebelgefäßes, und hierbei werden die ultravioletten sowie die ultraroten Strahlen absorbiert. Entsprechende Versuche mit der Quecksilberbogenlampe zeigten dasselbe, denn eine zwischen das Quarzfenster

des Nebelgefäßes und die Lichtquelle geschaltete Glasscheibe, die die für Luft und Wasserdampf wirksamen Strahlen abschneidet, schwächt hier die Wirkung nur sehr wenig.

Die von Schaum[1]) gefundene Wirkung des Schwefelkohlenstoffs auf den Dampfstrahl ist nach diesen Versuchen wahrscheinlich nicht bloß eine rein thermische, sondern auch wesentlich beeinflußt durch die Zersetzung des Schwefelkohlenstoffs im Licht.

Röntgenstrahlen wirken hier kräftig auf die Nebelbildung ein. Nach einer 10 Min. langen Strahlung gehörten zehn Entspannungen von ca. 28 cm dazu, sämtliche Kerne wieder zu beseitigen.

Auffallend ist, daß das elektrische Wechselfeld hier keine Wirkung ausübt, selbst nach 10 Min. langer Dauer. Bemerkenswert ist, daß zwischen den mit dem Induktorium verbundenen Platten und den nächstgelegenen Kugelkalotten des Nebelgefäßes keine Entladungen übergehen, wie es bei den früheren Versuchen mit Luft und Wasser der Fall war (p. 322). Wahrscheinlich wurde bei jenen die dünne Wasserschicht, die das Nebelgefäß innen bedeckt, influenziert, und deswegen entstehen zwischen Platten und Nebelgefäß so starke Spannungen, daß dadurch die Lichtbüschel hervorgerufen werden. Bei Schwefelkohlenstoff bleibt diese Erscheinung aus, weil er ein Nichtleiter ist.

Auch hier halten sich die Kerne sehr lange, wie in den früher beschriebenen Versuchen. Das Nebelgefäß wurde 5 Min. lang belichtet und dann im Dunkeln sich selbst überlassen. Nach 15 Stunden waren fünf Entspannungen nötig, um die noch vorhandenen Kerne zu beseitigen.

Der im Schwefelkohlenstoff entstehende Nebel zeigt lange nicht die prächtigen Farben des Wassernebels. Die Beugungsringe haben nie die Größe, daß sie die gefärbten zentralen Felder zeigen (p. 321, Anmerk.).

Der bei der ersten Entspannung auftretende Nebel ist auch hier nicht immer vollkommen homogen. Die Tröpfchen fallen auch bedeutend schneller, als die gleich großen Wasser-

1) K. Schaum, Marb. Sitzungsber. 1902. Nr. 8.

tröpfchen in Luft, da die innere Reibung in Wasserstoff geringer ist.

Die Frage, ob auch hier die Ionen die Kernbildner sind, läßt sich zurzeit noch nicht mit voller Sicherheit beantworten. Wahrscheinlich ist es ja, aber dann kann man schwer erklären, warum das elektrische Wechselfeld ganz unwirksam ist. Hierüber können erst Leitfähigkeitsuntersuchungen und etwaige Analogien bei anderen Dämpfen von ähnlicher Zusammensetzung Aufschluß geben.

Während der Drucklegung meiner Dissertation erhielt ich Kenntnis von einer soeben erschienenen Arbeit K. Przibrams.[1]) Er benutzt dieselbe Versuchsanordnung wie C. T. R. Wilson und auch Expansionsräume derselben Größe wie dieser; sie sind also auch zu klein, um alle bei der Nebelbildung auftretenden Erscheinungen beobachten zu können (vgl. p. 321). Es beruht ferner auf Irrtum, wenn er angibt, zuerst J. Campanile und di Ciommo[2]) hätten im Jahre 1903 andere Dämpfe als Wasserdampf in bezug auf Kondensationsauslösung untersucht. Vielmehr haben schon R. v. Helmholtz und F. Richarz[3]) Dampfstrahlen von Alkohol, Ameisensäure, Essigsäure und Anilindämpfen untersucht. Przibrams geringe Expansionsgröße für Schwefelkohlenstoff rührt höchstwahrscheinlich davon her, daß das Nebelgefäß nicht vor Licht geschützt war.

Sehr wichtig ist aber das Hauptresultat der Arbeit von Przibram, daß die Dämpfe der Alkohole sich leichter auf die positiven Ionen niederschlagen als auf die negativen, anders als bei Wasserdampf.

Von besonderem Interesse ist auch Przibrams Berechnung der Übersättigung für Ionenkondensation und für kern-

1) K. Przibram, Sitzungsber. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien, Math-Nat. Klasse. p. 33—38. 1906. Kürzlich ist eine neuere Arbeit von ihm unter demselben Titel erschienen in der Adolf Lieben-Festschrift, p. 170—175. 1906.

2) J. Campanile u. di Ciommo, Physik. Zeitschr. 4. p. 648 bis 651. 1903.

3) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. 40. p. 161—203. 1890

lose Nebelgrenze bei verschiedenen Dämpfen. Die Werte finden sich aus den Formeln von F. Richarz für k eines Gasgemisches[1]), und ergeben für verschiedene Dämpfe bemerkenswerterweise sehr verschiedene Werte.

Auch Przibram kommt zu dem Schluß, daß man bei der Erklärung der Kondensation nicht ausschließlich die physikalischen Eigenschaften der Gasionen zu berücksichtigen habe, wie es auch aus meinen Resultaten zu schließen ist.

Marburg i. H., Physikalisches Institut, März 1906.

1) F. Richarz, Ann. d. Phys. 19. p. 639—642. 1906.

(Eingegangen 17. April 1907.)

11. *Die Diffusion von Metallen in Quecksilber; von Max von Wogau.*

(Auszug aus der Freiburger Inaugural-Dissertation.)

Einleitung.

§ 1. Die Diffusion von Metallen in Quecksilber ist deshalb von besonderem Interesse, weil die Metalle in Quecksilberlösung einatomig[1]) sind, und daher eine Diffusion von Metallatomen stattfindet. G. Meyer[2]) hat die Diffusionskonstanten von Zn, Cd, Pb in Hg ermittelt, indem er die untere Grundfläche eines ca. 1 cm hohen Zylinders der Amalgame dieser Metalle durch Extrahieren mit H_2SO_4 bez. HNO_3 dauernd auf der Konzentration 0 erhielt, und die Abnahme der Konzentration an der oberen Fläche aus dem elektromotorischen Verhalten derselben bestimmte.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, Diffusionskonstanten von Metallen in Hg nach derselben Methode zu bestimmen, die Graham bei der Bestimmung der Diffusionskonstanten von Salzen in Lösungsmitteln benutzt hat. Dieser Forscher und viele seiner Nachfolger schichteten eine konzentrierte Salzlösung und Wasser mittels einer Pipette übereinander, und trennten nach geschehener Diffusion die Salzlösung in verschiedene Schichten durch Abheben mittels einer Pipette oder eines Hebers, oder durch stufenweises Ablassen durch einen Hahn am unteren Ende der Flüssigkeitssäule. Ein solches Verfahren ist für verdünnte Amalgame und Hg wegen der Schwierigkeiten, welche der geringe Unterschied der spezifischen Gewichte dem Übereinanderschichten mit scharfer Grenzfläche entgegensetzt, nicht anwendbar. Wohl aber kann man durch den im folgenden beschriebenen Apparat Amalgam und Hg mit scharfer Trennungsfläche übereinanderschichten und nach Vollendung des Versuches die Hg-Säule

1) G. Meyer, Zeitschr. f. physik. Chemie 7. p. 477. 1891.
2) G. Meyer, Wied. Ann. 61. p. 225. 1897.

in einzelne Teile zerlegen. Die Diffusionsversuche wurden sowohl bei der konstanten Temperatur der Wasserleitung, wie auch bei der von siedendem Wasser ausgeführt.

Apparatur.

§ 2. Der zu den Diffusionsversuchen benutzte Apparat ist in Fig. 1 dargestellt. In dem aus Eisenblechstreifen konstruierten Gestell *g* sind die planparallelen Spiegelglasplatten *a*, 1—8, *b* in horizontaler Lage übereinandergeschichtet. Dieselben sind 7 cm im Quadrat groß und 0,624 cm dick. Sämtliche Platten sind wie auf der Zeichnung numeriert und werden stets in derselben Reihenfolge übereinander in das Gestell *g* geschoben. Die sich entsprechenden horizontalen Plattenflächen *m* sind so sorgfältig aufeinandergeschliffen und poliert, daß sie nach dem Aufeinanderpressen durch Luftdruck aneinander haften. Die Seitenflächen *s* der Platten bilden mit den horizontalen Flächen *m* einen scharfen rechten Winkel und sind ebenfalls sorgfältig poliert. Die Platten 1—8 sind in der Mitte mit kreisrunden, 2 cm im Durchmesser haltenden Durchbohrungen *c* versehen, welche senkrecht zur Oberfläche stehen, und nach Übereinanderschichten der Platten, eine acht Schichten durchsetzende, durch die Platten *a* und *b* geschlossene, zylindrische Röhre bilden. In dieser Stellung werden die Platten festgehalten durch Einschrauben in das Gestell *g*, in welchem die zwei Stahlplatten *h* lose stehen und vermittelst der Schrauben *f* fest an die Glasplatten gedrückt werden. Die Federn *i* dienen dazu, die Glasplatten gegen die Rückwand des Gestells zu pressen.

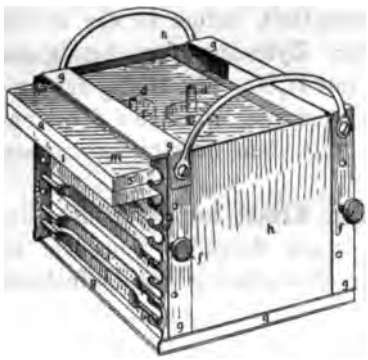


Fig. 1.

Die auf der Zeichnung (Figg. 1 und 2) mit den kleinen Bohrungen *d* und *d'* vom Durchmesser 2,5 mm versehenen Platten *a* und 1 gelangen bloß in den Versuchen bei hoher

Temperatur zur Anwendung. Für die Versuche bei tiefer Temperatur werden dieselben durch solche ohne die Bohrungen *d* und *d'* ersetzt.

Das System von Glasplatten mit seinem eisernen Rahmen ist erschütterungsfrei auf einem im Betonboden des Erdgeschosses mit Zement eingekitteten Sandstein *A* (Fig. 2) aufgestellt, welcher gleichzeitig einen Thermostaten trägt. Auf dem Sandstein *A* befestigt ist die runde Eisenplatte *B* vom

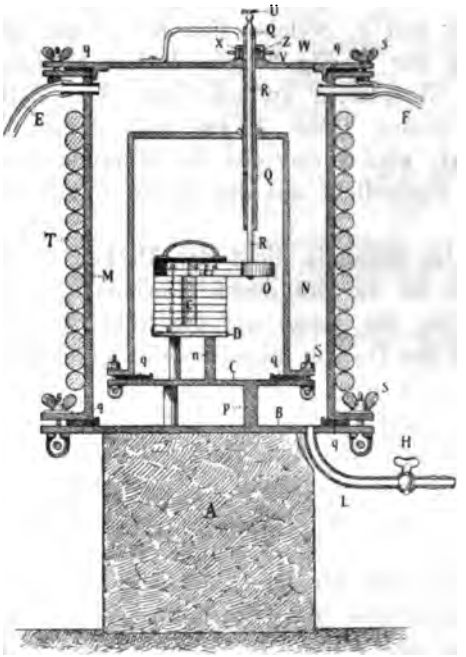


Fig. 2.

Durchmesser 41 cm. Auf dieser ist mit drei eisernen, 4 cm hohen Stützen *p* die runde Eisenplatte *C* vom Durchmesser 28 cm befestigt, auf dieser wiederum mit drei eisernen, 4 cm hohen Stäbchen *n*, die viereckige, 9 cm im Quadrat messende Eisenplatte D, auf welcher der Glasplattensatz steht. Die Platte *D* war mit den Stützen *n* vermittelst Justierschrauben verbunden, welche ein horizontales Einstellen derselben ermöglichten. Der Zylinder *N* aus Eisenblech, dessen Höhe

28 cm und dessen lichte Weite 18 cm beträgt, wird vermittelst der Schrauben *S* auf die Platte *C* geschraubt, wobei die Gummidichtung *q* einen sowohl wasser- wie dampfdichten Verschluß herstellt. In dem oberen Boden von *N* ist die Röhre *Q* eingeschraubt. In derselben steckt leicht beweglich der Eisenstab *R*, an dessen unterem Ende die 2 cm dicke, runde Holzscheibe *O* vom Durchmesser 4 cm exzentrisch befestigt ist. Dieselbe kann vermittelst des Griffes *U* um *R* als Achse gedreht werden. Eine solche Drehung ermöglicht es, die beiden Glasplatten *a* und 1, welche sich mit *O* auf gleicher Höhe befinden, aus der in Fig. 2 gezeichneten Stellung ganz über die anderen Glasplatten zu schieben. Der Zylinder *M* aus Eisenblech, dessen Höhe 40 cm und dessen lichte Weite 31 cm beträgt, wird vermittelst der Gummidichtung *q* sowohl wasser- wie dampfdicht auf der Platte *B* mit Schrauben befestigt.

Auf *M* ist ebenfalls dicht der Deckel *W* aufgeschraubt. In demselben ist die mit einem Gewinde versehene Röhre *Z* fest angebracht, die genau auf die Röhre *Q* paßt und beim Aufschrauben des Deckels über dieselbe geschoben wird. Die Gummidichtung *X* wird über die Röhre *Q* gezogen und sodann mittels der Schraube *V* fest an *Z* angepreßt, so daß auf diese Weise die Röhre *Q* mit dem Deckel *W* verschraubt ist. Das um den Zylinder *M* gewickelte Asbestseil *T*, ebenso wie eine im Deckel *W* angebrachte Scheibe aus Asbestpappe dienen als Wärmeschutz. Durch den äußeren Zylinder *M* kann sowohl Leitungswasser wie auch Wasserdampf geleitet werden. Im ersteren Fall fließt das Wasser durch die Röhre *L* in den Zylinder *M* zu, und durch die beiden Röhren *E* und *F* wieder ab. Im zweiten Fall dienen die Röhren *E* und *F* als Zuleitung für den in zwei Kesseln entwickelten Wasserdampf, der sodann mitsamt dem Kondenswasser durch die Röhre *L* entweichen kann. In beiden Fällen kann auf diese Weise im Innern des Zylinders *N*, nach erfolgtem Temperaturausgleich, eine konstante Temperatur erhalten werden. Bei den Versuchen mit Leitungswasser ersetzt man den Deckel *W* durch eine mit einer Öffnung zum Durchstecken der Röhe *Q* versehene Eisenblechplatte, die lose auf dem Zylinder *m* aufliegt.

Versuchsanordnung.

§ 3. Da die dicken Glasplatten des Diffusionsapparates eine schlecht wärmeleitende Masse bilden, so war es erforderlich, die Zeit zu ermitteln, nach deren Ablauf das in der Bohrung der Platten befindliche Hg die Temperatur des Leitungswassers bez. Wasserdampfes angenommen hatte. Im ersteren Falle benutzte man hierzu ein kurzes Minimalthermometer, welches in dem mit Hg gefüllten Diffusionsapparat vermittelst eines Korkes befestigt wurde. Nach $1^1/_2$ stündigem Durchleiten von Wasser durch den äußeren Zylinder stimmte die von dem Minimalthermometer angezeigte Temperatur des Hg mit der Temperatur des Kühlwassers überein. Der Temperaturausgleich war somit nach Ablauf dieser Zeit sicher erfolgt.

In dem Fall, daß Dampf siedenden Wassers durch den äußeren Zylinder geleitet wurde, wies man auf dieselbe Weise mit Hilfe eines Maximalthermometers nach, daß der Temperaturausgleich nach 2stündigem Durchleiten des Dampfes erfolgt war.

Die zu den Diffusionsversuchen verwendeten Amalgame waren sämtlich ungefähr von der Konzentration 0,1 Gewichtsprozent. Die Herstellung der Amalgame von Zn, Cd, Pb, Sn, Tl geschah durch Zusammenschmelzen abgewogener Mengen reinen Metalles[1]) mit abgewogenen Mengen reinen Hg in einem evakuierten Glasrohr. Die Alkali- und Erdalkaliamalgame wurden auf elektrolytischem Wege in dem von Nernst[2]) beschriebenen Apparat hergestellt.[3])

Versuchsanordnung bei der Temperatur des Leitungswassers.

§ 4. Die Glasplatten *a*, 1—8, *b* werden vor jedem Diffusionsversuch mit einem Lederlappen gereinigt und die etwa an ihnen haftende Feuchtigkeit durch gelindes Erwärmen beseitigt. Zunächst schiebt man in das Gestell *g* die undurchbohrte Platte *b*, sowie die Platten 8—2 ein, deren Bohrungen

1) Reinstes von Merck bezogenes Präparat.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie 3. p. 308. 1897.

3) Ich muß dabei auf meine ausführliche Publikation verweisen, wo eine genauere Beschreibung der Herstellungsmethoden der Amalgame zu finden ist.

die sieben unteren Schichten des Diffusionsapparates bilden, befestigt dieselben vermittelst der Federn *i* und stellt den Diffusionsapparat auf das Tischchen *D*. Diese sieben unteren Schichten werden mit Hg gefüllt, welches vorher in einer Flasche durch Leitungswasser längere Zeit gekühlt war. Durch teilweises Überschieben von Platte 1 über Platte 2 schneidet man den hervorquellenden Hg-Meniskus ab. Platte 1 wird nur so weit übergeschoben, daß ihre Bohrung ganz auf dem undurchbohrten Teil von Platte 2 aufliegt und ihr fester Teil die Hg-Säule der sieben unteren Schichten mit einer horizontalen, ebenen Fläche abschließt. Die Bohrung von Platte 1 stellt nun eine kleine Röhre dar, in welche man das verdünnte Amalgam so weit füllt, bis sich über Platte 1 ein Meniskus erhebt. Das Überschieben von Platte *a* über Platte 1 schneidet den Amalgammeniskus ab, so daß man auf diese Weise einen oben und unten scharf begrenzten Amalgamzylinder erhält. Die Stellung der Platten ist somit die in Fig. 2 angegebene. Sind durch Anziehen der Schrauben *f* die Glasplatten im Gestell *g* befestigt, so schraubt man die beiden Zylinder *M* und *N* auf und läßt Leitungswasser durch den äußeren Zylinder fließen. Der Exzenter *O* wird dabei so gestellt, daß er die Glasplatten nicht berührt. Bei der Diffusion der stark Wasser anziehenden Alkali- und Erdalkalimetalle befindet sich im Zylinder *A* ein mit konzentrierter Schwefelsäure gefülltes Schälchen, um Feuchtigkeit nach Möglichkeit von den Amalgamen fern zu halten. Nach Verlauf von $1^1/_2$ Stunden, innerhalb welcher Zeit der Inhalt des Diffusionsapparates nach p. 349 die Temperatur des Kühlwassers angenommen hat, werden die Platten *a* und 1 durch eine gleichmäßige Drehung des Exzenters, deren Dauer 2 Sek. nicht übersteigt, über die anderen Platten geschoben, so daß die Achse des Amalgamzylinders mit der des Hg-Zylinders zusammenfällt. Die Bewegung der Platten wird erleichtert dadurch, daß man die zwei Stahlplatten *h* mit Talkum überstreicht. Auf diese Weise erreicht man ein Übereinanderschichten von Amalgam und Hg von der gleichen Temperatur mit scharfer Grenzfläche.

Im Laufe eines jeden Versuches variierte die Temperatur des durchfließenden Kühlwassers höchstens um 0,3° C.

Bei Beendigung des Versuches läßt man das Wasser aus dem Thermostaten ablaufen, schraubt die Zylinder *M* und *N* ab, lockert die Schrauben *f* und entfernt die Federn *i*. Die Platten werden sodann einzeln langsam abgeschoben, wobei man die ausfließende Amalgammasse in kleinen untergehaltenen Glasgefäßen auffängt. Das Abschieben der Platten nimmt ungefähr $1^1/_2$—2 Min. in Anspruch, so daß man die Diffusionszeit, deren Dauer zwischen 4—22 Stunden variiert, bis auf 1 Min. genau angeben kann, also rund bis auf 2 Promille des Betrages.

Versuchsanordnung bei der Siedetemperatur des Wassers.

§ 5. Vor Beginn eines Diffusionsversuches werden die horizontalen Flächen *m* der gut gereinigten und gelinde erwärmten Glasplatten mit einer dünnen Schicht Vaseline überstrichen; ohne diese Maßregel haften die Platten bei hoher Temperatur so fest aneinander, daß sie nicht mehr gegeneinander verschoben werden können. In den Platten *a* und 1 sind die in § 2 p. 346 besprochenen kleinen Bohrungen *d* und *d'* angebracht. Durch dieselben können sich Hg und Amalgam, welche bei Zimmertemperatur in den Diffusionsapparat gefüllt werden, beim Erhitzen ausdehnen. Das Überschieben der Platten *a* und 1 geschieht nach 2stündigem Durchleiten von Wasserdampf durch den äußeren Zylinder (vgl. p. 349).

Dabei wird das Hg in *d'* von dem übrigen Hg getrennt und nach Beendigung des Versuches, ebenso wie das in *d* befindliche Amalgam, gesondert aufgefangen. Die in *d* befindliche geringe Amalgammenge, welche der Einwirkung der Luft ausgesetzt war, wurde als verschwindend gegen den Inhalt der Kammer nicht beachtet.

Analyse des Metallgehaltes der einzelnen Amalgamschichten.

ZnHg, CdHg, SnHg, PbHg, TlHg.

§ 6. Die Amalgammassen sämtlicher Schichten wurden in kleine Röhrchen 1—8 gefüllt, die eine Salzlösung des im Hg gelösten Metalles enthielten und durch deren Boden Platindrähte durchgeschmolzen waren. In ein gleiches, dieselbe Metallsalzlösung enthaltendes Röhrchen 9 hatte man vor Be-

ginn des Diffusionsversuches einen Teil des ursprünglich in den Diffusionsapparat gefüllten Amalgams gebracht, welches ich im folgenden stets mit Standardamalgam bezeichne. Wurden nun die Lösungen in den Röhrchen 1 – 8 mit der im Röhrchen 9 vermittelst eines Hebers einzeln nacheinander verbunden, so entstand eine Reihe von Konzentrationselementen von dem Typus: konzentriertes Amalgam eines Metalles Me von der Konzentration c_1 — wässerige Lösung eines Salzes des Metalles Me —, verdünntes Amalgam des Metalles Me von der Konzentration c_2.

Aus den elektromotorischen Kräften solcher Zellen berechnet sich nach G. Meyer[1]) das Verhältnis der Konzentration c_1/c_2 zweier Amalgame nach der Formel:

$$E = \frac{19{,}14 \times q}{A} \times T \times \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2},$$

worin

E = die elektromotorische Kraft,
q = das elektrochemische Äquivalent,
T = die absolute Temperatur,
A = das Atomgewicht,
log brigg c_1/c_2 = der briggische Logarithmus des Verhältnisses der Konzentrationen ist.

Als Elektrolyte gelangten zur Verwendung 23 proz. $ZnSO_4$, 25 proz. $CdSO_4$, 30 proz. $Pb(CH_3COO)_2$, 30 proz. $SnCl_2$, 4,7 proz. Tl_2SO_4.

Die Messung der elektromotorischen Kräfte wurde nach der Kompensationsmethode mit einem Kapillarelektrometer nach Smith[2]) ausgeführt, welches Messungen von elektromotorischen Kräften bis auf 0,1 Millivolt genau ermöglichte.

LiHg, NaHg, KHg, RbHg, CsHg, CaHg, SrHg, BaHg.

§ 7. Die Bestimmungen des Metallgehaltes der Amalgame von Li, K, Na, Rb, Cs, Ca, Sr, Ba geschah auf titrimetrischem Wege.

Die Amalgame wurden mit $^1/_{20}$ n-HCl überschichtet und so lange stehen gelassen, bis sämtliches Metall in Lösung

1) G. Meyer, Zeitschr. f. physik. Chemie 7. p. 482. 1891.
2) S. W. J. Smith, Proc. Phys. Soc. London 18. p. 377—384. 1903.

gegangen war. Die überschüssige Säure wurde sodann mit $^1/_{20}$ n-$Ba(OH)_2$ zurücktitriert

Der Metallgehalt in Gramm des in die erste Schicht des Diffusionsapparates gefüllten Standardamalgams berechnet sich aus seiner Konzentration in Prozenten, unter der Voraussetzung, daß verdünntes Amalgam und Hg dasselbe spezifische Gewicht haben.[1])

Die Berechnung der Diffusionskonstanten.

§ 8. Die Berechnung der Diffusionskonstanten aus dem Metallgehalt der einzelnen Schichten geschah mit Hilfe der von Stefan[2]) für die Grahamschen Diffusionsversuche berechneten Tafeln.

Dieselben sind mit doppeltem Eingange angeordnet. In vertikaler Richtung sind die Argumente — die Ordnungszahlen der einzelnen Schichten in horizontaler Richtung — aufeinanderfolgende Werte des Quotienten $h/2\sqrt{kz}$, den ich im folgenden mit a bezeichne. In dem Quotienten $a = h/2\sqrt{kz}$ bedeutet:

h = die Höhe der einzelnen Schicht,
k = Diffusionskonstante,
z = Diffusionszeit.

Die Funktionswerte im Körper der Tafeln stellen die Salzbez. Metallgehalte der einzelnen Schichten dar, für den Fall, daß die gesamte diffundierende Salz- bez. Metallmenge = 10000 gesetzt ist.

Bei Benutzung der Tafeln muß also der ermittelte Metallgehalt sämtlicher Schichten für den Fall umgerechnet werden, daß der ursprüngliche Metallgehalt der ersten Amalgamschicht = 10000 gesetzt ist. Die den Metallgehalten der einzelnen Schichten entsprechenden Werte von $a = h/2\sqrt{kz}$ werden bestimmt, aus jedem derselben k berechnet, und das arithmetische Mittel aus sämtlichen Werten für k genommen.

Die Stefanschen Tafeln mußten für meine Versuche insofern modifiziert werden, als Stefan dieselben für den Fall

1) Das Gewicht von Hg in der ersten Schicht meines Diffusionsapparates beträgt 32,93 g.

2) J. Stefan, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. zu Wien, math.-naturw. Kl. 79. p. 2. 1879.

berechnet hat, daß die Diffusionssäule in 16 Schichten geteilt wurde, wobei bei Beginn des Versuches zwei Schichten mit Salz gefüllt waren. Es wurde daher der Salz- bez. Metallgehalt von je zwei aufeinanderfolgenden Schichten der Tafeln addiert; bei Berechnung von k aus dem Wert des Quotienten $h/2\sqrt{kz}$ mußte jedoch für h die halbe Dicke der in meinem Apparat verwendeten Platten gesetzt werden. Die Dicke d derselben betrug 0,624 cm; somit berechnete sich die Diffusionskonstante nach der Formel:

$$k = \frac{d^2}{16\,a^2 z} = \frac{0{,}624^2}{16\,a^2 z} = \frac{0{,}02576}{a^2 z}.$$

Die Summe der Metallgehalte sämtlicher Schichten S sollte nach geschehener Diffusion genau 10000 ergeben. Doch traten infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler Abweichungen von diesem Werte auf. Der reziproke Wert dieser Abweichung ist als Gewicht einer Beobachtung in Rechnung gesetzt.

Ergebnisse.

§ 9. **ZnHg.**

$$E = \frac{19{,}14 \times 0{,}0003387}{65{,}4}\, T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2}$$

$$= 0{,}0000991\, T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2}.$$

Konzentration des $ZnSO_4$: 22 Proz.

Als Einleitung zur Darstellung der Versuchsergebnisse folgt das vollständige Protokoll einer Beobachtung.

Protokoll d. 9./V. 1906.

Diffusionszeit: $z = 9{,}5$ Stunden.
Mittlere Temperatur: $t = 7{,}9°$ C.
Konzentration des Standardamalgams: $c_1 = 0{,}137$ Proz.

In untenstehender Tab. 1 sind:

E die elektromotorischen Kräfte der Amalgamzellen,
T die absoluten Temperaturen derselben,
c_2' die berechneten Konzentrationen der Amalgame in Prozenten,
c_2'' die berechneten Konzentrationen der Amalgame, wenn $c_1 = 10000$ gesetzt ist,
a die Werte des Quotienten $\frac{h}{2\sqrt{kz}}$,
k die Diffusionskonstanten.

Tabelle 1. **ZnHg.**

	E	T	c_2'	c_2''	a	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
I	0,0126	291,1	0,05071	3658	0,175	0,088	2,12
II	0,0155	290.9	0,03975	2902	0,172	0,092	2,20
III	0,0208	290,9	0,02603	1900	0,169	0,095	2,28
IV	0,0283	291,0	0,01432	1045	0,166	0,098	2,36
V	0,0376	291,0	0,00679	496	0,162	0,133	2,48
VI	0,0501	291,0	0,00251	183	0,162	0,133	2,48
VII	0,0665	291,0	0,00067	49	0,163	0,096	2,30
VIII	0,1142	291,0	0,00001	—	—	—	—
				$S = 10233$	Mittel:	0,096	2,31

$$k = 0{,}096 \frac{cm^2}{Stunde} = 2{,}31 \frac{cm^2}{Tag}.$$

Eine Zusammenstellung sämtlicher Beobachtungen enthält Tab. 2.

Darin ist:

c_1 die Konzentration des Standardamalgams in Prozenten,
z die Diffusionszeit in Stunden,
S die Summe der Metallgehalte sämtlicher Schichten nach der Diffusion, wenn $c_1 = 10000$ gesetzt ist,
t die mittlere Temperatur in Celsiusgraden,
k die Diffusionskonstante, welcher der, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete, mittlere Fehler hinzugefügt ist.

Tabelle 2. **ZnHg.**

t	c_1	z	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
14,0	0,0320	3,41	10948	0,093	2,24
14,3	0,167	5,42	10411	0,080	1,93
14,2	0,071	5,08	10271	0,085	2,05
8,0	0,140	9,50	10288	0,096	2,31
8,6	0,123	8,33	10400	0,097	2,34
9,8	0,087	13,83	9481	0,095	2,27
11,5	Mittel				

Zn: $k = 0{,}091 \pm 0{,}007 \frac{cm^2}{Stunde} = 2{,}18 \pm 0{,}16 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 11,5° C.

Tabelle 3. **ZnHg.**

t	c_1	$\varkappa$	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
99,1	0,108	6,7	9161	0,125	2,99
99,1	0,114	5,4	8752	0,119	2,85
99,3	0,114	5,77	9339	0,119	2,85

99.2 Mittel

Zn: $k = 0{,}120 \pm 0{,}003 \frac{cm^2}{Stunde} = 2{,}90 \pm 0{,}081 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 99,2° C.

§ 10. CdHg.

$$E = \frac{19{,}14 \times 0{,}0005801}{112{,}1} T . \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2} .$$

Konzentration des $CdSO_4$: 25 Proz.

Tabelle 4.

t	c_1	$\varkappa$	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
8,8	0,118	6,21	10368	0,059	1,41
8,7	0,116	6,80	10090	0,064	1,58
8,7	0,150	6,25	10384	0,057	1,36

8,7 Mittel

Cd: $k = 0{,}059 \pm 0{,}004 \frac{cm^2}{Stunde} = 1{,}45 \pm 0{,}09 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 8,7° C.

Tabelle 5. **CdHg.**

t	c_1	$\varkappa$	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
99,1	0,128	6,1	9625	0,125	3,00
99,2	0,126	4,7	8487	0,128	3,07
99,1	0,135	4,07	10289	0,121	2,91

99,1 Mittel

Cd: $k = 0{,}123 \pm 0{,}004 \frac{cm^2}{Stunde} = 2{,}96 \pm 0{,}09 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 99,1° C.

§ 11. PbHg.

$$E = \frac{19{,}14 \times 0{,}0010716}{206{,}9} T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2}$$

$$= 0{,}00009685\ T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2} .$$

Konzentration des $Pb(CH_3COO)_2$: 30 Proz.

Tabelle 6.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
9,0	0,162	6,6	10622	0,065	1,55
9,2	0,135	7,13	10118	0,062	1,49
10,0	0,118	6,25	10150	0,062	1,48
9,4 Mittel					

Pb: $k = 0{,}062 \pm 0{,}004 \frac{cm^2}{Stunde} = 1{,}50 \pm 0{,}09 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 9,4° C.

Tabelle 7. **PbHg.**

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
99,2	0,142	4,65	8385	0,081	1,95
99,3	0,134	6,0	7867	0,078	1,89
99,2 Mittel					

Pb: $k = 0{,}080 \pm 0{,}001 \frac{cm^2}{Stunde} = 1{,}92 \pm 0{,}03 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 99,2° C.

§ 12. **SnHg.**

$$E = \frac{19{,}14 \times 0{,}0006136}{118{,}1} T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2}$$

$$= 0{,}00009945\, T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2}.$$

Konzentration des $SnCl_2$: 30 Proz.

Tabelle 8.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
9,6	0,162	5,18	10666	0,063	1,51
9,7	0,124	5,90	10716	0,067	1,61
9,6	0,158	6,60	10718	0,067	1,60
14,0	0,137	20,5	9881	0,062	1,50
10,7 Mittel					

Sn: $k = 0{,}064 \pm 0{,}003 \frac{cm^2}{Stunde} = 1{,}53 \pm 0{,}064 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 10,7° C.

Die Diffusionskonstante von Sn in Hg konnte bei hoher Temperatur nicht ermittelt werden, da das heiße Amalgam

Anlaß zur Bildung von basischen Salzen im Elektrolyten gab, welche keine genauen Messungen von elektromotorischen Kräften zuließen.

§ 13. **TlHg.**

Die Einatomigkeit von Thallium in Thalliumamalgamen, zwischen den Konzentrationen 0,2 Proz. und 0,0007 Proz., wurde nachgewiesen durch die Übereinstimmung von beobachteten und berechneten elektromotorischen Kräften in Amalgamzellen mit Amalgamen bekannter Konzentration.

Mit diesem Befunde stimmen auch die von Ramsay[1]) gemachten Beobachtungen annähernd überein.

$$E = \frac{19{,}14 \times 0{,}0021103}{203{,}7} T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2}$$

$$= 0{,}0001982\, T \log \text{brigg} \frac{c_1}{c_2},$$

Konzentration des Tl_2SO_4: 4,72 Proz.

Tabelle 9.

t	c_1	x	s	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
11,0	0,140	6,7	10025	0,034	0,82
11,1	0,140	9,16	10475	0,040	0,95
12,0	0,137	13,8	9986	0,034	0,81
12,0	0,160	12,75	9990	0,039	0,94
11,5	Mittel				

Tl: $k = 0{,}036 \pm 0{,}003 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}87 \pm 0{,}076 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 11,5° C.

§ 14. **NaHg.**

Zur Veranschaulichung der Berechnungsmethode folgt das vollständige Protokoll einer Beobachtung vom 23./XI. 1906.

Diffusionszeit: $x = 16{,}8$ Stunden,
Mittlere Temperatur: $t = 9{,}1°$ C.,
Konzentration des Standardamalgams: $c_1 = 0{,}1647$ Proz.

Die gesamte diffundierende Natriummenge somit

$$c_1 = \frac{32{,}93 \times 0{,}1647}{100} = 0{,}05423 \text{ g}.$$

1) W. Ramsay, Zeitschr. f. physik. Chem. 3. p. 359. 1889.

In untenstehender Tabelle sind:

c_2' die Metallgehalte der einzelnen Schichten in Gramm,
c_2'' die Metallgehalte der einzelnen Schichten, bezogen auf den Fall, daß $c_1 = 10000$ gesetzt ist,
a die Werte des Quotienten $\frac{h}{2\sqrt{k\,z}}$,
k die Diffusionskonstanten.

Tabelle 10.

	c_2'	c_2''	a	$k\,\frac{cm^2}{Stunde}$	$k\,\frac{cm^2}{Tag}$
I	0,02410	4444	0,222	0,032	0,78
II	0,01823	3366	0,260	0,022	0,54
III	0,00814	1502	0,239	0,027	0,64
IV	0,00188	347	0,261	0,022	0,54
V	0,00069	126	0,280	0,029	0,69
VI	0,00011	21	0,280	0,029	0,69
VII	—	—	—	—	—
	$S = 0{,}05315$	9806		Mittel 0,027	0,64

Na: $k = 0{,}027\,\frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}64\,\frac{cm^2}{Tag}$.

Eine Zusammenstellung sämtlicher Beobachtungen enthält Tab. 11. Die Bezeichnungen sind dieselben wie in den weiter oben angeführten Tabellen.

Tabelle 11. **NaHg.**

t	c_1	z	S	$k\,\frac{cm^2}{Stunde}$	$k\,\frac{cm^2}{Tag}$
10,4	0,134	12,42	10361	0,026	0,63
10,0	0,0942	15,25	10771	0,028	0,67
9,0	0,1846	15,41	9350	0,027	0,65
9,1	0,1467	16,80	9806	0,027	0,64
9,6 Mittel					

Na: $k = 0{,}027 \pm 0{,}0007\,\frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}64 \pm 0{,}017\,\frac{cm^2}{Tag}$ bei 9,6° C.

§ 15. LiHg.

Tabelle 12.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
8,0	0,1018	19,66	10131	0,026	0,64
8,5	0,1381	19,83	10400	0,027	0,66
8,1	0,1821	20,66	9696	0,030	0,72
8,2	Mittel				

Li: $k = 0{,}027 \pm 0{,}002 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}66 \pm 0{,}045 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 8,2° C.

§ 16. KHg.

Tabelle 13.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
8,8	0,1713	15,0	9753	0,020	0,49
8,7	0,0962	17,58	9198	0,021	0,50
8,8	0,1098	17,83	10298	0,021	0,51
13,2	0,110	14,70	9940	0,023	0,56
13,2	0,109	16,10	9925	0,022	0,54
10,5	Mittel				

K: $k = 0{,}022 \pm 0{,}001 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}53 \pm 0{,}032 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 10,5° C.

§ 17. RbHg.

Tabelle 14.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
7,2	0,193	17,83	9825	0,019	0,46
7,3	0,132	17,90	8378	0,019	0,45
7,3	0,147	18,16	9037	0,019	0,46
7,3	Mittel				

Rb: $k = 0{,}019 \pm 0{,}0003 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}46 \pm 0{,}007 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 7,3° C.

§ 18. **CsHg.**

Tabelle 15.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
7,2	0,1319	18,33	9810	0,020	0,47
7,3	0,169	14,75	9562	0,019	0,46
7,8	0,160	14,10	9001	0,018	0,43
7,3	0,119	15,30	9826	0,019	0,46

7,3 Mittel

Cs: $k = 0{,}019 \pm 0{,}0007 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}45 \pm 0{,}017 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 7,3° C.

§ 19. **BaHg.**

Tabelle 16.

t	c_1	x	S	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
7,8	0,054	17,66	9595	0,021	0,50
7,8	0,104	17,90	9977	0,022	0,52
7,7	0,120	22,50	10118	0,022	0,52

7,8 Mittel

Ba: $k = 0{,}022 \pm 0{,}0006 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}52 \pm 0{,}014 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 7,8° C.

§ 20. **SrHg.**[1])

Tabelle 17.

t	c_1	x	Verlust in mg	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
8,1	0,123	21,16	2,3	0,022	0,53
8,0	0,136	16,45	4,0	0,019	0,47
10,2	0,146	17,0	4,3	0,020	0,48
10,2	0,174	17,5	3,4	0,019	0,45
10,5	0,140	18,83	4,6	0,018	0,44

9,4 Mittel

Sr: $k = 0{,}019 \pm 0{,}001 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}47 \pm 0{,}035 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 9,4° C.

1) Die Ausführung der Diffusionsversuche mit SrHg und CaHg gestaltete sich dadurch komplizierter, daß sich im Laufe des Versuches an den Wänden der Bohrungen der drei obersten Schichten eine dunkle

§ 21. **CaHg.**[1])

Tabelle 18.

t	c_1	x	$k \frac{cm^2}{Stunde}$	$k \frac{cm^2}{Tag}$
8,7	0,1	19,25	0,022	0,53
11,7	0,1	15,16	0,023	0,56
10,2 Mittel				

Ca: $k = 0{,}023 \pm 0{,}001 \frac{cm^2}{Stunde} = 0{,}54 \pm 0{,}022 \frac{cm^2}{Tag}$ bei 10,2° C.

§ 22. Mit TlHg, sowie den Amalgamen der Alkalien und Erdalkalien wurden Diffusionsversuche bei hoher Temperatur nicht ausgeführt, da diese Metalle die Glasplatten des Diffusionsapparates stark angriffen.

§ 23. Die von G. Meyer nach einer anderen Methode ermittelten Diffusionskonstanten von Zn und Cd in Hg (vgl. § 1) stimmen mit den meinigen innerhalb der Fehlergrenzen überein; dagegen ist sein Wert für die Diffusionskonstante von Pb in Hg etwas kleiner wie der meinige.

In Tab. 19 sind die von G. Meyer und die von mir bestimmten Diffusionskonstanten nebeneinander aufgeführt, wobei, unter Berücksichtigung des Temperaturkoeffizienten, meine Konstanten für die von G. Meyer benutzten Temperaturen umgerechnet sind.

Tabelle 19.

	t° C.	G. Meyer $k \frac{cm^2}{Tag}$	M. v. Wogau $k \frac{cm^2}{Tag}$
Zn	15,0	2,09	2,19 ± 0,16
Cd	15,0	1,56	1,52 ± 0,09
Pb	15,6	1,37	1,55 ± 0,09

körnige Masse aus feinverteiltem Hg und $SrCO_3$ bez. CaO abschied. Das darin befindliche Sr bez. Ca hatte nicht an der Diffusion teilgenommen, konnte somit auch bei Berechnung der Diffusionsversuche nicht in Rechnung gebracht werden. Bezüglich der in diesem Falle angebrachten Korrektur muß ich auf meine ausführliche Publikation verweisen.

1) Vgl. die Anm. 1 zur Tab. 17.

Theoretischer Teil.

§ 24. Die Kenntnis der Diffusionskonstanten kann man zur Berechnung des Reibungskoeffizienten K ausnutzen, d. h. der Kraft, welche ein Grammatom des betreffenden Metalles mit der Geschwindigkeit 1 cm/sec durch das Hg bewegt.

Nach Nernst[1]) ist K gegeben durch die Formel:

$$K = \frac{1}{k} \times 1{,}99 \times 10^9 (1 + 0{,}00367\, t) \text{ kg-Gew.}$$

Die Werte für K sind in Kolumne IV der Tab. 20 zusammengestellt.

Unter Berücksichtigung, daß die Metalle in Hg-Lösung einatomig sind, läßt sich aus den Diffusionskonstanten auch die mittlere Weglänge l der Metallatome berechnen. Die Molekulartheorie der Diffusion von Riecke[2]) liefert für l den Ausdruck:

$$l = 0{,}01332 \times 10^{-8} \times \sqrt{1 + 0{,}00367\, t}\, k \sqrt{M},$$

wo für das Molekulargewicht M das Atomgewicht zu setzen ist. In beiden Ausdrücken hat die Diffusionskonstante k die Dimension cm^2/Tag. Die Werte für l sind in Kolumne VII der Tab. 20 angeführt.

Die Einatomigkeit ist durch Messung der elektromotorischen Kräfte in Amalgamzellen für die Schwermetalle Zn, Cd, Pb, Sn, sowie für Tl und Ba[3]) sichergestellt.

Dagegen liegen Beobachtungen von Cady[4]) vor, welche sich auf Natriumamalgame beziehen, zwischen den Konzentrationen 0,46 Proz. und 0,0321 Proz., und elektromotorische Kräfte ergeben, die mit den nach der Formel von G. Meyer berechneten nicht übereinstimmen. Die Messungen von G. Meyer sind mit Amalgamen zwischen den Konzentrationen 0,038 Proz. und 0,00953 Proz. vorgenommen, und in so verdünnten Amalgamen hat sich das Na als einatomig erwiesen.

Bei den Diffusionsversuchen ist in die oberste Kammer 0,1 proz. NaHg eingefüllt, und nach Beendigung des Prozesses

1) W. Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. **2.** p. 618. 1888.
2) E. Riecke, Zeitschr. f. physik. Chem. **6.** p 504. 1890.
3) A. Schöller, Zeitschr. f. Elektrochemie **5.** p. 259. 1898.
4) W. G. Cady, Journ. of phys. Chemiestry **2.** p. 551. 1898.

liegen die Konzentrationen zwischen 0,024 Proz. und 0,0001 Proz., also in dem Gebiete, in welchem das Na einatomig ist.

Unter diesen Umständen habe ich die jedenfalls näherungsweise gültige Annahme gemacht, daß die Alkalimetalle in dem Diffusionszylinder einatomig sind, und auch für diese die Größe l berechnet.

In den Kolumnen VI und VII der Tab. 20 sind die Werte für die Größen K und l zusammengestellt.

§ 25. G. Meyer[1]) hat auf Grund eines zu geringen Beobachtungsmaterials die Beziehung:

$$\text{Diffusionskonstante} \times \text{spezifisches Gewicht} = \text{konst.}$$
$$(k \times s = \text{konst.})$$

gemutmaßt. Dieselbe ist jedoch nicht zutreffend, wie aus der Kolumne VIII der Tab. 20 ersichtlich ist.

In Analogie mit der von Hüfner[2]) und Euler[3]) für die Diffusionkonstanten von Nichtelektrolyten in wässeriger Lösung nachgewiesenen Beziehung:

$$\text{Diffusionskonstante} \times \sqrt{\text{Molekulargewicht}} = \text{konst.},$$

hat Ostwald[4]) für die Diffusionskonstanten der Metalle in Hg die Beziehung:

$$\text{Diffusionskonstante} \times \sqrt{\text{Atomgewicht}} = \text{konst.} \quad (k \times \sqrt{A} = \text{konst.})$$

vorausgesetzt. Dieselbe ist auch in dem Grundriß der Elektrochemie von Jahn ausführlich behandelt. Wie aus Kolumne IX der Tab. 20 ersichtlich ist, trifft diese Gesetzmäßigkeit jedoch nicht zu.

Schon G. Meyer[1]) hat darauf hingewiesen, daß diese Beziehung unwahrscheinlich ist, da dem Produkt $k \times \sqrt{A}$ die mittlere Weglänge l der Metallatome proportional ist (vgl. p. 363). Wäre diese Gesetzmäßigkeit richtig, so müßten sämtliche Metallatome gleiche Weglänge besitzen.

Die Kenntnis einer größeren Anzahl der Diffusionskonstanten von Metallen in Hg hat nun andersartige Beziehungen

1) G. Meyer, Wied. Ann. **64.** p. 752. 1898.
2) G. Hüfner, Wied. Ann. **60.** p. 134. 1897.
3) H. Euler, Wied. Ann. **63.** p. 273. 1897.
4) W. Ostwald, Zeitschr. für physik. Chem. **24.** p. 530. 1897.

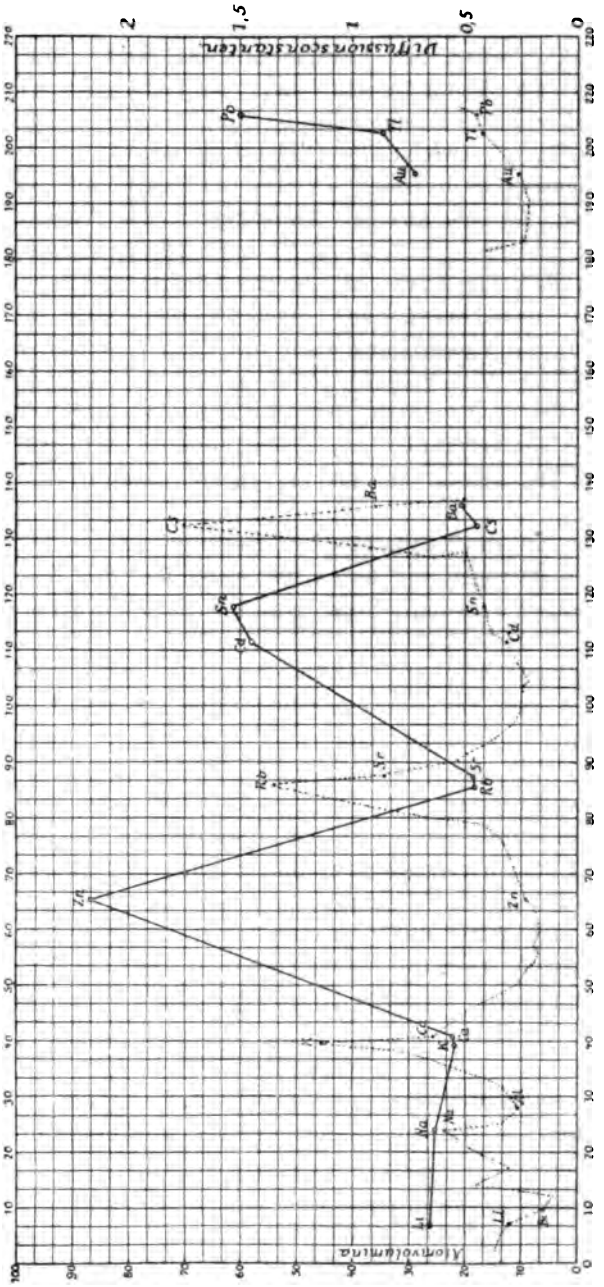

Diffusionskonstanten
2
1,5
1
0,5
0
Atomvolumina
Atomgewichte

Fig. 8.

derselben zum Atomgewicht erkennen lassen. Trägt man die Diffusionskonstanten als Ordinaten einer Kurve auf, deren Abszissen die Atomgewichte sind, so sieht man, daß die Diffusionskonstante eine periodische Funktion des Atomgewichtes ist. Die Kurve, welche die Diffusionskonstante als Funktion des Atomgewichtes darstellt, scheint das Spiegelbild derjenigen zu sein, welche sich aus der Abhängigkeit des Atomvolumens vom Atomgewicht ergibt. Doch ist diese Beziehung in dem einzelnstehenden Teile der Kurve, welche den höchsten Atomgewichten entspricht, nicht erkennbar. Beide Kurven sind in Fig. 3 angegeben; die ausgezogene stellt die Diffusionskonstante, die punktierte das Atomvolumen als Funktion des Atomgewichtes dar. Es ist zu beachten, daß die Kenntnis der Diffusionskonstanten des Berylliums und des Aluminiums den periodischen Charakter im Beginn der Kurve schärfer hervortreten lassen würde.

§ 26. Zu einer theoretischen Bestimmung der Diffusionskonstanten gelangen wir durch die Annahme, daß die Metalle in Hg-Lösung einatomig sind und die Atome Kugelform besitzen.

Betrachten wir einen Diffusionszylinder von 1 cm² Querschnitt, in dem das Konzentrationgefälle 1 herrscht, an zwei um 1 cm voneinander entfernten Stellen, in deren Mitte η-Grammatome enthalten sind, dann ist die Konzentration an den Enden des Zylinders $\eta + \frac{1}{2}$ und $\eta - \frac{1}{2}$. Der osmotische Überdruck wird durch den Konzentrationsüberschuß von 1 Grammatom in 1 ccm hervorgebracht und hat den Betrag: $D = RT$, wobei T die absolute Temperatur, und $R = 8{,}31 \times 10^7$ ist. Dieser Druck wirkt auf η-Grammatome, und wenn in einem Grammatom N wirkliche Atome enthalten sind, auf $N\eta$-Atome; die auf ein Atom wirkende Kraft ist somit:

$$D_1 = \frac{RT}{N\eta}. \tag{1}$$

Den Diffusionsvorgang fassen wir auf als die Bewegung einer Reihe von Kugeln in einer reibenden Flüssigkeit.

Bezeichnen wir mit:

P den Radius eines wirklichen Atoms,
μ den Reibungskoeffizienten des Hg,
Z die auf ein Atom wirkende Kraft,

so ist nach Kirchhoff[1]) die Geschwindigkeit c, mit der sich das Atom in dem reibenden Lösungsmittel bewegt, gegeben durch den Ausdruck:

$$c = \frac{Z}{6\pi\mu P}. \tag{2}$$

Es ist aber:

$$Z = D_1 = \frac{RT}{N\eta}.$$

Die Geschwindigkeit c wird somit:

$$c = \frac{RT}{6\pi\mu NP\eta}. \tag{3}$$

Andererseits erhalten wir aber für die Diffusionskonstante k, d. h. für diejenige Metallmenge, welche in der Einheit der Zeit durch das Konzentrationsgefälle 1 mit der Geschwindigkeit 1 cm/sec durch die Einheit des Querschnittes wandert:

$$k = c\eta$$

und daraus:

$$c = \frac{k}{\eta}. \tag{4}$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke für c ((3) und (4)) einander gleich, so finden wir:

$$k = \frac{RT}{6\pi\mu NP}.^{2}) \tag{5}$$

Der Radius eines Atoms berechnet sich aus dem Atomgewicht A, dem spezifischen Gewicht s, und der Anzahl von wirklichen Atomen in 1 Grammatom N mit Hilfe der Gleichung:

$$\frac{4}{3}\pi P^3 Ns = A.$$

Also:

$$P = \sqrt[3]{\frac{3A}{4\pi sN}}. \tag{6}$$

Wir bekommen somit für k den Ausdruck:

$$k = \frac{RT}{6\pi\mu\sqrt[3]{\frac{3AN^2}{4\pi s}}}. \tag{7}$$

Für N setzen wir nach Planck[3]) den Wert $6{,}175 \times 10^{23}$.

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 26. Vorlesung.
2) Vgl. H. Einstein, Ann. d. Phys. 19. p. 302. 1906
3) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 564. 1901.

Der Reibungskoeffizient von Hg berechnet sich nach S. Koch[1]) aus der Formel:

$$\mu = 0{,}016969 - 0{,}0000660525\,t + 0{,}00000020847\,t^2 - 0{,}0000000002455\,t^3 .$$

Die auf diese Weise berechneten Werte für die Diffusionskonstanten sind in der Kolumne V der Tab. 20 angeführt, wobei k die Dimension cm^2/sec hat.

Bei den Alkali- und Erdalkalimetallen, ebenso wie beim Gold, stimmen die berechneten Diffusionskonstanten mit den beobachteten befriedigend überein. Auch die berechnete Diffusionskonstante von Thallium weicht nicht allzusehr von der beobachteten ab.

Die Eigenschaften dieser Amalgame bezüglich ihres elektromotorischen Verhaltens und der Diffusion der Metalle im Lösungsmittel werden für die jetzigen Beobachtungsmittel vollständig auf die Einatomigkeit zurückgeführt. Die berechneten Diffusionskonstanten der Schwermetalle Zn, Cd, Pb, Sn sind dagegen zwei- bis dreimal kleiner als die beobachteten.

Da die Bestimmung der Diffusionskonstanten von Zn, Cd, Pb nach zwei verschiedenen Methoden innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmende Werte geliefert hat, so erscheinen die in den Kolumnen II, III, IV der Tab. 20 angegebenen Werte nicht zweifelhaft. Da auch die Einatomigkeit dieser Metalle in Quecksilberlösung einwandfrei bewiesen ist, so muß es einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben, das Verhalten dieser Amalgame aufzuklären.

Aus den bei zwei verschiedenen Temperaturen beobachteten Diffusionskonstanten von Zn, Cd und Pb berechnen sich die Temperaturkoeffizienten der Diffusionskonstanten dieser Metalle nach der Formel:

$$a = \frac{k_2 - k_1}{(t_2 - t_1)\,k_1} .$$

Auf dieselbe Weise lassen sich die Temperaturkoeffizienten der theoretisch berechneten Diffusionskonstanten ermitteln. Dieselben stimmen jedoch mit den beobachteten nicht überein, eine Erscheinung, welche der Differenz zwischen den beobachteten und berechneten Diffusionskonstanten dieser Metalle parallel läuft.

1) S. Koch, Wied. Ann. **14.** p. 9. 1881.

Tabelle 20.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
		Beobachtet			Berechnet				
	t° C.	k $\frac{cm^2}{Tag}$	k $\frac{cm^2}{Stunde}$	k $\frac{cm^2}{sec}$	k $\frac{cm^2}{sec}$	K kg-Gew.	l mm	$k \times s$	$k \times \sqrt{A}$
Li	8,2	0,66	0,027	$7{,}63 \times 10^{-6}$	$7{,}34 \times 10^{-6}$	$3{,}106 \times 10^{9}$	$0{,}0237 \times 10^{-8}$	0,389	1,75
Na	9,6	0,64	0,027	$7{,}41 \times 10^{-6}$	$5{,}91 \times 10^{-6}$	$3{,}220 \times 10^{9}$	$0{,}0416 \times 10^{-8}$	0,626	3,07
K	10,5	0,53	0,022	$6{,}02 \times 10^{-6}$	$4{,}80 \times 10^{-6}$	$3{,}90 \times 10^{9}$	$0{,}0450 \times 10^{-8}$	0,461	3,32
Rb	7,3	0,46	0,019	$5{,}32 \times 10^{-6}$	$4{,}35 \times 10^{-6}$	$4{,}44 \times 10^{9}$	$0{,}0574 \times 10^{-8}$	0,699	4,25
Cs	7,3	0,45	0,019	$5{,}21 \times 10^{-6}$	$4{,}03 \times 10^{-6}$	$4{,}54 \times 10^{9}$	$0{,}070 \times 10^{-8}$	0,846	5,19
Ca	10,2	0,54	0,023	$6{,}45 \times 10^{-6}$	$5{,}80 \times 10^{-6}$	$3{,}824 \times 10^{9}$	$0{,}0464 \times 10^{-8}$	0,853	3,42
Sr	9,4	0,47	0,019	$5{,}44 \times 10^{-6}$	$5{,}18 \times 10^{-6}$	$4{,}38 \times 10^{9}$	$0{,}0596 \times 10^{-8}$	1,194	4,40
Ba	7,8	0,52	0,022	$6{,}02 \times 10^{-6}$	$5{,}03 \times 10^{-6}$	$3{,}937 \times 10^{9}$	$0{,}0823 \times 10^{-8}$	1,95	6,10
Zn	11,5	2,18	0,091	$25{,}20 \times 10^{-6}$	$8{,}19 \times 10^{-6}$	$0{,}951 \times 10^{9}$	$0{,}240 \times 10^{-8}$	15,28	17,63
Zn	99,2	2,90	0,120	$33{,}5 \times 10^{-6}$	$14{,}21 \times 10^{-6}$	$0{,}936 \times 10^{9}$	$0{,}365 \times 10^{-8}$	20,7	23,5
Cd	8,7	1,45	0,059	$16{,}8 \times 10^{-6}$	$7{,}16 \times 10^{-6}$	$1{,}416 \times 10^{9}$	$0{,}208 \times 10^{-8}$	12,53	15,37
Cd	99,1	2,96	0,123	$34{,}2 \times 10^{-6}$	$12{,}63 \times 10^{-6}$	$0{,}917 \times 10^{9}$	$0{,}488 \times 10^{-8}$	25,6	31,4
Pb	9,4	1,50	0,062	$17{,}36 \times 10^{-6}$	$6{,}43 \times 10^{-6}$	$1{,}872 \times 10^{9}$	$0{,}292 \times 10^{-8}$	17,1	21,6
Pb	99,2	1,92	0,080	$22{,}1 \times 10^{-6}$	$11{,}29 \times 10^{-6}$	$1{,}414 \times 10^{9}$	$0{,}430 \times 10^{-8}$	21,9	27,6
Sn	10,7	1,53	0,064	$17{,}7 \times 10^{-6}$	$6{,}73 \times 10^{-6}$	$1{,}352 \times 10^{9}$	$0{,}227 \times 10^{-8}$	11,15	16,7
Tl	11,5	0,87	0,036	$10{,}0 \times 10^{-6}$	$6{,}65 \times 10^{-6}$	$2{,}385 \times 10^{9}$	$0{,}169 \times 10^{-8}$	10,31	12,43
Au[1])	11,0	0,72	0,030	$8{,}33 \times 10^{-6}$	$7{,}89 \times 10^{-6}$	$2{,}88 \times 10^{9}$	$0{,}137 \times 10^{-8}$	13,9	10,1

1) Die angeführte Diffusionskonstante von Au in Hg ist von Roberts-Austen ermittelt (Nature 54. p. 55. 1898; Proc. of Roy. Soc. of London 59. p. 283. 1896.

In Tab. 21 sind die beobachteten und berechneten Temperaturkoeffizienten nebeneinander angeführt.

Tabelle 21.

	Berechnet α	Beobachtet α
Zn	0,00838	0,00377
Cd	0,00846	0,0115
Pb	0,00844	0,00311

Resultate.

§ 27. Die Diffusionskonstanten von Metallen in Hg sind ermittelt worden nach der von Graham für die Bestimmung der Diffusionskonstanten von Salzen in Lösungsmitteln benutzten Methode. Die Resultate stimmen mit anderweitigen Messungen überein.

Neu bestimmt worden sind die Diffusionskonstanten von Li, Na, K, Rb, Cs, Ca, Sr, Ba, Sn und Tl in Hg.

Die Temperaturkoeffizienten der Diffusionskonstanten von Zn, Cd, Pb sind ermittelt worden.

Die unter der Hypothese der Einatomigkeit der in Hg gelösten Metalle berechneten Diffusionskonstanten der Alkalien und Erdalkalien, sowie die des Thalliums in Hg stimmen mit den beobachteten nahezu überein.

Die Eigenschaften der Amalgame der Alkalien, Erdalkalien und des Thalliums bezüglich ihres elektromotorischen Verhaltens und der Geschwindigkeit, mit der diese Metalle in Hg diffundieren, lassen sich innerhalb der bis jetzt erreichten Genauigkeitsgrenzen durch die Einatomigkeit dieser Metalle in Hg-Lösung erklären.

Bei den Schwermetallen Zn, Cd, Pb, Sn werden sowohl die Diffusionskonstanten, wie auch deren Temperaturkoeffizienten durch die theoretischen Betrachtungen nicht dargestellt.

Meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. G. Meyer, erlaube ich mir an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für die Anregung zu vorliegender Arbeit auszusprechen, sowie für das rege und fördernde Interesse, welches er stets derselben entgegengebracht hat.

Freiburg i. B., Physik.-Chemisches Institut, April 1907.

(Eingegangen 30. April 1907.)

12. *Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie;* *von A. Einstein.*

Das Relativitätsprinzip führt in Verbindung mit den Maxwellschen Gleichungen zu der Folgerung, daß die Trägheit eines Körpers mit dessen Energieinhalt in ganz bestimmter Weise wachse bez. abnehme. Betrachtet man nämlich einen Körper, der gleichzeitig nach zwei entgegengesetzten Richtungen eine bestimmte Strahlungsenergie aussendet, und untersucht man diesen Vorgang von zwei relativ zueinander gleichförmig bewegten Koordinatensystemen aus [1]), von denen das eine relativ zu dem Körper ruht, und wendet man auf den Vorgang — von beiden Koordinatensystemen aus — das Energieprinzip an, so gelangt man zu dem Resultat, daß einem Energiezuwachs ΔE des betrachteten Körpers stets ein Massenzuwachs $\Delta E / V^2$ entsprechen müsse, wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Der Umstand, daß der dort behandelte spezielle Fall eine Annahme von so außerordentlicher Allgemeinheit (über die Abhängigkeit der Trägheit von der Energie) notwendig macht, fordert dazu auf, in allgemeinerer Weise die Notwendigkeit bez. Berechtigung der genannten Annahme zu prüfen. Insbesondere erhebt sich die Frage: Führen nicht andere spezielle Fälle zu mit der genannten Annahme unvereinbaren Folgerungen? Einen ersten Schritt in dieser Hinsicht habe ich letztes Jahr unternommen [2]), indem ich zeigte, daß jene Annahme den Widerspruch der Elektrodynamik mit dem Prinzip von der Konstanz der Schwerpunktsbewegung (mindestens was die Glieder erster Ordnung anbelangt) aufhebt.

Die *allgemeine* Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist darum vorläufig nicht möglich, weil wir ein vollständiges, dem

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 18. p. 639. 1905.
2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 20. p. 627. 1906.

Relativitätsprinzip entsprechendes Weltbild einstweilen nicht besitzen. Wir müssen uns vielmehr auf die speziellen Fälle beschränken, welche wir ohne Willkür vom Standpunkt der Relativitätselektrodynamik gegenwärtig behandeln können. Zwei solche Fälle werden wir im folgenden betrachten; bei dem ersten derselben besteht das System, dessen träge Masse untersucht werden soll, in einem starren, starr elektrisierten Körper, bei dem zweiten Fall aus einer Anzahl gleichförmig bewegter Massenpunkte, welche aufeinander keine Kräfte ausüben.

Bevor ich mit der Untersuchung beginne, muß ich hier noch eine Bemerkung über den mutmaßlichen Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum einschieben, um einem naheliegenden Einwand zu begegnen. In früheren Arbeiten habe ich gezeigt, daß unser heutiges elektromechanisches Weltbild nicht geeignet ist, die Entropieeigenschaften der Strahlung sowie die Gesetzmäßigkeiten der Emission und Absorption der Strahlung und die der spezifischen Wärme zu erklären; es ist vielmehr nach meiner Meinung nötig anzunehmen, daß die Beschaffenheit eines jeglichen periodischen Prozesses eine derartige ist, daß eine Umsetzung der Energie nur in bestimmten Quanten von endlicher Größe (Lichtquanten) vor sich gehen kann, daß also die Mannigfaltigkeit der in Wirklichkeit möglichen Prozesse eine kleinere ist als die Mannigfaltigkeit der im Sinne unserer heutigen theoretischen Anschauungen möglichen Prozesse.[1]) Einen Strahlungsvorgang im besonderen hätten wir uns so zu denken, daß der momentane elektromagnetische Zustand in einem Raumteile durch eine *endliche* Zahl von Größen vollständig bestimmt sei — im Gegensatze zur Vektorentheorie der Strahlung. Solange wir jedoch nicht im Besitz eines Bildes sind, welches den genannten Forderungen entspricht, werden wir uns naturgemäß in allen Fragen, welche nicht Entropieverhältnisse sowie Umwandlungen elementar kleiner Energiemengen betreffen, der gegenwärtigen Theorie bedienen, ohne fürchten zu müssen, dadurch zu unrichtigen Resultaten zu gelangen. Wie ich mir die heutige Sachlage in diesen Fragen denke, kann

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 182. 1905; 20. p. 199. 1906 und 22. p. 180. 1907.

ich am anschaulichsten durch folgenden fingierten Fall illustrieren.

Man denke sich, daß die molekularkinetische Theorie der Wärme noch nicht aufgestellt, daß aber mit voller Sicherheit nachgewiesen sei, daß die Brownsche Bewegung (Bewegung von in Flüssigkeiten suspendierten Teilchen) nicht auf äußerer Energiezufuhr beruhe, sondern daß klar erkannt sei, daß jene Bewegungen mit Hilfe der Mecbanik und Thermodynamik nicht erklärt werden können. Man würde bei dieser Sachlage mit Recht zu dem Schlusse geführt, daß eine tiefgreifende Änderung der theoretischen Grundlagen Platz greifen müsse. Trotzdem würde sich aber niemand scheuen, bei Behandlung aller Fragen, welche sich nicht auf Momentanzustände in kleinen Raumteilen beziehen, die Grundgleichungen der Mechanik und Thermodynamik anzuwenden. In diesem Sinne können wir nach meiner Meinung mit Zuversicht unsere Betrachtungen auf die Maxwellschen Gleichungen stützen.

Es scheint mir in der Natur der Sache zu liegen, daß das Nachfolgende zum Teil bereits von anderen Autoren klargestellt sein dürfte. Mit Rücksicht darauf jedoch, daß hier die betreffenden Fragen von einem neuen Gesichtspunkt aus behandelt sind, glaubte ich, von einer für mich sehr umständlichen Durchmusterung der Literatur absehen zu dürfen, zumal zu hoffen ist, daß diese Lücke von anderen Autoren noch ausgefüllt werden wird, wie dies in dankenswerter Weise bei meiner ersten Arbeit über das Relativitätsprinzip durch Hrn. Planck und Hrn. Kaufmann bereits geschehen ist.

§ 1. Über die kinetische Energie eines in gleichförmiger Translation begriffenen, äußeren Kräften unterworfenen starren Körpers.

Wir betrachten einen in gleichförmiger Translationsbewegung (Geschwindigkeit v) in Richtung der wachsenden x-Koordinate eines ruhend gedachten Koordinatensystems (x, y, z) befindlichen starren Körper. Wirken äußere Kräfte nicht auf ihn, so ist nach der Relativitätstheorie seine kinetische Energie K_0 gegeben durch die Gleichung[1])

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 917 ff. 1905.

$$K_0 = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\},$$

wobei μ seine Masse (im gewöhnlichen Sinne) und V die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Wir wollen nun zeigen, daß nach der Relativitätstheorie dieser Ausdruck nicht mehr gilt, falls äußere Kräfte auf den Körper wirken, welche einander das Gleichgewicht halten. Um den Fall behandeln zu können, müssen wir voraussetzen, daß jene Kräfte elektrodynamische seien. Wir denken uns daher den Körper starr elektrisiert (mit kontinuierlich verteilter Elektrizität), und es wirke auf ihn ein elektromagnetisches Kraftfeld. Die elektrische Dichte denken wir uns allenthalben als sehr gering und das Kraftfeld als intensiv, derart, daß die den Wechselwirkungen zwischen den elektrischen Massen des Körpers entsprechenden Kräfte gegenüber den vom äußeren Kraftfelde auf die elektrischen Ladungen des Körpers ausgeübten Kräfte vernachlässigt werden können.[1]) Die von dem Kraftfeld auf den Körper zwischen den Zeiten t_0 und t_1 übertragene Energie ΔE ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\Delta E = \int_{t_0}^{t_1} dt \int v X \frac{\varrho}{4\pi} \, dx \, dy \, dz,$$

wobei das Raumintegral über den Körper zu erstrecken und

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x}$$

gesetzt ist. Diesen Ausdruck transformieren wir nach den in der oben zitierten Abhandlung angegebenen Transformationsgleichungen[2]) auf dasjenige Ort-Zeitsystem (ξ, η, ζ, τ), welches einem relativ zu dem Körper ruhenden, zu (x, y, z) parallelachsigen Koordinatensystem entspricht. Man erhält so in einer Bezeichnung, welche der in jener Abhandlung benutzten genau entspricht, nach einfacher Rechnung

$$\Delta E = \int\int \beta v X' \frac{\varrho'}{4\pi} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, d\tau,$$

1) Wir führen diese Annahme ein, um annehmen zu können, daß die wirkenden Kräfte vermöge der Art, wie sie erzeugt sind, keinen beschränkenden Bedingungen unterworfen seien.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. §§ 3 u. 6. 1905.

wobei β wie dort den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

bedeutet. Es ist zu beachten, daß gemäß unseren Voraussetzungen die Kräfte X' keine beliebigen sein dürfen. Sie müssen vielmehr zu jeder Zeit so beschaffen sein, daß der betrachtete Körper keine Beschleunigung erfährt. Hierfür erhält man nach einem Satze der Statik die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung, daß von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet die Summe der X-Komponenten der auf den Körper wirkenden Kräfte stets verschwindet. Man hat also für jedes τ:

$$\int X' \varrho' \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 0 .$$

Wären also die Grenzen für τ in dem obigen Integralausdruck für ΔE von ξ, η, ζ unabhängig, so wäre $\Delta E = 0$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Aus der Transformationsgleichung

$$t = \beta\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right)$$

folgt nämlich unmittelbar, daß die Zeitgrenzen im bewegten System sind:

$$\tau = \frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi .$$

Wir denken uns das Integral im Ausdruck für ΔE in drei Teile zerlegt.

Der erste Teil umfasse die Zeiten τ zwischen

$$\frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{und} \quad \frac{t_0}{\beta},$$

der zweite Teil zwischen

$$\frac{t_0}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{t_1}{\beta},$$

der dritte zwischen

$$\frac{t_1}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi .$$

Der zweite Teil verschwindet, weil er von ξ, η, ζ unabhängige Zeitgrenzen hat. Der erste und dritte Teil hat überhaupt nur dann einen bestimmten Wert, wenn die Annahme

gemacht wird, daß in der Nähe der Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ die auf den Körper wirkenden Kräfte von der Zeit unabhängig seien, derart, daß für alle Punkte des starren Körpers zwischen den Zeiten

$$\tau = \frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t_0}{\beta}$$

bez. zwischen

$$\tau = \frac{t_1}{\beta} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi$$

die elektrische Kraft X' von der Zeit unabhängig ist. Nennt man X_0' bez. X_1' die in diesen beiden Zeiträumen vorhandenen X', so erhält man:

$$\Delta E = -\int \frac{v^2}{V^2}\beta \frac{\xi X_1' \varrho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int \frac{v^2}{V^2}\beta \frac{\xi X_0' \varrho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Nimmt man ferner an, daß am Anfang ($t = t_0$) keine Kräfte auf den Körper wirken, so verschwindet das zweite dieser Integrale. Mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{X_1' \varrho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

die ξ-Komponente K_ξ der auf das Raumelement wirkenden ponderomotorischen Kraft ist, erhält man

$$\Delta E = -\frac{\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \sum(\xi K_\xi),$$

wobei die Summe über alle Massenelemente des Körpers zu erstrecken ist.

Wir haben also folgendes merkwürdige Resultat erhalten. Setzt man einen starren Körper, auf den ursprünglich keine Kräfte wirken, dem Einflusse von Kräften aus, welche dem Körper keine Beschleunigung erteilen, so leisten diese Kräfte — von einem relativ zu dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet — eine Arbeit ΔE auf den Körper, welche lediglich abhängt von der endgültigen Kräfteverteilung und der Translationsgeschwindigkeit. Nach dem Energieprinzip folgt hieraus unmittelbar, daß die kinetische Energie eines Kräften unterworfenen starren Körpers um ΔE größer ist als

die kinetische Energie desselben, ebenso rasch bewegten Körpers, falls keine Kräfte auf denselben wirken.

§ 2. Über die Trägheit eines elektrisch geladenen starren Körpers.

Wir betrachten abermals einen starren, starr elektrisierten Körper, welcher eine gleichförmige Translationsbewegung im Sinne der wachsenden x-Koordinaten eines „ruhenden" Koordinatensystems ausführt (Geschwindigkeit v). Ein äußeres elektromagnetisches Kraftfeld sei nicht vorhanden. Wir wollen indessen jetzt das von den elektrischen Massen des Körpers erzeugte elektromagnetische Feld berücksichtigen. Wir berechnen zunächst die elektromagnetische Energie

$$E_e = \frac{1}{8\pi}\int (X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Zu diesem Zweck transformieren wir diesen Ausdruck unter Benutzung der in der mehrfach zitierten Abhandlung enthaltenen Transformationsgleichungen, indem wir unter dem Integral Größen einführen, welche sich auf ein mit dem Körper bewegtes Koordinatensystem beziehen. Wir erhalten so:

$$E_e = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{\beta}\left[X'^2 + \frac{1+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}(Y'^2 + Z'^2)\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Es ist zu beachten, daß der Wert dieses Ausdruckes abhängt von der Orientierung des starren Körpers relativ zur Bewegungsrichtung. Wenn sich daher die gesamte kinetische Energie des elektrisierten Körpers ausschließlich zusammensetzte aus der kinetischen Energie K_0, welche dem Körper wegen seiner ponderabeln Masse zukommt, und dem Überschuß der elektromagnetischen Energie des bewegten Körpers über die elektrostatische Energie des Körpers für den Fall der Ruhe, so wären wir damit zu einem Widerspruche gelangt, wie leicht aus folgendem zu ersehen ist.

Wir denken uns, der betrachtete Körper sei relativ zu dem mitbewegten Koordinatensystem in unendlich langsamer Drehung begriffen, ohne daß äußere Einwirkungen während dieser Bewegung auf ihn stattfinden. Es ist klar, daß diese

Bewegung kräftefrei möglich sein muß, da ja nach dem Relativitätsprinzip die Bewegungsgesetze des Körpers relativ zu dem mitbewegten System dieselben sind wie die Bewegungsgesetze in bezug auf ein „ruhendes" System. Wir betrachten nun den gleichförmig bewegten und unendlich langsam sich drehenden Körper vom „ruhenden" System aus. Da die Drehung unendlich langsam sein soll, trägt sie zur kinetischen Energie nichts bei. Der Ausdruck der kinetischen Energie ist daher in dem betrachteten Fall derselbe wie wenn keine Drehung, sondern ausschließlich gleichförmige Paralleltranslation stattfände. Da nun der Körper relativ zur Bewegungsrichtung im Laufe der Bewegung verschiedene (beliebige) Lagen annimmt, und während der ganzen Bewegung das Energieprinzip gelten muß, so ist klar, daß eine Abhängigkeit der kinetischen Energie eines in Translationsbewegung begriffenen elektrisierten Körpers von der Orientierung unmöglich ist.

Dieser Widerspruch wird durch die Resultate des vorigen Paragraphen beseitigt. Die kinetische Energie des betrachteten Körpers kann nämlich nicht berechnet werden wie die eines starren Körpers, auf den keine Kräfte wirken. Wir haben vielmehr gemäß § 1 zu berücksichtigen, daß unser starrer Körper Kräften unterworfen ist, welche ihre Ursache in der Wechselwirkung zwischen den elektrischen Massen haben. Bezeichnen wir also mit K_0 die kinetische Energie für den Fall, daß keine elektrischen Ladungen vorhanden sind, so erhalten wir für die gesamte kinetische Energie K des Körpers den Ausdruck

$$K = K_0 + \Delta E + (E_e - E_e),$$

wobei E_e die elektrostatische Energie des betrachteten Körpers im Zustand der Ruhe bedeutet. In unserem Falle hat man

$$\Delta E = -\frac{v^2}{V^2}\beta^2\frac{1}{4\pi}\int \xi X'\left(\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

woraus man durch partielle Integration mit Berücksichtigung des Umstandes, daß X', Y', Z' von einem Potential ableitbar sind, erhält

$$\Delta E = \frac{v^2}{V^2}\beta\frac{1}{8\pi}\int (X'^2 - Y'^2 - Z'^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Berücksichtigt man die im § 1 angegebenen Ausdrücke für K_0 und β, so erhält man für die kinetische Energie des elektrisierten starren Körpers den Ausdruck

$$K = \left(\mu + \frac{E_e}{V^2}\right) \cdot V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right).$$

Dieser Ausdruck ist, wie es sein muß, von der Orientierung des Körpers relativ zur Translationsrichtung unabhängig. Vergleicht man den Ausdruck für K mit dem für die Energie K_0 eines nicht elektrisch geladenen Körpers

$$K_0 = \mu V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right),$$

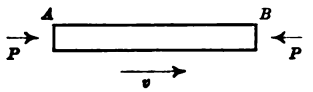
so erkennt man, daß der elektrostatisch geladene Körper eine träge Masse besitzt, welche die des nicht geladenen Körpers um die durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit dividierte elektrostatische Energie übertrifft. Der Satz von der Trägheit der Energie wird also durch unser Resultat in dem behandelten speziellen Fall bestätigt.

§ 3. Bemerkungen betreffend die Dynamik des starren Körpers.

Nach dem Vorangehenden könnte es scheinen, als ob wir von dem Ziele, eine dem Relativitätsprinzip entsprechende Dynamik der Paralleltranslation des starren Körpers zu schaffen, nicht mehr weit entfernt wären. Man muß sich indessen daran erinnern, daß die im § 1 ausgeführte Untersuchung die Energie des Kräften unterworfenen starren Körpers nur für den Fall lieferte, daß jene Kräfte zeitlich konstant sind. Wenn zur Zeit t_1 die Kräfte X' von der Zeit abhängen, so erweist sich die Arbeit ΔE, also auch die Energie des starren Körpers, nicht nur als abhängig von denjenigen Kräften, welche zu *einer* bestimmten Zeit herrschen.

Um die hier vorliegende Schwierigkeit möglichst drastisch zu beleuchten, denken wir uns folgenden einfachen Spezialfall. Wir betrachten einen starren Stab AB, welcher relativ zu einem Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ruhe, wobei die Stabachse in der ζ-Achse ruhe. Zu einer bestimmten Zeit τ_0 mögen

auf die Stabenden für ganz kurze Zeit entgegengesetzt gleiche Kräfte P wirken, während der Stab in allen übrigen Zeiten Kräften nicht unterworfen sei. Es ist klar, daß die genannte, zur Zeit τ_0 auf den Stab ausgeübte Wirkung eine Bewegung des Stabes *nicht* erzeugt. Wir betrachten nun genau denselben Vorgang von einem zum vorher benutzten parallelachsigen Koordinatensystem aus, relativ zu welchem sich unser Stab in der Richtung A—B mit der Geschwindigkeit v bewegt. Von dem letztgenannten Koordinatensystem aus beurteilt, wirken nun aber die Kraftimpulse in A und B nicht gleichzeitig; der Impuls in B ist vielmehr gegen den Impuls in A verspätet um $l\beta(v/V^2)$ Zeiteinheiten, wobei l die (ruhend gemessene) Stablänge bedeutet. Wir sind also zu dem folgenden sonderbar aussehenden Resultat gekommen. Auf den bewegten Stab AB wirkt zuerst in A ein Kraftimpuls und darauf nach einiger Zeit ein entgegengesetzter in B. Diese beiden Kraftimpulse kompensieren einander derart, daß die Bewegung des Stabes durch sie nicht modifiziert wird. Noch merkwürdiger erscheint der Fall, wenn wir nach der Energie des Stabes fragen zu einer Zeit, in welcher der Impuls in A bereits vorbei ist, während der Impuls in B noch nicht zu wirken begonnen hat. Der Impuls in A hat auf den Stab Arbeit übertragen (weil der Stab bewegt ist); um diese Arbeit muß sich also die Energie des Stabes vermehrt haben. Gleichwohl hat sich weder die Geschwindigkeit des Stabes noch sonst eine auf ihn Bezug habende Größe, von der wir die Energiefunktion des Stabes abhängen lassen könnten, geändert. Es scheint also eine Verletzung des Energieprinzipes vorzuliegen.



Die *prinzipielle* Lösung dieser Schwierigkeit liegt auf der Hand. Indem wir implizite annehmen, durch die auf den Stab wirkenden Kräfte und durch die in demselben Augenblick herrschende Stabgeschwindigkeit den Momentanzustand des Stabes vollständig bestimmen zu können, nehmen wir an, daß ein Geschwindigkeitszuwachs des Körpers durch die ihn erzeugende, irgendwo am Körper angreifende Kraft *momentan* erzeugt werde, daß also die Ausbreitung der auf einen Punkt des Körpers ausgeübten Kraft über den ganzen Körper keine

Zeit erfordere. Eine derartige Annahme ist, wie nachher gezeigt wird, mit dem Relativitätsprinzip nicht vereinbar. Wir sind also in unserem Falle offenbar genötigt, bei Einwirkung des Impulses in A eine Zustandsänderung unbekannter Qualität im Körper anzunehmen, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit in demselben ausbreitet und in kurzer Zeit eine Beschleunigung des Körpers bewirkt, falls innerhalb dieser Zeit nicht noch andere Kräfte auf den Körper wirken, deren Wirkungen die der erstgenannten kompensieren. Wenn also die Relativitätselektrodynamik richtig ist, sind wir noch weit davon entfernt, eine Dynamik der Paralleltranslation des starren Körpers zu besitzen.

Wir wollen nun zeigen, daß nicht nur die Annahme *momentaner* Ausbreitung irgend einer Wirkung, sondern allgemeiner jede Annahme von der Ausbreitung einer Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit mit der Relativitätstheorie nicht vereinbar ist.

Längs der x-Achse eines Koordinatensystems (x, y, z) erstrecke sich ein Materialstreifen, relativ zu welchem sich eine gewisse Wirkung mit der Geschwindigkeit W fortzupflanzen vermöge, und es möge sowohl in $x = 0$ (Punkt A) als auch in $x = + l$ (Punkt B) sich je ein relativ zum Koordinatensystem (x, y, z) ruhender Beobachter befinden. Der Beobachter in A sende vermittelst der oben genannten Wirkung Zeichen zu dem Beobachter in B durch den Materialstreifen, welch letzterer nicht ruhe, sondern sich mit der Geschwindigkeit $v (< V)$ in der negativen x-Richtung bewege. Das Zeichen wird dann, wie aus § 5 (l. c.) hervorgeht, mit der Geschwindigkeit

$$\frac{W - v}{1 - \frac{Wv}{V^2}}$$

von A nach B übertragen. Die Zeit T, welche zwischen Zeichengebung in A und Zeichenempfang in B verstreicht, ist also

$$T = l \frac{1 - \frac{Wv}{V^2}}{W - v}.$$

Die Geschwindigkeit v kann jeglichen Wert annehmen, der kleiner ist als V. Wenn also $W > V$ ist, wie wir angenommen haben, so kann man v stets so wählen, daß $T < 0$ ist. Dies Resultat besagt, daß wir einen Übertragungs-

mechanismus für möglich halten müßten, bei dessen Benutzung die erzielte Wirkung der (etwa von einem Willensakt begleiteten) Ursache *vorangeht.* Wenn dies Resultat auch, meiner Meinung nach, rein logisch genommen keinen Widerspruch enthält, so widerstreitet es doch so unbedingt dem Charakter unserer gesamten Erfahrung, daß durch dasselbe die Unmöglichkeit der Annahme $W > V$ zur Genüge erwiesen ist.

§ 4. Über die Energie eines Systems, welches aus einer Anzahl kräftefrei bewegter Massenpunkte besteht.

Betrachtet man den Ausdruck für die kinetische Energie k eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Massenpunktes (μ)

$$k = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\},$$

so fällt auf, daß dieser Ausdruck die Gestalt einer Differenz besitzt. Es ist nämlich

$$k = \left| \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \right|_{v=0}^{v=v}.$$

Frägt man nicht speziell nach der kinetischen Energie, sondern nach der Energie ε des bewegten Massenpunktes schlechtweg, so ist $\varepsilon = k +$ konst. Während man nun in der klassischen Mechanik die willkürliche Konstante in dieser Gleichung am bequemsten verschwinden läßt, erhält man in der Relativitätsmechanik den einfachsten Ausdruck für ε, indem man den Nullpunkt der Energie so wählt, daß die Energie ε_0 für den ruhenden Massenpunkt μV^2 gesetzt wird.[1]) Man erhält dann

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

An dieser Wahl des Nullpunktes der Energie werden wir im folgenden festhalten.

---

1) Es ist zu beachten, daß die vereinfachende Festsetzung $\mu V^2 = \varepsilon_0$ zugleich der Ausdruck des Prinzipes der Äquivalenz von Masse und Energie ist, und daß im Falle des masselosen elektrisierten Körpers ε_0 nichts anderes ist als seine elektrostatische Energie.

Wir führen nun wieder die zwei stets relativ zueinander bewegten Koordinatensysteme (x, y, z) und (ξ, η, ζ) ein. Relativ zu (ξ, η, ζ) sei ein Massenpunkt μ mit der Geschwindigkeit w bewegt in einer Richtung, welche mit der positiven ξ-Achse den Winkel φ bilde. Unter Benutzung der in § 5 (l. c.) hergeleiteten Beziehungen läßt sich leicht die Energie ε des Massenpunktes, bezogen auf das System (x, y, z) bestimmen. Man erhält

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1 + \frac{v w \cos\varphi}{V^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}\sqrt{1 - \frac{w^2}{V^2}}}.$$

Sind mehrere Massenpunkte vorhanden, denen verschiedene Massen, Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen zukommen, so erhalten wir für deren Gesamtenergie E den Ausdruck

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left\{ \sum \mu V^2 . \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} \right\} + \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left\{ \sum \frac{\mu w \cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} \right\}.$$

Bis jetzt haben wir über den Bewegungszustand des Systems (ξ, η, ζ) relativ zu den bewegten Massen nichts festgesetzt. Wir können und wollen hierüber nun folgende, den Bewegungszustand von (ξ, η, ζ) eindeutig bestimmende Bedingungen festsetzen:

$$\sum \frac{\mu w_\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} = 0, \quad \sum \frac{\mu w_\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} = 0,$$

$$\sum \frac{\mu w_\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} = 0,$$

wobei w_ξ, w_η, w_ζ die Komponenten von w bezeichnen. Dieser Festsetzung entspricht in der klassischen Mechanik die Bedingung, daß das Bewegungsmoment des Massensystems in bezug auf (ξ, η, ζ) verschwinde. Dann erhalten wir

$$E = \left(\sum \mu V^2 . \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} \right) . \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

oder, indem man die Energie E_0 des Systems relativ zum System (ξ, η, ζ) einführt:

$$E = \frac{E_0}{V^2} \cdot V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Massenpunktes

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

so erhält man folgendes Resultat: In bezug auf die Abhängigkeit der Energie vom Bewegungszustand des Koordinatensystems, auf welches die Vorgänge bezogen werden, läßt sich ein System gleichförmig bewegter Massenpunkte ersetzen durch einen einzigen Massenpunkt von der Masse $\mu = E_0 / V^2$.

Ein System bewegter Massenpunkte besitzt also — als Ganzes genommen — desto mehr Trägheit, je rascher die Massenpunkte relativ zueinander bewegt sind. Die Abhängigkeit ist wieder gegeben durch das in der Einleitung angegebene Gesetz.

Bern, Mai 1907.

(Eingegangen 14. Mai 1907.)

13. *Über die van der Waalssche Formel;* *von K. Fuchs.*

O. Lehmann kämpft in einem Artikel[1]) für die Auffassung, daß ein Wechsel der Aggregatsform notwendig mit einer Veränderung der Moleküle verbunden sei. Da der Artikel an mich gerichtet ist, muß ich nun wohl in dieser Frage auch Stellung nehmen.

1. O. Lehmann wirft mir zunächst vor, ich hätte[2]) keinen seiner aus Tatsachen geschöpften Gründe gegen die Konstanz der Moleküle widerlegt. Das ist richtig; ich habe auch die Konstanz der Moleküle nie behauptet; ich habe sogar eine Theorie der kristallographischen Polymorphie auf Grund *veränderlicher* Moleküle gezeichnet.

O. Lehmann fährt fort: „K. Fuchs versucht nur, meine Ansicht über die Natur des kritischen Zustandes mit der Theorie von van der Waals zu kombinieren, was unmöglich ist.“ Das habe ich nicht versucht.

Das Verhältnis zwischen O. Lehmann, van der Waals und mir läßt sich folgendermaßen darlegen. Wenige Jahre nach van der Waals, ohne Kenntnis von van der Waals und ohne Kenntnis von O. Lehmann wollte ich mir den Unterschied von Dampf und Flüssigkeit klar machen und versuchte die Rechnung zunächst durch die Annahme *unveränderlicher* Moleküle zu vereinfachen. Ich dachte, zwischen der Flüssigkeit und dem darüber liegenden Dampfe müsse eine Übergangsschicht liegen, in der die Kurve der Dichtigkeit ein stetiges Gefälle hat. Da berechnete ich denn den Binnendruck für den allgemeinen Fall, d. h. für einen Punkt, wo die Kurve ein Gefälle hat, und fand drei Glieder: eines das nur von der Dichte im betreffenden Punkte abhängt; eines das vom Gefälle, und eines das von der Gefällsänderung abhängig ist. (Ich fand eigentlich auch mehr Glieder, z. B. für den Fall

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 22. p. 469. 1907.

2) K. Fuchs, Ann. d. Phys. 21. p. 393 u. p. 814. 1906.

einer nicht ebenen, sondern sphärisch gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche, doch kümmern uns gegenwärtig nur die genannten drei Glieder.) Als ich nun die Gleichgewichtsbedingung aufstellte, daß in jedem Punkte im Inneren des geschlossenen Gefäßes die Expansivkraft, die Kontraktivkraft (Binnendruck) und der äußere Druck des eingeschlossenen Stoffes die Summe Null geben müssen, da fand es sich, daß meine Zustandsgleichung anstandslos den ganzen Verlauf der Dichtigkeitskurve *lückenlos* gab und überall *stabiles* Gleichgewicht nachwies. Einen kritischen Zustand kennt meine Gleichung nicht. Da war es klar, daß die Beziehungen zwischen Flüssigkeit und Dampf sich *schon* unter der Annahme unveränderlicher Moleküle durch eine Zustandsgleichung mathematisch veranschaulichen ließen. Damit ist aber keineswegs gesagt, daß das *nur* unter der Annahme unveränderlicher Moleküle möglich sei.

van der Waals war minder glücklich. Er fand für den Binnendruck nur das erste Glied, nicht aber auch die beiden anderen, die das Gefälle und die Gefällsänderung, also den ersten und zweiten Differentialquotienten enthielten. Das Fehlen dieser zwei Glieder hat nun alles Unheil angerichtet. Während meine Gleichung eine Differentialgleichung ist, die eine zusammenhängende, stetige Dichtigkeitskurve gibt, ist die Gleichung von van der Waals eine algebraische Gleichung dritten Grades, die nur *drei* Gleichgewichtsdichten angibt; sie sind identisch mit den Gleichgewichtsdichten, die meine Gleichung in den drei Fällen gibt, wo die beiden Gefällsglieder von selbst aus meiner Gleichung ausfallen. van der Waals fand also von der ganzen Dichtigkeitskurve nur erstens die geradlinige Strecke, die der homogenen Flüssigkeit *unterhalb* der Übergangsregion entspricht, und wo beide Gefällsglieder gleich Null werden; er fand zweitens die geradlinige Strecke, die dem homogenen Dampf *oberhalb* der Übergangsregion entspricht, wo ebenfalls beide Gefällsglieder gleich Null werden; er fand drittens von der ganzen Übergangskurve nur einen einzigen isolierten *Punkt* in der Gegend des Wendepunktes, wo meine beiden Gefällsglieder einander als gleich und entgegengesetzt aufheben; die ganze Übergangskurve fehlt, mit Ausnahme des einen isolierten Punktes der kritischen Dichte. Die beiden Lücken zwischen diesem isolierten Punkt

und den beiden geradlinigen Kurvenstrecken sind die Bresche, gegen die O. Lehmann vorgeht.

O. Lehmann greift ein; ich gebe seine Worte und meine Bemerkungen:

O. L.: „Gewöhnlich wird angenommen, daß van der Waals der Nachweis der Identität von Flüssigkeits- und Gasmolekülen gelungen sei."

F. Ein Mathematiker würde sagen, die *Möglichkeit* der Identität von Flüssigkeits- und Gasmolekülen sei nachgewiesen.

O. L.: „In solchem Falle (d. h. wenn die Moleküle unveränderlich wären) müßte der Formel entsprechend die Kontinuität der Kurve bestehen."

F. Nur wenn wir die Sicherheit haben, daß die Formel vollständig ist. Wenn wir von einer vollständigen Formel

$$f(y) + f_1(xy)y' + f_2(xy)y'' + \ldots = c$$

links nur das erste Glied besitzen, dann gibt uns die Restgleichung $f(y) = c$ alle Werte von y, bei denen die Differentialquotienten $y'y'' \ldots$ gleich Null sind oder die Summe der betreffenden Glieder gleich Null ist. Wir haben dann von der ganzen kontinuierlichen Kurve nur einzelne Punkte oder Strecken, also ein diskontinuierliches Bild. Das ist der Fall der van der Waalsschen Formel. Richtig *sind* aber die wenigen gefundenen Werte.

O. L.: „Tatsächlich besteht diese Kontinuität nicht, somit ist die Identität (d. h. die Unveränderlichkeit der Moleküle) ausgeschlossen."

F. Die Diskontinuität der van der Waalsschen Kurve kommt nur vom Fehlen zweier Glieder in der Gleichung und beweist nichts gegen die angenommene Konstanz der Moleküle; sowie man die beiden fehlenden Glieder einsetzt, verschwindet die Diskontinuität, die Bresche, gegen die O. Lehmann vorgeht, schließt sich, und der Kampf ist voraussichtlich aus.

O. L.: „Nur die von mir (1877) angegebene Auffassung ist zulässig (wonach Dampf und Flüssigkeit aus verschiedenen Molekülen bestehen und sich gegenseitig lösen)."

F. Die Formel von van der Waals beweist, daß konstante Moleküle *möglich* sind, beweist aber *nicht*, daß O. Lehmanns Annahme *unmöglich* ist. Mehr würde ich nicht sagen.

O. L.: „Aus der Annahme der Verschiedenheit der Gas- und Flüssigkeitsmoleküle *Kontinuität* der Zustandskurve ableiten, d. h. meine Annahme mit derjenigen von van der Waals vereinigen zu wollen, ist zwecklos."

Das gilt mir. — Ich habe *keine* Verschiedenheit der Moleküle angenommen; ich habe einmal zu meiner eigenen Orientierung eine Zustandsgleichung abgeleitet, und da ergab es sich, daß in der Gleichung von van der Waals zwei Glieder fehlen. Das ist alles. O. Lehmann war mir damals unbekannt. Die zwecklose Vereinigung von van der Waals' und O. Lehmanns Auffassungen habe ich also nicht gewollt, nicht versucht.

Die Gleichung von van der Waals spricht also weder *gegen*, noch *für* O. Lehmanns Theorie der Wechsellösung. Die Gleichung von van der Waals hat aber vorderhand den Vorteil, daß sie Zahlenwerte liefert, sehr viele Erscheinungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt stellt und mathematisch veranschaulicht; den Forscher davor bewahrt, für allerlei Einzelerscheinungen überflüssige Einzelerklärungen zu suchen, und ihm sehr nützliche Anregungen und Fingerzeige gibt, wo es etwas zu entdecken gibt. Selbst wenn einst O. Lehmanns Annahme veränderlicher Moleküle allgemein als richtig anerkannt wird, wird der Grundgedanke der van der Waalsschen Formel, daß der äußere Druck an jedem Punkte gleich dem Exzeß der Expansionskraft über die Kontraktionskraft sein muß, in Geltung bleiben, nur werden die algebraischen Ausdrücke für diese beiden Kräfte nicht mehr so einfach sein, wie in der heutigen Formel. Die heutige van der Waalssche Formel wird dann für die Molekularphysik dieselbe didaktische Bedeutung haben, wie das Bild eines Sonnensystems mit kreisförmigen oder mit rein elliptischen Planetenbahnen für die Astronomie.

2. Irgendwo sage ich von einer Schicht Schrotkugeln: „Die *Schicht* gravitiert also nach dem Dreiecksgitter und nach der Sechseck*form*." Dazu bemerkt O. Lehmann: „Von einem ‚Gravitieren' der Moleküle, d. h. von einer *Abnahme* ihrer Anziehungskraft mit der Entfernung kann keine Rede sein, denn in diesem Falle wäre ein (stabiles) Gleichgewicht zwischen Expansivkraft und Binnendruck unmöglich. . . . Es müßte

Dehnung eines elastischen Körpers Verflüchtigung desselben bewirken, Stauchung Zusammenschrumpfen bis zur Berührung der Moleküle, falls die Moleküle gegeneinander ‚gravitieren' würden." O. Lehmann sagt also, das Gleichgewicht müßte dann ein *labiles* sein.

Das ist ein weit schwererer Angriff gegen van der Waals, als alles bisher Behandelte, und ich halte es für notwendig, die Tragweite dieser Worte darzulegen.

Die Moleküle einer *Flüssigkeit* haben wahrscheinlich schwache, aber verhältnismäßig weit wirkende Anziehungskraft, so daß in die Wirkungssphäre eines Moleküles sehr *viele* Nachbarmoleküle fallen. Auf jedes Molekül wirken dann sehr viele schwache Kräfte in sehr verschiedenen Richtungen und heben einander fast vollständig auf, ihre Resultierende ist so gut wie Null. Die freie Beweglichkeit der Moleküle wird dann durch die Molekularkräfte so gut wie gar nicht behindert; sie ist experimentell überhaupt nicht nachweisbar.

Nehmen wir nun an, der Wirkungsradius der Molekularkräfte werde immer kleiner, die Intensität der Kräfte aber vielleicht immer größer. Dann wird die Anzahl der auf jedes einzelne Molekül wirkenden Kräfte immer kleiner, das gegenseitige Aufheben der Kräfte immer unvollständiger, es ergeben sich an den einzelnen Molekülen immer größere Resultierende; da die Molekularkräfte immer paarweise auftreten, entstehen auf diese Weise immer stärkere Bindungen und Kuppelungen zwischen den Molekülen, die einer gleitenden Deformation immer stärkeren Widerstand entgegensetzen; die Flüssigkeit wird immer zäher und fester, sie erstarrt; wenn sich aber die Molekularanziehungen endlich nur mehr auf die allernächsten Nachbarmoleküle erstrecken, dann heben sich die Kräfte an den einzelnen Molekülen am allerunvollständigsten auf; dann sind die Kuppelungen zwischen den Molekülen am stärksten; der Körper ist am härtesten und sprödesten geworden.[1])

1) Bei steigender Temperatur, also zunehmenden kalorischen Schwingungen, ändern die Resultierenden an den einzelnen Molekülen immer schneller Richtung und Intensität; sie verlieren dadurch immer mehr ihre Wirksamkeit, und der Körper wird einer Flüssigkeit immer ähnlicher. Wenn die Moleküle *ungleich* sind, hat das ein *allmähliches* Weichwerden und Schmelzen des Körpers zur Folge. Das ist aber wieder ein Gedanke für sich.

Es ist schon jetzt erkennbar, daß O. Lehmanns Bild am besten auf solche harte, spröde Körper, auf Stahl, Quarz, Glas u. dgl. paßt. Dennoch wollen wir den Gedanken zuerst im Interesse von van der Waals' Formel an Flüssigkeiten messen.

Die Kontraktivkraft (Binnendruck) in van der Waals' Formel ist tatsächlich unter der Annahme eines *großen* Wirkungsradius der Molekularkräfte berechnet worden, und man hat für den Binnendruck den folgenden Ausdruck gefunden:

$$\frac{2\pi}{3v^2}\int_{r_1}^{r_2} f(r)\, r^3\, dr\,.$$

Hier ist v das Volumen der Masseneinheit der Flüssigkeit, und $f(r)$ ist das Gesetz der zwischen den Grenzen r_1 und r_2 wirkenden Molekularkraft.

Dieser Ausdruck spricht *gegen* O. Lehmann. Er besagt, daß das Gesetz der Molekularkraft ganz *gleichgültig* ist und ganz aus der Rechnung fällt. Mag die Kraft mit der Entfernung wachsen oder abnehmen oder schwanken, für die Kontraktivkraft gibt sie doch lediglich eine Konstante, eben den numerischen Wert des bestimmten Integrales. Ferner besagt der Ausdruck, daß die Kontraktivkraft, mag das Gesetz der Molekularanziehung wie immer lauten, jedenfalls mit wachsendem Volumen v quadratisch *abnimmt*, mit schwindendem Volumen v quadratisch zunimmt, denn v^2 steht im Nenner. Wenn ich recht verstehe, ist es aber gerade das, was O. Lehmann für unannehmbar erklärt, daß der Binnendruck mit wachsendem Volumen abnehmen sollte.

Unser Ausdruck sagt, daß das Gesetz des Binnendruckes als Funktion des Volumens v *für alle Flüssigkeiten dasselbe* ist: der Binnendruck ist dem Quadrat des Volumens umgekehrt proportional, mögen die Flüssigkeiten noch so verschiedene Molekularkräfte haben. Dieses wichtige Gesetz wäre über den Haufen geworfen, der praktische Wert der van der Waalsschen Formel wäre wesentlich vermindert, wenn O. Lehmann recht hätte.

Wer van der Waals' Formel versteht, erkennt auch sofort den Fehler in O. Lehmanns Gedankengang: O. Leh-

mann übersieht, daß bei Stauchung (Verdichtung) der Flüssigkeit der Binnendruck wohl zunimmt, die Expansionskraft aber noch *viel schneller* zunimmt, so daß sie dennoch die Übermacht erlangt. Ebenso würde bei gewaltsamer Volumvergrößerung der Binnendruck wohl abnehmen, die Expansionskraft aber noch *viel schneller* abnehmen, so daß die Kontraktivkraft das Übergewicht erlangt.

Bei Flüssigkeiten bleibt also von O. Lehmanns Gedanken nichts übrig, bei starren, spröden Körpern aber wenig.

O. Lehmann sagt: „Erstarrung einer Flüssigkeit ist nur möglich, wenn die Natur der Moleküle sich ändert, und damit die Wirkungsweise ihrer Kräfte. K. Fuchs will auch das nicht zugeben." — O. Lehmann irrt. Das soeben Gesagte zeigt, daß ich für die einfachste Erklärung des Erstarrens eine Änderung der Molekularkräfte, also eine Änderung der Moleküle halte. Ich gehe sogar weiter: ich sage, eine *Flüssigkeit* kann sich aus einer übersättigten Lösung nur dann in *makroskopischen* Tropfen (Mengen) ausscheiden, wenn mit der Ausscheidung auch eine gleichzeitige Änderung der Moleküle verbunden ist. Diese Behauptung stützt sich auf eine Formel, die ebenso positiv ist, wie meine Zustandsgleichung. O. Lehmann mag daraus ersehen, daß ich ihm im Kampfe für die Veränderlichkeit der Moleküle ein Genosse bin; nur van der Waals' Formel halte ich blank.

Preßburg, 14. April 1907.

(Eingegangen 19. April 1907.)

14. *Bestimmung des Widerstandes und der Kapazität mit Gleichstrom und Telephon; von G. Athanasiadis.*

Wir bedienen uns zur Bestimmung von Widerständen und Kapazitäten des Wechselstromes unter Zuhilfenahme der Wheatstoneschen Brücke. Statt dessen können wir auch von dem Gleichstrom einer Stadtleitung Gebrauch machen, welcher von Gleichstrom-Dynamomaschinen herrührt.

Dieser Strom ist ondulatorisch, und beim Einschalten eines Telephones mit passendem Widerstande in den Stromkreis wird ein Ton von konstanter Höhe wahrgenommen, dessen Schwingungszahl gleich der Anzahl Kollektorlamellen ist, welche in 1 Sek. bei jeder Bürste vorbeistreichen. Dieser Ton ist äußerst rein, verstärkt sich und wird selbst von der Entfernung hörbar, wenn wir die Stärke des durch das Telephon gehenden Stromes vergrößern.

Ein solcher Ton kann auch erzeugt werden, wenn wir in den Stromkreis einen Kondensator von großer Kapazität oder zusammen einen Kondensator und ein Telephon einschalten.

Es ist also leicht, bei allen denjenigen Messungen von Widerstand und Kapazität, bei welchen wir Telephon und Wechselströme benutzen, auch Gleichströme anzuwenden. Davon ausgehend, haben wir auch durch eine große Versuchsreihe und strenge Kontrolle der verschiedenen üblichen Methoden und deren Versuchsresultate bestätigt, daß die Messung unter Anwendung von Gleichströmen mit derselben Genauigkeit geschehen kann und geschieht wie mit Wechselströmen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine Wheatstone-Kirchhoffsche Drahtbrücke (Konstruktion Hartmann & Braun, Nr. 389 I oder Nr. 389 a) ohne Induktorien. Mit der Brücke wird ein Kondensator C von 1 Mikrof. (mit der Teilung von 0,1—1), eine leicht schmelzbare Sicherung S und Regulierwiderstand R_1 von 1500—2000 Ohm nach nachstehendem Schema zusammengeschaltet.

Die ganze Einrichtung ist sehr kompendiös und leicht transportabel. Der Stadtstrom wird direkt an den am Unterteil des Brückenkastens sich befindenden Klemmen *a*, *b* geschaltet.

Sie wird auf folgende Weise benutzt:

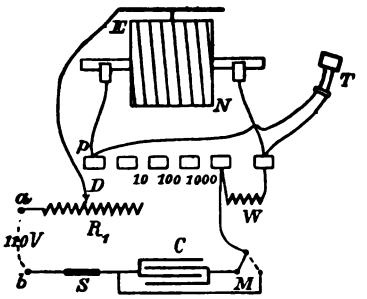
A. Zur Bestimmung eines Widerstandes ohne Selbstinduktion.

B. Zur Bestimmung des Widerstandes von Elektrolyten nach den Methoden von Kohlrausch[1]) und Nernst.[2])

C. Zur Bestimmung der Kapazität von Kondensatoren im Vergleich zu einer bekannten Kapazität (Palaz).

D. Überhaupt zu allen solchen Messungen, bei welchen Induktorium und Telephon gebraucht werden.[3])

Ad A. bedienen wir uns des Gleichstromes unter Ausschaltung des Kondensators *C* mittels des Umschaltknopfes *M*. Die Stromstärke soll dabei 0,5 bis 0,1 Amp. betragen. Bei intensiverem Strom ist die Bestimmung der Lage, bei welcher der Ton aufhört, sehr leicht, sonst wird diese Lage als Mittel zwischen zwei benachbarten Stellungen, bei welchen der Ton hörbar zu werden beginnt, festgestellt.



Diese Messung kann auch beim Ausschalten des Widerstandes R_1 durch Verlegen des Gleitschiebers *D* und Einschalten des Kondensators *C* in den Stromkreis geschehen. In diesem Falle findet kein wesentlicher Verbrauch von Gleichstrom statt, was auch vorteilhafter ist. Die Schätzung von Widerständen bis zu 1000 Ohm geschieht mit einer Annäherung von 0,001.

Ad B. wird stets der Kondensator *C* behufs Vermeidung von Elektrolyse eingeschaltet. Die Messung geschieht mit derselben Genauigkeit wie auch bei Wechselströmen (Kohlrausch).

---

1) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. § 96. I.

2) W. Nernst, Zeitschr. für physik. Chem. **14.** p. 642. 1894; M. Maltby, l. c. **18.** p. 133. 1895.

3) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. § 97. 5, 6.

Die vorliegende Einrichtung der Brücke gestattet auch leicht die Messung einer Kapazität durch Vergleich derselben mit der bekannten Kapazität C, indem wir die unbekannte Kapazität zwischen b und p einschalten. Die zwei Widerstandsabzweigungen werden auf dem Drahte EN genommen. Diese Messung geschieht mit Annäherung von 0,002. Auch zur Messung des Widerstandes von schlechtleitenden Flüssigkeiten kann diese Methode benutzt werden.

Zu allen diesen Messungen wird gewöhnlich Gleichstrom von 110 oder 220 Volt Potentialdifferenz genommen. Gleichstrom einer Dynamomaschine von jedem anderen Voltage kann auch benutzt werden, der Ton wird jedoch stärker bei höherer Spannung.

In der Verwendung des Gleichstromes anstatt der Wechselströme liegen folgende Vorteile: 1. Schnelligkeit der Messung. 2. Vereinfachung der Einrichtung und der Messung durch Weglassung elektrischer Elemente und Induktorien, und durch Anwendung des Telephones anstatt des Galvanometers. 3. Benutzung jeder vorhandenen Elektrizitätsquelle von einem Stadtnetz: wir können beispielsweise dazu den Strom von einer elektrischen Lampe abnehmen. 4. Ausführung der Messung ohne merklichen Stromverbrauch. 5. Die Brücke kann dann auch für ein Wechselstromnetz verwendet werden.

Athen, 25. März 1907.

(Eingegangen 3. April 1907.)

15. *Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen. II;* *von J. D. van der Waals jr.*

Im dritten Hefte dieser Annalen [1]) habe ich die Vermutung ausgesprochen, daß die große Abweichung des von Hrn. W. Wien [2]) aus der Energie berechneten Wertes der Wellenlänge der Röntgenstrahlen von dem von Haga und Wind ermittelten Werte daher rührt, daß die Annahme Wiens, daß die Elektronen an der Antikathode eine einmalige Verzögerung erleiden, nicht zutrifft, sondern daß vielmehr die Elektronen in einer Zickzackbewegung ihre Geschwindigkeit allmählich einbüßen. Hr. Wien [3]) hat darauf erwidert, daß eine Zickzackbewegung eine noch kleinere Wellenlänge veranlassen würde.

Der scheinbare Meinungsunterschied beruht aber auf einem Mißverständnis. Ich hatte eine Bewegung gemeint, bei der das Elektron die Richtung seiner Bewegung mehrmals um einen beträchtlichen Winkel ändert, etwa wie die Wärmebewegung eines Gasmolekels. Hr. Wien ist mit mir einverstanden, daß die Voraussetzung einer solchen Bewegung eine größere Wellenlänge ergeben würde. Er hat aber, wie er so freundlich war mir brieflich mitzuteilen, unter „Zickzackbewegung" eine solche verstanden, bei der an jeder Ecke der Geschwindigkeitsverlust viel beträchtlicher ist, wie die Richtungsänderung, oder genauer, bei der die der Geschwindigkeit entgegengerichtete Komponente der Beschleunigung viel beträchtlicher ist, wie die zur Geschwindigkeit senkrechte Komponente. Diese Voraussetzung führt ohne Zweifel zu einer kleineren Wellenlänge.

Zum richtigen Verständnisse meiner Ansicht möchte ich noch die folgenden Sätze aussprechen.

1) J. D. van der Waals jr., Ann. d. Phys. 22. p. 603. 1907.
2) W. Wien, Ann. d. Physik 18. p. 991. 1905.
3) W. Wien, Ann. d. Physik 22. p. 798. 1907.

1. Wenn man voraussetzt, daß die Atome der Antikathode aus Elektronen bestehen, deren Durchmesser klein gegen ihren gegenseitigen Abstand ist, so daß die Kathodenstrahlelektronen sie frei durchlaufen können, und nur dann beträchtliche Krafteinwirkungen erleiden, wenn sie zufällig sehr nahe an einem sie anziehenden oder abstoßenden, positiven oder negativen Elektron der Antikathode vorüberfliegen, so sind die tangentiellen Kräfte keineswegs klein gegen die zur Bewegungsrichtung senkrechten und ist es also unmöglich, aus der Energie auf die Wellenlänge der Röntgenstrahlen zu schließen.

2. Wenn man also die Wellenlänge aus der Energie berechnen will, muß man außer den elektrischen Anziehungen und Abstoßungen noch andere Kräfte annehmen.

3. Die Ergebnisse der Messungen der Wellenlänge, der Energie und der Polarisation der Röntgenstrahlen sprechen für die Voraussetzung sub 1.

4. Hr. Wind[1]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß auch die Elektronen der Antikathode unter dem Einflusse vorüberfliegender Kathodenstrahlen Energie ausstrahlen. Dies wird unzweifelhaft zutreffen. Meines Erachtens aber wird wahrscheinlich der größere Teil der Energie der Röntgenstrahlen von den Kathodenstrahlelektronen, und nur der kleinere Teil von den Elektronen der Antikathode herrühren.

---

1) C. H. Wind, Versl. Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam 15. p. 855. 1907.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)

16. *Sprechender Kondensator;* *von T. Argyropoulos.*

Es ist mir gelungen, die Wiedergabe der vor einem Mikrophon gesprochenen Worte durch einen Kondensator zu erreichen, und zwar auf folgende Weise.

Die eine Spule (1) eines Transformators, welcher aus einem weichen Eisenkerne und zwei Spiralen (1 : 10) von Kupferdraht besteht, wird in den Stromkreis einer aus einem Mikrophon und zwei Akkumulatoren bestehenden Mikrophonbatterie eingeschaltet. Die zweite Spule (10) des Transformators ist einerseits mit der einen Belegung eines Kondensators (0,5 Mikrof.), und andrerseits mit dem einen Pol einer konstanten Stromquelle verbunden, während die andere Belegung des Kondensators mit dem anderen Pol dieser Stromquelle in Berührung steht.

Der benutzte Kondensator besteht aus dünnen Stanniolblättern und aus Blättern paraffinierten Papiers. Das Mikrophon wurde in einem geschlossenen Zimmer aufgestellt, der Transformator mit der Batterie in einem zweiten und der Kondensator in einem dritten Zimmer. Alles, was vor dem Mikrophon *gesprochen*, hörte man ganz klar aus dem Kondensator heraus.

Ich bemerkte, daß die Intensität der Wiedergabe mit der Potentialdifferenz der Pole der Stromquelle steigt; bei meinen Versuchen hat dieselbe 250 Volt erreicht. Die Intensität wird geringer, wenn auf den Kondensator ein steigender Druck ausgeübt wird.

Wenn die Stromquelle beseitigt wird, indem ein jedes der zwei Enden der einen Transformatorspule mit einer Be-

legung des Kondensators in Berührung gebracht wird, wird die Stimme nicht mehr wiedergegeben.

Ich vermute, daß die Wiedergabe der Stimme durch die wechselnde elektrostatische Anziehung der den Kondensator bildenden Blätter bewirkt wird.

Da ich nicht über mehrere verschiedenartige Kondensatoren verfügte, so war ich nicht imstande, den Einfluß der Konstruktion des Kondensators auf die Wiedergabe der Stimme zu untersuchen.

(Eingegangen 8. Mai 1907.)

17. *Berichtigung zu der Arbeit: „Über die Theorie des Ferromagnetismus"; von R. Gans.*

In der ersten Mitteilung meiner Untersuchungen „Zur Theorie des Ferromagnetismus"[1]) stellte ich zwei Theorien dar, die Quellentheorie und die Wirbeltheorie; erstere faßt die magnetostatischen Felder als durch magnetische Mengen entstanden auf, während letztere die Existenz magnetischer Mengen leugnet und zur Darstellung eingeprägte magnetomotorische Kräfte braucht.

Diese beiden Theorien unterscheiden sich nur durch die Definition der magnetischen Feldstärke im Ferromagnetikum, die ich nach der Quellentheorie $\mathfrak{H}$, nach der Wirbeltheorie $\mathfrak{H}'$ nannte. Ich behauptete, auf Grund meiner Messungen folge, daß die Permeabilität einheitlich nur durch $\mathfrak{H}$, aber nicht durch $\mathfrak{H}'$ dargestellt werden könne, wenn man es sowohl mit permanent magnetisch wie mit elektromagnetisch erregten Feldern zu tun habe.

Nun habe ich aber gar nicht $\mu = f(\mathfrak{H})$ mit $\mu = \varphi(\mathfrak{H}')$ verglichen; der Fehler kommt daher, daß die in der Technik übliche Theorie das $\mathfrak{H}$ der Quellentheorie zur Darstellung wählt, dagegen — wenigstens auf dem jungfräulichen Ast der Magnetisierungskurve — die Induktion auf Grund der Wirbeltheorie ausdrückt. Dadurch wird ein ganz anderes μ definiert, als nach der Wirbel- oder Quellentheorie. Nach der technischen Theorie kann man auf den Ästen der Hysteresisschleife, also speziell bei permanenten Magneten, ohne weiteres gar nicht von einer Permeabilität sprechen.

Bei dem Versuche, meine Messungen, die übrigens richtig angestellt sind, wirklich auf die konsequent durchgeführte Quellen- und Wirbeltheorie anzuwenden, um zu entscheiden, ob μ von $\mathfrak{H}$ oder von $\mathfrak{B}$ abhängt, ergab sich, daß das Zahlen-

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 22. p. 481. 1907.

material nicht ausreichte. Ich habe nun genauere Messungen über die Permeabilität angestellt, und zwar an allen Stellen der Magnetisierungskurve, auch auf der Hysteresisschleife, aus denen folgt, daß μ nicht eindeutige Funktion von $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{B}$ ist, sondern daß der Wert hysteretisch beeinflußt ist.

Ich werde das Zahlenmaterial und die Diagramme ausführlich in einer zweiten Mitteilung bringen und gleichzeitig zeigen, welche Bedeutung in energetischer Beziehung die Zerlegung von $\mathfrak{B}$ in zwei Teile hat. Ferner werde ich auf Grund der Magnetisierungskurve ein Verfahren zur vollständigen Berechnung permanenter Magnete angeben.

Das praktische Resultat, daß man für permanente Magnete $\mathfrak{B}$ durch $\mu\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}$ darstellen kann, wo μ für alle Stärken der Magnetisierung und $\mathfrak{M}$ für kleine Änderungen von $\mathfrak{H}$ konstant bleibt, kann aufrecht erhalten werden — vollständig für magnetometrische Methoden und im allgemeinen mit einer kleinen Einschränkung, die durch die Form der Magnete bedingt ist.

Auf diese Fragen gehe ich von neuen Gesichtspunkten aus in meiner zweiten Mitteilung ein, ich wollte nur schon jetzt auf den theoretischen Fehler und seinen Grund hingewiesen haben, damit meine Resultate nicht zu falschen Folgerungen Anlaß geben.

Tübingen, Physik. Institut, 6. Mai 1907.

(Eingegangen 8. Mai 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 23.

1. *Über das Verschwinden der Magnetisierung; von Martin Gildemeister.*

I. Fragestellung. Methode.

Wenn sich Eisen in einem magnetischen Feld befindet, dessen Intensität plötzlich ansteigt oder abfällt, so nimmt es, wie J. A. Ewing und Lord Rayleigh entdeckt haben, den entsprechenden magnetischen Zustand nicht sofort an, sondern erst nach einigen Minuten. Die eintretende Veränderung scheint nach Untersuchungen von Martens[1]), Klemenčič[2]) u. a. aus zwei Teilen zu bestehen, einem sehr schnell und einem langsam verlaufenden, zwischen denen eine Pause liegt. Der zweite Teil ist gründlich erforscht, während über den ersten nur wenige Untersuchungen gemacht sind.

Helmholtz[3]) hat bei verschwindendem magnetischen Felde gefunden, daß in dünnen (0,028 cm) Drähten aus weichem Eisen „sich die Gleichgewichtszustände der magnetischen Verteilung in unmeßbar kurzer Zeit herstellen können". Aus den Angaben geht hervor, daß unter unmeßbar kurzer Zeit weniger als $^1/_{10000}$ Sek. zu verstehen ist; eine genauere Bestimmung ließ sich mit Hilfe der benutzten Wippe nicht ausführen.

Holborn[4]) hat im Gegensatz zu Helmholtz die *Entstehung* der Magnetisierung bei *Schließung* des magnetisierenden Stromes untersucht. Dabei ergab sich das Resultat, daß der Magnetismus voll ausgebildet war, wenn der Strom seine volle Höhe erreicht hatte (nach $^1/_{200}$ Sek.). Aus der Art des Ansteigens war aber zu schließen, daß die Magnetisierung auch noch in viel kleineren Zeiträumen der magnetischen Kraft sehr nahe folgt.

Beiden Untersuchern sind die späteren langsamen Ver-

1) F. Martens, Wied. Ann. **60.** p. 61. 1897.

2) J. Klemenčič, Wied. Ann. **62.** p. 68. 1897; vgl. auch A. Winkelmanns Handb. d. Physik, II. Aufl. **5.** 1. Hälfte, p. 222.

3) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. **83.** p. 505. 1851.

4) L. Holborn, Berliner Ber. **11.** p. 173. 1896.

änderungen der magnetischen Induktion entgangen, weil sie sich ballistischer Methoden bedienten.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich nur mit dem *Abfall* der Magnetisierung nach dem Verschwinden des magnetischen Feldes. Es soll ermittelt werden, in welcher Weise sich der Magnetismus *unmittelbar* (d. h. zwischen 0 und $^1/_{2000}$ Sek.) nach der Stromöffnung ändert.

Die angewendete Methode ist dieselbe, deren sich Helmholtz in der zitierten Arbeit bedient hat. Ihr Prinzip ist folgendes:

Um den Einfluß der Foucaultschen Ströme möglichst zu beseitigen, werden Bündel von dünnem Eisendraht verwendet. Diese stecken in einer Spirale, die ein elektrischer Strom durchfließt. Unterbricht man denselben, und verbindet in dem gleichen Augenblick die Spirale mit einem ballistischen Galvanometer, so ergießt sich in dieses ein Strom, der aus drei Anteilen besteht: 1. aus dem Öffnungsinduktionsstrom der Spirale; 2. aus dem Strom, der in ihr durch den verschwindenden Magnetismus des Eisens induziert wird; 3. aus einem Stromanteil, der von der Kapazität der Spirale herrührt.

Läßt man jetzt zwischen dem Moment der Stromöffnung und der Ableitung zum Galvanometer eine sehr kleine Zeit ϑ vergehen, so ist in dieser die Summe der drei Teile, und damit auch die Wirkung auf die Bussole kleiner geworden. Derjenige Wert von ϑ, bei dem das Galvanometer schließlich nicht mehr bewegt wird, ist die Zeit, welche der Magnetismus [1]) zum völligen Verschwinden braucht.

Aus dem Abfall der Galvanometerausschläge können, wie die theoretische Behandlung p. 409 u. f. zeigt, noch weitere für die gestellte Aufgabe wichtige Schlüsse gezogen werden.

II. Benutzte Apparate. Konstanten der Spirale und der Drahtbündel.

Die einzige Schwierigkeit der Methode liegt darin, daß zwischen der Öffnung des einen und der Schließung des anderen

1) Der temporäre Magnetismus ist in drei Teile zerlegt zu denken: a) den rasch verschwindenden, b) den langsam verschwindenden, c) den remanenten. Unter Magnetismus schlechtweg ist hier immer Teil a zu verstehen.

Stromkreises eine äußerst kurze und genau meßbare Zeit liegen muß. Das erreichte ich mit einem Helmholtzschen Pendel von großer Präzision, gefertigt von Edelmann in München.[1]) Der eine Kontakt blieb an seiner Stelle; der andere wurde durch eine Mikrometerschraube verschoben, deren Kopf in 100 Teile geteilt war. Die Verschiebung um einen Teilstrich änderte das Intervall ϑ zwischen beiden Vorgängen um 0,000001 65 Sek. (abgerundet $^1/_{600\,000}$ Sek.). Diese Zeit ist in den Tabb. 2, 3 und 4 und der Fig. 2 als Einheit eingetragen.

Das Galvanometer war ein Drehspulengalvanometer von Siemens & Halske, Widerstand der Spule allein ca. 400 Ohm, mit Zusatzwiderstand, ohne den die Bewegung äußerst stark gedämpft ist, 10000 Ohm. Dauer einer Schwingung (halbe Periode) 6 Sek. Ballistische Empfindlichkeit bei den ersten Versuchen (*a* bis *e* der Tab. 3) 2044 Skt., nachher (Versuche *f* bis *s*) 975 Skt. pro Mikrocoulomb (geringerer Skalenabstand). Selbstpotential etwa $3 \cdot 10^7$ cm.

Die Spirale bestand aus 2×69 Windungen eines gut isolierten Kupferdrahtes von 0,3 mm Durchmesser, der in *einer* Lage, aber nach Helmholtzscher Vorschrift (zur leichten Prüfung der Isolierung) in zwei Abteilungen auf einen Glaszylinder gewickelt war, und zwar so, daß auf eine Windung der einen immer eine der anderen Abteilung folgte. Die Abteilungen konnten auch getrennt benutzt werden. Die Länge der Spirale betrug 10, ihr Durchmesser 2,4 cm. Beide Abteilungen hintereinander geschaltet hatten ein Selbstpotential von 10^5 cm und einen Widerstand von 1,2 Ohm; über ihre Kapazität vgl. p. 410.

Die zylindrischen Drahtbündel waren zum Teil beträchtlich länger als die Spirale, so daß auf sie kein homogenes magnetisches Feld wirkte. Sie zu verkürzen war nicht angängig, weil dann die Galvanometerausschläge stark verkleinert worden wären; eine Verlängerung der Spule hätte wiederum deren Selbstpotential und Kapazität in störender Weise vergrößert. Die Bündel waren aus weichem Eisendraht hergestellt, geglüht und mit Paraffin durchtränkt. Ihre Dimensionen sind aus der Tab. 1 zu ersehen.

---

1) M. Th. Edelmann, Ann. d. Phys. **3**. p. 274. 1900; M. Gildemeister u. O. Weiss, Ann. d. Phys. **17**. p. 174. 1905.

Tabelle 1.

Konstanten der Drahtbündel.

Nr.	Länge cm	Durchm. cm	Gewicht g	Drahtstärke cm
I	12,5	0,55	13	0,0185
II	34	1,45	288	0,0185
III	32	0,90	80	0,028
IV	38,5	1,25	224	0,118

III. Versuchsanordnung. Vorversuche.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 dargestellt. *E* ist eine Akkumulatorzelle, *Rh* ein Rheostat, *Sp* die Spirale, *G* das Galvanometer. $\ddot{O}K_1$ ist der Öffnungs-, *SK* der Schließkontakt des Pendels. Über $\ddot{O}K_2$ vgl. p. 405.

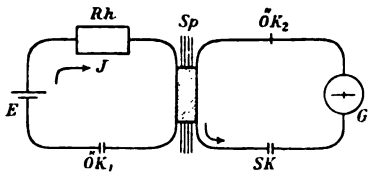


Fig. 1.

Vor jeder Versuchsreihe mußte die Nullstellung des Pendels festgestellt werden, d. h. diejenige Stellung, bei der Öffnung und Schließung gleichzeitig erfolgen. Dazu wurden die Kontakte mit dem Element und dem Galvanometer (ohne die Spirale) in *einen* Stromkreis aufgenommen und diejenige Stellung aufgesucht, bei der die Ausschläge eben verschwanden.[1]) Man kann auch einfach die Nullstellung aus den Versuchen entnehmen, da bei ihr der Maximalausschlag des Galvanometers erfolgt.

Der durch *E*, *Rh*, *Sp* und $\ddot{O}K_1$ fließende magnetisierende Strom *J* konnte nur in engen Grenzen, zwischen 0,020 und 0,078 Amp., variiert werden. Diese Beschränkung war geboten nach oben durch die störende Erwärmung des Öffnungskontaktes, nach unten durch die Empfindlichkeit des Galvanometers.

Die Vorversuche lehrten, daß die Drahtbündel schon nach $^1/_{60000}$ Sek. ihre induzierende Wirkung auf die Spirale

1) Über eine zweckmäßige Modifikation des Verfahrens vgl. M. Gildemeister u. O. Weiss, l. c.

verlieren. Ein solcher Versuch ist zum Beweise für das genaue Arbeiten des Pendels mit allen Einzelheiten in Tab. 2 dargestellt. Bei den späteren Versuchen (Tab. 3), bei denen für jedes ϑ nur drei Beobachtungen angestellt sind, wird nur das Mittel daraus mitgeteilt werden.

Tabelle 2.

Verschwinden des Magnetismus in Bündel II.
0,078 Amp. Beide Abteilungen der Spirale. Einheit der $\vartheta = {}^1/_{600\,000}$ Sek.

ϑ	Ablenkungen in Skalenteilen					Mittel
− 9	3,5	3,25	3,5	3,25	3,5	3,40
− 4	4,75	4,75	4,5	4,5	4,75	4,65
− 2	5,0	5,0	5,25	5,0	5,0	5,05
0	5,5	5,0	5,5	5,75	5,5	5,45
+ 2	4,0	4,25	3,75	4,0	4,5	4,10
+ 4	5,0	3,0	5,0	1,75	3,5	3,65
+ 6	0,25	0,25	0,25	0,5	0	0,25
+ 8	0	0	0,25	0	0	0,05
+11	0	0	0	0	0	0
+16	0					
+21	0					

Wie man sieht, überschreiten die Ablenkungen trotz der verhältnismäßig hohen Stromstärke und der großen Eisenmasse des Bündels II nicht die Größe von 5,5 Skt. Da infolgedessen die Untersuchung der kleineren Bündel oder gar der leeren Spirale keine Aussichten auf Erfolg bot, wurde die in Fig. 1 skizzierte Versuchsanordnung geändert.

Die Theorie lehrt, daß die Ausschläge mit der Abnahme des Widerstandes im Bussolkreise wachsen. Daher ist es zweckmäßig, den Zusatzwiderstand des Galvanometers zu entfernen. Dann ist aber das Instrument so stark gedämpft, daß es unbrauchbar wird. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, wenn man einen zweiten Öffnungskontakt ($\ddot{O}K_2$, Fig. 1) anbringt und diesen kurze Zeit nach der Schließung von SK öffnet.

Zu diesem Zwecke trug das Eisenprisma des Pendels eine Stange und die linke vordere Säule ein Tischchen mit

Zusammenstellung der Versuche. *G.Sp.* = Ganze Spirale; *H.Sp.* = Halbe Spirale.

0,020 / 0,040 } Stromstärke in Ampère { 0,066 / 0,075 . Einheit der $\vartheta = {}^1/_{600\,000}$ Sek. Vgl. Fig. 2.

	Bündel I					Bündel II				Bündel III			Leere Spirale, beide Abteilungen					Desgl. 1. Abt.	Bünd. IV
ϑ	*b* G.Sp.	*i* G.Sp.	*g* G.Sp.	*h* G.Sp.	*o* H.Sp.	*c* G.Sp.	*d* G.Sp.	*q* G.Sp.	*p* H.Sp.	*e* G.Sp.	*r* H.Sp.	*s* H.Sp.	*a*	*f*	*k*	*l*	*m*	*n*	
	0,020	0,020	0,040	0,066	0,066	0,020	0,040	0,066	0,066	0,040	0,066	0,066	0,040	0,040	0,040	0,066	0,066	0,066	0,075
− 6			26,3												5,4		8,8	1,8	
− 5												17,3		6			9	2,2	
− 4			27,5	44,7		101						18,8		5,7	6,2		9,5	2,7	
− 3	26,3	18		36,7	10,2							19,2	12,8	6,7		9,7	10	2,75	
− 2		12,7	27,7	43,5	11	102	199		28,3	94	18,5	18,8		5,3	6,1	10,7	10,5	2,9	
− 1		12,8	27	43,7	8,8			155,5	33		18,5	18,7		3,8	5,7	10,3	10,3	2,75	
0	**27,3**	**12,8**	**27,7**	**45**	**10,8**	**102,3**	**201,3**	**159,3**	**33,3**	**92,7**	**17,3**	**17**	**11,1**	**6,2**	**6,8**	**9,2**	**10**	**2,8**	
+ 1		2,7	9,5	30,8	7,2			112,7	18,2		15	6,2		1,3	2,9	−2,5	0,1	0,9	
+ 2	6,7	2,3	5	12,5	1,7	9	118	114,2	4	57,8	14,7	4,7	−1,3	−0,7	0,1	1,8	−1,3	0,8	
+ 3		0,8	2,8	5,8	0,6	3,5	109,3	20,2	0,6		7,8	3	−1,1	−0,1	0,4	1,4	−0,1	−0,1	
+ 4	1,7	0,5	1,9	4,3	0,4	2,2		5	0,1	19,3	2,2	2,2	−0,2	−0,2	0,2	1	−1	0	
+ 5		0,4	1,4	2,7	0,2	0,7	6,7	4,2	0		5,7	1,5	−0,1	0	−0,1	±0	+1		
+ 6	0,2	0,25	0,7	1,2	0	0,3		5,3		8,3	1,5	0,5	0		−0,2	0	0,1		
+ 7	0	0	0,25	1		0,25	2	1			1,1	0,3			0		0,2		
+ 8			0,25	0,5		0		0,8		2,7	0,3	0					0		
+ 9			0	0,25			0,7	0,6			0								
+10				0,25				0,3		1,2									
+11				0,1			0	0											
+12				0						0,4									
+13																			
+14										0,2									
										0									

Strom noch bei $\vartheta = 80$ nachweisbar

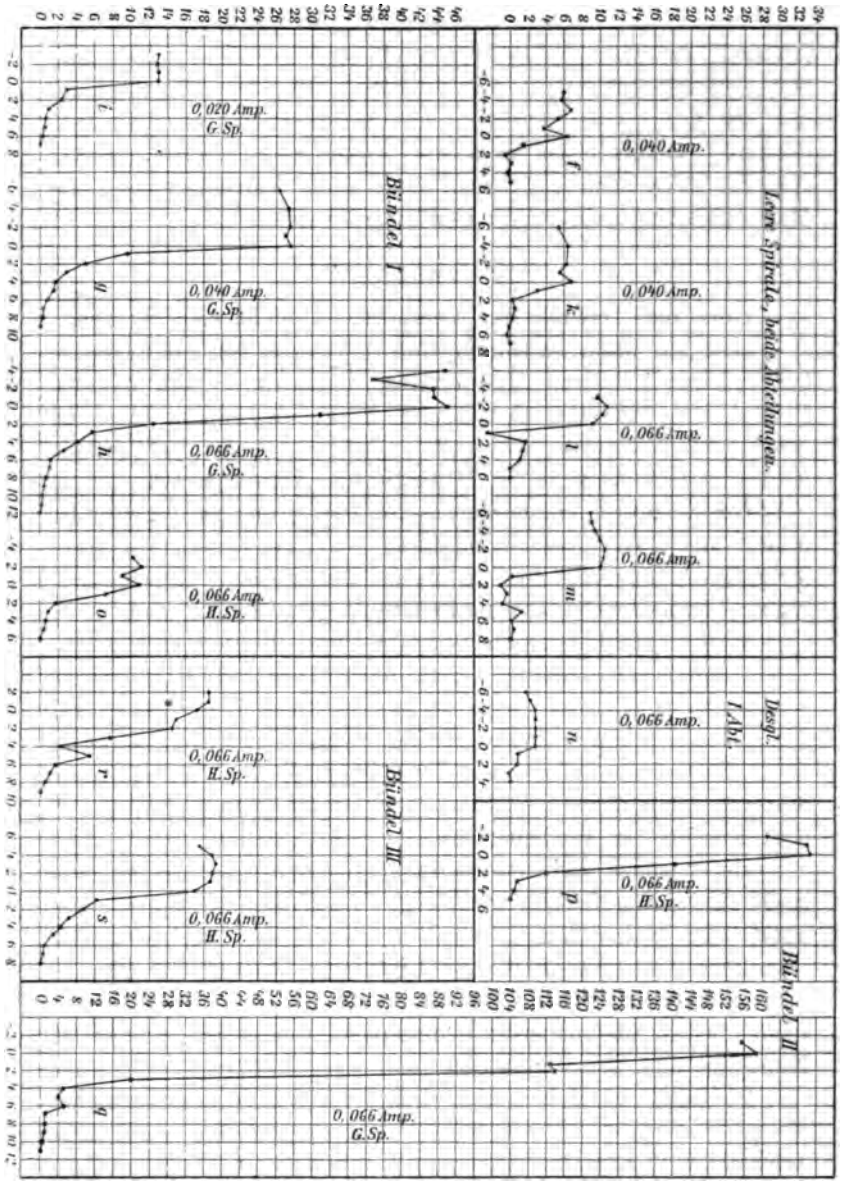


Fig. 2. Graphische Darstellung der Tab. 3. Die Ordinaten sind Skalenteile, die Abszissen Zeiten. Im übrigen vgl. Tab. 3.

einem daran befestigten Kontakt. Die Länge der Stange und die Stellung der übrigen Kontakte war so bemessen, daß das Intervall zwischen Schließung und zweiter Öffnung jedesmal 300 Zeiteinheiten ($^1/_{2000}$ Sek.) betrug. Bei der Genauigkeit, mit der das Pendel arbeitet, hat dieses Verfahren kein Bedenken. Vielmehr ist man auf diese Weise sicher, durch spätere, etwa nach $^1/_{2000}$ Sek. einsetzende Veränderungen der Magnetisierung nicht mehr gestört zu werden.

IV. Versuche.

Über die Technik der Versuche ist nicht viel zu sagen. Man hat dafür zu sorgen, daß sich in der Nähe der Drahtkerne keine größeren Metallmassen befinden. Dann ist das Pendel mit äußerster Sorgfalt zu behandeln, da es hier auf sehr große Präzision ankommt. Darüber ist das Notwendige in der p. 403, Anm. (G. u. W.) zitierten Arbeit gesagt.

Die Resultate finden sich in der Tab. 3 und auf der Fig. 2, p. 406 und 407. Auf der letzteren sind die Versuche *a* bis *e* fortgelassen worden, obschon sie zu den gleichen Ergebnissen führen, weil die ϑ in zu großen Sprüngen variiert sind.

Man sieht, daß in den Bündeln I und II aus sehr dünnem Draht die Magnetisierung schon nach längstens $^{12}/_{600\,000}$ Sek. — gleich $^1/_{50\,000}$ Sek. — verschwunden ist. Bei Bündel III, aus etwas stärkerem Draht, ist sie einmal (Versuch *e*) bis nach $^1/_{40\,000}$ Sek. nachweisbar, und bei Bündel IV aus dem dicksten Material noch nach $^1/_{7500}$ Sek. Das beruht wahrscheinlich auf dem Einfluß der Wirbelströme.

Unter sonst gleichen Bedingungen schwindet die magnetische Induktion früher, wenn nur eine Hälfte der Spirale benutzt wird (vgl. *h* mit *o*, *q* mit *p*). Auch das ist leicht verständlich; denn unter diesen Umständen bietet die Spirale dem induzierten Strome, der seinerseits wieder auf den Magnetismus wirkt, ungünstigere Bedingungen wegen der geringeren Kapazität und Selbstinduktion.

So zeigt es sich auch, daß die *leere* Spirale schneller stromlos wird, wenn nur eine Hälfte durchströmt wird. Es kann dabei zu Eigenschwingungen kommen (Versuch *f*, *l* und *m*).

Um über die Güte der einzelnen Versuche ein Urteil zu ermöglichen, sind in Tab. 4 die nach der bekannten Formel

$$R = 0{,}67\sqrt{\frac{\Sigma(\delta^2)}{2}}$$

berechneten wahrscheinlichsten Fehler der in Tab. 3 angegebenen Mittelwerte zusammengestellt, soweit sie die Größe von 3 Skt. überschreiten. Der Versuch *r* bleibt gegenüber dem Versuch *s*, der unter denselben Bedingungen angestellt ist, am besten unberücksichtigt.

Tabelle 4.

Wahrscheinlichste Fehler.

Versuch	*h*	*o*	*c*	*d*	*d*	*q*	*q*	*q*	*p*	*e*	*e*
ϑ =	1	1	1	2	3	1	2	3	1	2	4
Fehler	7,7	3,1	4,4	50,2	45,9	36,3	27,9	9,5	8,4	22,3	5,8

Aus den Kurven lassen sich weitere Schlüsse ziehen bezüglich der Art, in welcher Weise die magnetische Induktion verschwindet, wenn man die Theorie zu Hilfe nimmt.

V. Theorie mit Anwendung auf die Versuche.

Die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze hat hier kein Bedenken, weil in der kürzesten in den Versuchen vorkommenden Zeit ($^1/_{600000}$ Sek.) die Elektrizität in Drähten mehr als 500 m zurücklegt, während hier die Strombahn alles in allem höchstens 50—100 m lang ist.

Fig. 3 gibt nochmals eine Skizze der Versuchsanordnung, wobei jetzt die Kapazität der Spirale durch einen Kondensator (neben dem Buchstaben *V*) repräsentiert ist.

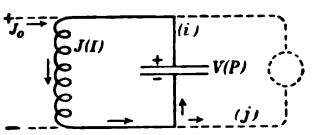


Fig. 3. Schema der Versuchsanordnung, wenn die Kapazität der Spirale durch einen Kondensator repräsentiert wird. Die eingeklammerten Bezeichnungen gelten für die Zeiten ϑ bis τ, die anderen für die Zeiten 0 bis ϑ.

Nun sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

Der Widerstand der Spirale heiße *W*, der Zuleitungen zum Kondensator *w*, des Galvanometers *v*. Die Kapazität des Kondensators werde mit *c* bezeichnet, die Selbstpotentiale der leeren Spirale und des Galvanometers bezüglich mit *p* und *q*. Befindet sich Eisen in

der Spirale, so wird die verschwindende Magnetisierung M in ihr eine elektromotorische Kraft induzieren, die in der Form $r \cdot dM/dt$ dargestellt werden kann, wobei r eine Konstante ist.

Die Werte dieser Konstanten sind: $p = 10^{-4}$ Henry, $q = 3 \cdot 10^{-2}$ Henry. c konnte nicht ermittelt werden; eine Spirale von 10000 Windungen hatte $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Mikrof., so daß man sicher zu hoch rechnet, wenn man die hier benutzte zu 10^{-4} Mikrof. veranschlagt. Doch soll dieser ungünstigste Wert der späteren Rechnung zugrunde gelegt werden. W und w sind einzeln nicht bekannt, nur $W + w = 1{,}2$ Ohm. W allein spielt in den späteren Formeln eine Rolle, sein Wert soll zu 1 Ohm angenommen werden; $v = 400$ Ohm.

Am Schlusse dieser Seite kommt noch das Selbstpotential ϱ von Spule + Eisenkern vor; dieses betrug etwa $6 \cdot 10^{-3}$ Henry. Zur Vermeidung von Mißverständnissen soll noch hervorgehoben werden, daß dieses ϱ nur bei einer Überschlagsrechnung benutzt wird; sonst wird die Selbstinduktion der Spirale in zwei Teile zerlegt, in die der leeren Spirale und die Rückwirkung des Eisens auf dieselbe.

Jeder Versuch besteht aus drei Phasen:

1. Durch die Spirale strömt der konstante Strom J_0, während die rechts punktierte Leitung (vgl. Fig. 3) noch davon getrennt ist. Der Kondensator hat die Ladung V_0, die gleich der Spannungsdifferenz $J_0 W$ an beiden Enden der Spirale ist.

2. Nun wird der Elementkreis unterbrochen. In der Spirale herrscht der variable Strom J. Die Ladung des Kondensators V kann vorübergehend viel größer werden als die Anfangsladung $V_0 = J_0 W$. Sie kann aber den Wert $J_0 \cdot \sqrt{\varrho/c}$ nicht überschreiten, wobei ϱ das Selbstpotential von Spirale + Eisenkern bedeutet.[1])

---

1) Die umständliche Rechnung, die zu diesem Resultat führt, soll hier nicht ausgeführt werden. Eine kurze Andeutung wird genügen: Stellt man für den Kreis Spirale–Kondensator die Differentialgleichungen

$$J(W + w) = -\varrho \frac{dJ}{dt} + V \quad \text{und} \quad J = -c \frac{dV}{dt}$$

auf, so bekommt man bekanntlich bei kleinem Widerstand für die Ladung die Gleichung

$$V = e^{-\alpha t}(A \sin \beta t + B \cos \beta t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

3. Nachdem der Kreis Spirale–Kondensator die Zeit ϑ hindurch sich selbst überlassen war, wird nun der punktierte Kreis dazu gefügt. Die Stromintensitäten sollen jetzt heißen: In der Spirale I, in den Zuleitungen zum Kondensator i, im Galvanometer j; die Ladung des Kondensators sei P. Die anderen Bezeichnungen bleiben bestehen. Jetzt gelten die Gleichungen

$$I = i + j, \tag{1}$$

$$-c\frac{dP}{dt} = i, \tag{2}$$

$$IW + jv = -p\frac{dI}{dt} - r\frac{dM}{dt} - q\frac{dj}{dt}. \tag{3}$$

Der Galvanometerkreis wird nach der Zeit τ wieder geöffnet. Das Instrument zeigt eine Ablenkung z, die proportional ist der Elektrizitätsmenge $\int_{\vartheta}^{\tau} j\,dt$, also

$$z = k\int_{\vartheta}^{\tau} j\,dt. \tag{4}$$

---

worin

$$\alpha = \frac{W+w}{2\varrho}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\varrho c}}, \quad A = -J_0\sqrt{\frac{\varrho}{c}}, \quad B = V_0 - J_0(W+w).$$

Wäre die Dämpfung nicht vorhanden, so wäre $V_{\max.}$ gleich der Amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$, oder, da hier B gegen A zu vernachlässigen ist, gleich $\pm A$; dieser Wert kann, weil er sicher (absolut genommen) zu groß ist, als oberer Grenzwert der Ladung betrachtet werden.

Einfacher und eleganter ergibt sich derselbe Wert aus energetischen Betrachtungen. Die zur Zeit des Ladungsmaximums im Kondensator vorhandene Energie kann nämlich höchstens gleich derjenigen sein, die bis zum Eintritt der Ruhe im Stromkreis in Wärme umgesetzt wird. Das gibt, da die in einem Kondensator steckende Energie gleich der halben Kapazität multipliziert mit dem Quadrat der Ladung ist

$$\tfrac{1}{2}c\,.\,V_{\max.}^2 \leqq \int_0^{\infty} J^2(W+w)\,.\,dt.$$

Unter Berücksichtigung der oben aufgestellten Differentialgleichungen folgt daraus

$$\tfrac{1}{2}c\,.\,V_{\max.}^2 \leqq -\varrho\int J\,dJ - \int V\,dV,$$

und daraus schließlich der obige Grenzwert, da das zweite Glied rechts gegenüber dem ersten verschwindet.

Aus diesem Integral sollen Schlüsse über die Intensität der Magnetisierung M gezogen werden.

Aus Gleichung (3) folgt, wenn I nach Gleichung (1) und (2) durch $-c(dP/dt)+j$ ersetzt wird

$$(5) \qquad j = \frac{1}{W+v}\left(c\,W\frac{dP}{dt} - p\,\frac{dI}{dt} - r\,\frac{dM}{dt} - q\,\frac{dj}{dt}\right).$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (4) ein und führt die Integration aus, so erhält man

$$(6) \qquad \left\{ z = \frac{k}{W+v}\left[c\,W(P_\tau - P_\vartheta) - p(I_\tau - I_\vartheta) - r(M_\tau - M_\vartheta) - q(j_\tau - j_\vartheta)\right]. \right.$$

Nach der Zeit τ ist aber die Kombination in Ruhe, und außerdem fängt der Strom im Galvanometer wegen der Selbstinduktion mit Null an, so daß P_τ, I_τ, M_τ, j_τ und j_ϑ verschwinden. Also hat man schließlich

$$(7) \qquad z = \frac{k}{W+v}(-c\,W\,P_\vartheta + p\,I_\vartheta + r\,M_\vartheta).$$

Enthält die Spirale keinen Eisenkern, so ist $r=0$. Der Galvanometerausschlag heiße dann y, und statt P und I werde $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}$ geschrieben. Es gilt dann

$$(8) \qquad y = \frac{k}{W+v}(-c\,W\,\mathfrak{P}_\vartheta + p\,\mathfrak{J}_\vartheta).$$

Hiermit ist bewiesen, daß in den Ordinaten der z-Kurven drei Anteile stecken (vgl. p. 402), in den y-Kurven zwei. Das erste Glied, in dem die Kondensatorladung vorkommt, ist aber so klein, daß es vernachlässigt werden kann.

Für die y-Kurven ist das sehr leicht zu beweisen. Der Maximalwert von $\mathfrak{P}$ ist (da hier $\varrho = p$ ist) nach p. 410, Abschnitt 2 $J_0\sqrt{p/c}$; also ist der Maximalwert des ersten Klammergliedes von Gleichung (8) $J_0\sqrt{p\,c}\,.\,W$, oder mit Berücksichtigung der Werte der Konstanten $J_0\,.\,10^2$ cm. Der Maximalwert des zweiten Klammergliedes tritt ein für $\vartheta = 0$ und ist (da $\mathfrak{J}_0 = J_0$) $J_0\,.\,p = J_0\,.\,10^5$ cm. Dieses Glied ist also 1000mal größer als das erste. Für $\vartheta = 0$ ist y in den Versuchen 6—12 Skt. groß; also verursacht das erste Klammerglied einen Ausschlagszuwachs von nur $^1/_{100}$ Skt.

Für die z-Kurven ist zu berücksichtigen, daß ϱ (p. 410) den 60fachen Wert von p hat. Nach einigen leichten Rech-

nungen ergibt sich das Resultat, daß der Einfluß des Kondensatorgliedes hier höchstens $^1/_{10}$ Skt. beträgt.

Man kann also schreiben

$$z = \frac{k}{W+v}(p\,I_\vartheta + r\,M_\vartheta), \tag{9}$$

$$y = \frac{k}{W+v}\cdot p\,\mathfrak{J}_\vartheta. \tag{10}$$

Die y-Kurven (Versuche *f*, *k*, *l*, *m*, *n* der Fig. 2) geben mithin unmittelbar ein Bild des Stromabfalles in der leeren Spirale. Die aufgenommenen Punkte sind zu wenig zahlreich, um die zweifellos vorhandenen, sehr frequenten Schwingungen auch nur einigermaßen darzustellen. Jedoch läßt sich bestimmt behaupten, daß die Dämpfung viel größer ist, als die Rechnung ergibt, selbst wenn man den Widerstand zehnmal größer annimmt, als ihn die statische Messung ergibt. Diese Tatsache ist auch von anderen Beobachtern gefunden worden.[1]

Die z-Kurven sind nicht so einfach zu deuten, da es nicht gelingt, die beiden Summanden einzeln zu bestimmen. Nur für $\vartheta = 0$ ist das möglich; für die übrigen Werte von ϑ läßt sich für die noch vorhandene Magnetisierung nur ein oberer Grenzwert angeben.

Vergleicht man zwei Versuche mit gleicher magnetisierender Stromstärke J_0, so ist für $\vartheta = 0$ sowohl in Gleichung (9) I_0 als auch in Gleichung (10) $\mathfrak{J}_0$ gleich J_0 zu setzen. Zieht man dann (10) von (9) ab, so hat man

$$z_0 - y_0 = \frac{k}{W+v}\cdot r\,M_0.$$

Damit ist der Anfangsmagnetismus des Drahtbündels bestimmt. So entfallen z. B. bei Versuch *h*, Fig. 2, von den 45 Skt. der Maximalordinate nach Versuch *m* auf den I-Summanden 10, mithin 35 auf den anderen.

Nun wird sehr wahrscheinlich die Dämpfung, die schon in der leeren Spirale sehr erheblich war, durch den Eisenkern so stark vermehrt, daß der Strom immer positiv bleibt. Dann kann nach Gleichung (9) für jedes ϑ der M-Summand *höchstens* die Größe der Ordinate z haben, also z. B. in dem eben angeführten Versuch *h* (vgl. Tab. 3) für $\vartheta = {}^2/_{600\,000}$ Sek. höchstens

1) Vgl. z. B. Hj. Tallqvist, Ann. d. Phys. **60**. p. 262. 1897.

12,5 Skt. betragen. Da dieses Glied für $\vartheta = 0$ aber 35 Skt. groß war, so folgt aus diesem, und ebenso aus den anderen Versuchen, wenn man die Tab. 4 berücksichtigt, für die Bündel I und II aus Draht von 0,185 mm Dicke und die angegebenen schwachen magnetischen Felder:

In $^1/_{300000}$ Sek. ist die rasch verschwindende Magnetisierung auf weniger als die Hälfte ihres Anfangswertes gesunken.

Wollte man nur die guten Versuche berücksichtigen, so ergäbe sich dafür nur $^2/_3$ bis $^1/_2$ dieser Zeit.

In derselben Weise läßt sich aus den Kurven ableiten:

In $^1/_{150000}$ Sek. sinkt der Magnetismus auf weniger als ein Zehntel, und nach $^1/_{50000}$ Sek. ist er ganz verschwunden.

Von $^1/_{50000}$ bis $^1/_{2000}$ Sek. nach der Öffnung des magnetisierenden Stromes ändert sich die Magnetisierung nicht merklich.

Ob später noch langsame Veränderungen eintraten, habe ich nicht weiter untersucht. Mit Rücksicht auf die Angaben von J. Klemenčič[1]), nach denen längere Zeit aufbewahrte Drahtbündel ihre Eigenschaften ändern, will ich bemerken, daß die hier benutzten einige Tage bis Wochen nach dem Ausglühen untersucht sind.

Ich habe der beschriebenen Methode mit nur einer Spirale nach reiflicher Überlegung und nach langen Versuchen den Vorzug vor der üblichen gegeben, welche die Magnetisierungs- von der Induktionsspule trennt. Helmholtz erklärt beide für gleich gut. Nach meiner Meinung hat die zweite nur Nachteile: die verschwindende Magnetisierung induziert in beiden offenen Spulen störende Ströme, während nur die eine auf das Galvanometer wirkt, und außerdem ist die Theorie kompliziert und unübersichtlich, wenn die Wirkung beider Spulen aufeinander berücksichtigt wird.

Königsberg i. Pr., Physiol. Institut.

---

1) J. Klemenčič, l. c.

(Eingegangen 19. April 1907.)

2. *Über die absolute, von positiven Ionen ausgestrahlte Energie und die Entropie der Spektrallinien;* *von W. Wien.*

Bei der bisherigen thermodynamischen Theorie der Strahlung ist immer mit Recht der Unterschied zwischen Wärmestrahlung und der Strahlung betont, die durch andere Vorgänge als die Wärme hervorgerufen wird. Nun kann es ja keinem Zweifel unterliegen, daß Strahlung, die durch makroskopische Vorgänge, wie bei elektrischen Schwingungen, erregt wird, ihrem Wesen nach unterschieden werden muß von der Wärmestrahlung. Denn die elektrischen Schwingungen sind geordnete Vorgänge, denen keine Entropie von endlicher Größe zugeschrieben werden kann.

Dem gegenüber ist es eine offene Frage, ob Strahlung, die zwar nicht durch Wärme erregt, aber immerhin durch Vorgänge molekularer oder atomistischer Natur hervorgerufen wird, ihrer Natur nach unterschieden werden muß von der Wärmestrahlung. Nach den Erörterungen, die ich früher angestellt habe[1]), ist die Temperatur und damit auch die Entropie eines Strahlenbündels durch die Intensität und die Farbe vollständig bestimmt, wenn die Strahlung von der Wärme erregt wird. Es fragt sich nun, ob ein Strahlenbündel von gleicher Intensität und Farbe, wenn es nicht von heißen Körpern, sondern etwa von einer Geisslerschen Röhre ausgeht, als in jeder Beziehung identisch mit jenem angesehen werden kann oder nicht. Mit anderen Worten, ob man ihm dieselbe Entropie zuzuschreiben hat wie dem anderen.

Da diese Frage vorläufig nicht exakt beantwortet werden kann, so scheint es mir ein rationeller Weg zu sein, zunächst die hypothetische Annahme zu machen, daß die Strahlung, wenn sie überhaupt von molekularen Vorgängen erregt wird,

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 132. 1894.

in ihrer Entropie durch Intensität und Farbe vollständig bestimmt ist, und zwar so, wie es bei der Wärmestrahlung jetzt wohl ziemlich allgemein angenommen ist.

Man kann jedenfalls versuchen, aus dieser Annahme Folgerungen zu ziehen und dann sehen, ob sie sich als durchführbar erweist oder nicht.

Nach unserer Hypothese würden wir also der Strahlung, wie sie etwa von einer Geisslerschen Röhre erregt wird, ihrer Intensität entsprechend eine im allgemeinen nicht übermäßig hohe Temperatur zuzuschreiben haben. Es muß aber von der Entropie, die auf diese Weise bestimmt wird, sehr wohl die Entropie des Strahlungsvorganges selbst unterschieden werden. Denn wie wir bei der Strahlung, die von einem nicht schwarzen Körper ausgeht, zwischen der Temperatur der Strahlung und der höheren des Körpers unterscheiden müssen, so wird dem Strahlungsvorgang in der Geisslerschen Röhre eine weit höhere Temperatur zukommen, da die leuchtenden Gase außerordentlich weit entfernt sind, ein schwarzer Körper zu sein.

Allerdings müssen wir, wie sich jetzt zeigt, die Annahme machen, daß die leuchtenden Atome auch ein Absorptionsvermögen haben, weil sich sonst kein Gleichgewicht der Strahlung herstellen könnte. Sollen die Sätze der thermodynamischen Strahlungstheorie überhaupt anwendbar sein, so muß eine leuchtende Gasmasse, wenn sie genügend große Ausdehnung hat, in ihrem Innern eine bestimmte Dichte der strahlenden Energie herstellen, die bei weiterer Ausdehnung der Gasmasse nicht mehr vergrößert wird, die also einem Grenzwert zustrebt.

Allerdings können wir, wenn wir von einem solchen Gleichgewicht der Strahlung sprechen wollen, nicht eine Geisslersche Röhre selbst oder einen Vorgang wählen, in den dauernd Energie hineingebracht wird. Denn Gleichgewicht der Strahlung kann nur in einem Gleichgewichtszustand der Energie selbst bestehen und es muß deshalb die leuchtende Gasmasse von den Räumen getrennt sein, in denen durch Energiezufuhr der Zustand des Leuchtens hervorgebracht wird.

In der Tat können wir dieser Bedingung dadurch genügen, daß wir die leuchtenden Gasionen betrachten, wie sie in den Kanalstrahlen aus dem eigentlichen Entladungsraum der Geisslerschen Röhre in einem von aller Energiezufuhr

freien Raum hineinfliegen. Wenn wir diese leuchtenden Gasionen von einem schwarzen Körper umschließen, der die Temperatur hat, wie sie der Strahlungsentropie der leuchtenden Ionen entspricht, so ist eben unsere Hypothese die, daß die Ionen sich ins Strahlungsgleichgewicht setzen und ebensoviel Energie absorbieren, wie emittieren, wobei noch außerdem vorausgesetzt wird, daß die Emission nicht durch die auffallende Strahlung beeinflußt wird. Jedem Lichtstrahl, der von einem Punkt des schwarzen Körpers ausgeht und in die leuchtende Gasmasse eindringt, muß dann ein Strahl gleicher Intensität entgegenkommen, der von der Gasmasse ausgesandt wird. Ist E_s die Intensität des vom schwarzen Körper ausgehenden Lichtstrahles, $E\,dx$ die von einem unendlich kurzen Stück, das in der Richtung des Strahles in der Gasmasse ausgeschnitten wird, ausgesandte Intensität, so ist hiernach

$$(1)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\beta x} E\,dx = E_s, \\ \dfrac{E}{\beta} = E_s. \end{cases}$$

Diese Betrachtungen können aber wohl nur dann eine wirkliche Bedeutung erlangen, wenn wir irgend eine Möglichkeit besitzen, die Temperatur, die diesem Gleichgewichtszustand zukommt, wirklich zu messen.

Auf die eben betrachtete, im Strahlungsgleichgewicht befindliche leuchtende Gasmasse können wir die Plancksche Theorie[1]) der Strahlungsentropie anwenden. Dieser Theorie ist bekanntlich die Existenz von Elementarquanten der Energie eigentümlich, welche sich nun in regelloser Weise auf die einzelnen Strahlungszentren verteilen, und die Entropie ergibt sich durch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es ergibt sich hierbei die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{U}{\varepsilon} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{\varkappa T}} - 1},$$

wo U die mittlere Energie jedes Strahlungszentrums ist, $\varepsilon = h\,n$ das Energieelement, n die Schwingungszahl, h, $\varkappa$ Konstanten,

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 553. 1901.

T die absolute Temperatur sind. Da aus den Strahlungsgesetzen h und $\varkappa$ bekannt sind, so ist bei gegebener Schwingungszahl die Temperatur T bekannt, sobald man die mittlere Schwingungsenergie der Ionen kennt.

Diese mittlere Energie der Ionen kann man bestimmen, wenn man durch Beobachtung die von einer bekannten Zahl Ionen ausgestrahlte Energie in der Zeiteinheit und die Dämpfungskonstante der Schwingungen kennt.

Nennen wir σ die in der Zeiteinheit von jedem Ion im Mittel ausgestrahlte Energie, 2α die Dämpfungskonstante, so ist

$$U = \int_0^\infty \sigma e^{-2\alpha t} dt = \frac{\sigma}{2\alpha}. \tag{3}$$

Die Bestimmung von σ ist nun bei den Ionen, die wir oben im Strahlungsgleichgewicht betrachtet haben, möglich, wenn wir photometrisch im absoluten Maß die pro Volumeinheit von einem Kanalstrahlbündel ausgestrahlte Energie messen und durch die Anzahl der im stationären Strom in der Volumeinheit vorhandenen leuchtenden Ionen dividieren. Die letztere ergibt sich aus der durch den Kanalstrahlenstrom transportierten Elektrizitätsmenge, die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen und aus der Größe des elektrischen Elementarquantums unter der Voraussetzung, daß jedes positive Ion ein Elementarquantum der Elektrizität abgegeben hat. (Vgl. indessen noch die p. 435 besprochenen Hypothesen, wonach die Anzahl zu klein oder zu groß ausfallen würde.)

Die Möglichkeit, das von den bewegten Ionen ausgesandte Licht von dem zu trennen, das noch von ruhenden ausgesandt wird, ergibt sich durch die Entdeckung von J. Stark[1]), der gezeigt hat, daß die bewegten Ionen eine nach dem Doppler-schen Prinzip verschobene Spektrallinie aussenden.

Man muß also die Energie, die in dieser verschobenen Spektrallinie steckt, photometrisch messen.

Daß es endlich die positiv geladenen Ionen sind, welche die verschobene Linie aussenden, ergibt sich aus einer Beobachtung von Rau[2]), wonach diese Linie im Magnetfelde, das die positiv geladenen Ionen ablenkt, fast verschwindet.

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. p. 892. 1905.
2) P. Rau, Physik. Zeitschr. p. 421. 1906.

Die Messungen sind bisher ausschließlich an der Linie H_β des Wasserstoffs gemacht, und zwar deshalb, weil nur diese Linie bei einem begrenzten Kanalstrahlbündel, das nicht in der Achse anvisiert werden kann, bei der großen erforderlichen Dispersion genügende Intensität für photometrische Messungen besitzt.

§ 1. Die Strahlungsmessung.

Die photometrische Methode war eine subjektive, und zwar wurde die Helligkeit der verschobenen Spektrallinie mit der verglichen, die von einem schwarzen Körper von bekannter Temperatur ausgestrahlt wurde. Da die optischen Systeme des Spektralapparates immerhin ziemlich kompliziert waren, so wurde streng darauf geachtet, daß die beiden zu vergleichenden Strahlenbündel genau denselben optischen Weg zurücklegen und daher genau den gleichen schwächenden Einflüssen unterworfen sind. Die Vergleichung geschah dann in folgender Weise: An Stelle des Fadenkreuzes wurde ein dünner Platindraht befestigt, der schräg von hinten durch eine Öffnung in der Wand des Okulars beleuchtet werden kann. Um nicht durch Verschiedenheit der Farbe gestört zu werden, wurde das Fadenkreuz durch spektral zerlegtes Licht einer Glühlampe, indem aus dem Spektrum ein Stück in der Gegend von H_β ausgeschnitten wurde, beleuchtet. Die Intensität der Glühlampe war durch Vorschaltwiderstände veränderlich gemacht. Der Beobachter sah zunächst den dunklen Platindraht auf dem hellen Grunde der breiten Spektrallinie. Nun wurde der Platindraht beleuchtet und die Intensität der Glühlampe so reguliert, daß der Draht die Helligkeit der Spektrallinie erhielt. Dann wurde die Entladung abgestellt und die Strahlung des schwarzen Körpers in derselben Richtung auf den Spalt des Spektralapparates geworfen. Dann erschien der unbeleuchtete Draht dunkel auf dem hellen Grunde des kontinuierlichen Spektrums. Wurde er nun mit derselben Lichtintensität beleuchtet wie vorher, so konnte die Temperatur des schwarzen Körpers so reguliert werden, daß gleiche Helligkeit eintrat.

Die allgemeine Versuchsanordnung war folgende. Die Kanalstrahlröhre (Fig. 1) war horizontal und so gelegt, daß sie mit der Kollimatorachse des Spektrometers einen Winkel

von 36° 40′ bildete. Die Kathode bestand aus einem massiven Aluminiumzylinder von 3 cm Länge, der eine Durchbohrung von 4 mm hatte. Es war auf diese Weise ausgeschlossen, daß Licht aus dem Entladungsraum in das Spektrometer gelangte und ebensowenig konnte die Entladung selbst in den Beobachtungsraum hinübergreifen. Der strahlende schwarze Körper bestand aus einem elektrischen Ofen mit 4 cm weiter Porzellanröhre, in die eine Röhre aus Eisenblech geschoben war, die

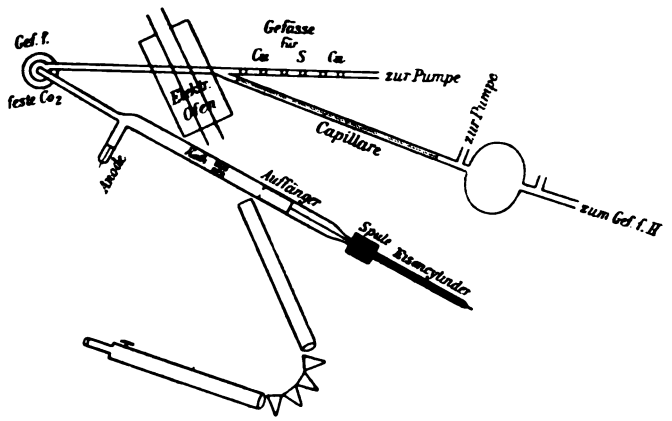


Fig. 1.

10 cm lang war. Die Eisenröhre war einseitig geschlossen und wurde auf eine gleichmäßige Temperatur gebracht. Die Temperatur wurde mit einem Le Chatelierschen Thermoelement gemessen. Die Röhre lag genau in der Verlängerung des Kollimators des Spektrometers, zwischen beiden die Entladungsröhre. Die vom schwarzen Körper ausgehenden Strahlen haben demnach einmal die Wand der Glasröhre zu durchsetzen und gehen dann durch dieselben Medien wie die von den Kanalstrahlen ausgehende Strahlung. Beide Strahlungen gehen durch ein vor der Röhre angebrachtes Diaphragma, durch die das Strahlenbündel begrenzt wird.

Bei der Justierung war vor allem darauf zu achten, daß das Objektiv des Kollimators vollständig durch die durch das Diaphragma gegangenen Strahlen des schwarzen Körpers sowohl wie der Kanalstrahlen ausgefüllt wurde. Im übrigen beein-

flußten dann die Teile des Spektrometers beide Strahlungen in gleicher Weise.

Bei der photometrischen Anordnung wird ein Element des Kanalstrahlbündels von der Länge ds und dem Querschnitt $r^2\pi$ ersetzt durch das Flächenelement eines schwarzen Körpers $2r\,ds\sin\alpha$, das gleichviel strahlt. Betrachten wir ein Element des Spaltes ds, und ist $E\,d\lambda$ die Strahlung des schwarzen Körpers, N die Anzahl der stationär in einem Kubikzentimeter des Kanalstrahlbündels enthaltenen Ionen, σ die Ausstrahlung eines Ions in der Sekunde, so ist[1])

Fig. 2.

$$2r\,E\,d\lambda\,ds\,ds_1\sin\alpha = \frac{\sigma N\,ds\,ds_1\,r^2\pi}{4\pi},$$

woraus

$$N\sigma = \frac{8\pi\,E\,d\lambda\,r\sin\alpha}{r^2\pi}$$

folgt.

Ist e die Ladung des Elementarquantums, i die von den Kanalstrahlen in der Sekunde transportierte Elektrizitätsmenge, so ist i/e die Anzahl der in der Sekunde durch den Querschnitt gehenden positiv geladenen Ionen.

Ist v die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen, so ist die Anzahl der Ionen pro Zentimeter des Bündels i/ev, also die Anzahl in der Volumeinheit $i/evr^2\pi$.

Daher ist

$$\sigma = \frac{8\pi\,r\,E\,d\lambda\sin\alpha\,v\,e}{i}. \tag{4}$$

Für jeden Zentimeter braucht das Ion die Zeit $1/v$. Daher ist

$$s = \frac{\sigma}{v} = \frac{4\pi\,E\,d\lambda\,r\sin\alpha\,e}{i}$$

die Ausstrahlung jedes Ions auf der Weglänge eines Zentimeters.

Für die Bestimmung von $E\,d\lambda$ kann man die theoretischen Strahlungsformeln des schwarzen Körpers benutzen: da es sich um einen schmalen Spektralbereich handelt, so muß die Breite $d\lambda$

---

1) Es ist natürlich angenommen, daß die Strahlung nach allen Richtungen in gleicher Stärke ausgesandt wird.

der nach dem Dopplerschen Prinzip verschobenen Linie gemessen werden.

In der Messung der Breite der Linie und der Berücksichtigung der Intensitätsverteilung lag eine erhebliche Schwierigkeit. Um eine möglichst große Dispersion zu erhalten, wurde ein Kirchhoffscher Spektralapparat mit vier Prismen benutzt. Die von der letzten Prismenfläche reflektierte Skala wurde zur Messung der Breite der Spektrallinie benutzt. Zunächst wurde die Dispersion im Minimum der Ablenkung durch 11 Spektrallinien von bekannter Wellenlänge bestimmt. Die Wellenlänge λ ließ sich in $\mu\mu$ mit großer Genauigkeit durch die Formel

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{a}{s_0 - s}$$

ausdrücken, wo $a = 119000$, $s_0 = 549$, s die Skalenteile der reflektierten Skala bedeuten. Hieraus folgt

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{a}{(s_0 - s)^2}.$$

Für H_β ist $s = 25$, so daß hier

$$d\lambda = 0{,}433\, ds \text{ ist.}$$

Die Breite ds, ausgedrückt in Skalenteilen, wurde nun sowohl durch subjektive Beobachtung, wie durch photographische Aufnahmen bestimmt. Für letztere wurde an Stelle des Okulars eine kleine Kamera geschraubt, in welche eine kleine photographische Glasplatte geschoben werden konnte. Eine Okularlinse, die in die Kamera geschoben wurde, wurde auf die Glasplatte scharf eingestellt und darauf nach der Entfernung der Glasplatte scharf auf das reelle Bild des Objektivs eingestellt. Dann war man sicher, daß auf der photographischen Platte ein scharfes Bild entstehen mußte.

Bekanntlich ist die verschobene Spektrallinie nach der Seite der unverschobenen scharf begrenzt, an der anderen Seite dagegen verwaschen. An dieser Seite wurde von einer bestimmten Stelle ein gleichmäßiger Abfall der Intensität bis auf Null angenommen und hiernach die Grenze bestimmt, wie sie einem plötzlichen Aufhören entsprechen würde. Die Breite der Linien variiert mit der Spannung aber keineswegs pro-

portional der Geschwindigkeit, vielmehr ließ sich die empirische Formel aufstellen

$$ds = 1 + 0{,}01\sqrt{V},$$

wo V die Entladungsspannung in Volt, ds in Skalenteilen gemessen ist.

Nun ist bekanntlich für die kürzeren Wellenlängen gültig die Formel

$$E\,d\lambda = \frac{2c^2h}{\lambda^5}\,e^{-\frac{ch}{\kappa\lambda T}}\,d\lambda. \tag{5}$$

$$c = 3\,.\,10^{10}, \quad h = 6{,}55\,.\,10^{-27}, \quad k = 1{,}346\,.\,10^{-16},$$

$$\lambda = 486{,}1\,.\,10^{-7},$$

woraus $E\,d\lambda$ zu berechnen ist.

Als Korrektion ist noch die doppelte Reflexion an der einen Glaswand anzubringen. Sie wird nach den Fresnelschen Formeln berechnet und ergibt sich zu 13 Proz.

Alle Beobachtungen wurden bisher nur an der Linie H_β des Wasserstoffs gemacht, weil diese Linie bei der starken Dispersion allein hell genug war, um photometrische Messungen zu gestatten.

§ 2. Die elektrischen Messungen.

Zur Erzeugung einer konstanten Entladung in einer reinen Gasfüllung wurde eine Methode gebraucht, die sich sehr bewährt hat und für Messungen in reinen Gasen empfohlen werden kann. Bekanntlich findet in Entladungsröhren ein beständiger Austausch der Gasfüllung mit den in den Elektroden okkludierten Gasen statt, so daß es einer häufigen Erneuerung der Gasfüllung bedarf, wenn man reine Gase haben will. Um dies nun in möglichst zuverlässiger Weise zu erhalten, wurde ein beständiger Gasstrom in die Entladungsröhre eingeleitet und durch eine Gaedesche Pumpe wieder herausgepumpt. Da die Pumpe sehr rasch und sehr konstant pumpt, so war es möglich, einen stationären Gasstrom einzuleiten und doch das Vakuum auf einer beträchtlichen Höhe zu halten. Der Gasstrom wurde durch eine Kapillare eingeleitet, die ungefähr 1,4 m lang und 0,1 mm im Durchmesser hatte. Sie führte zu einem großen Glasgefäß, das mit Hilfe der Gerykpumpe leergepumpt und dann mit reinem, trockenem Wasserstoff ge-

füllt wurde. Die Menge des durch die Kapillare einfließenden Wasserstoffs wurde durch den Druck in dem Glasgefäß reguliert. Wenn die Gaedesche Pumpe in Tätigkeit trat, so stellte sich ein stationäres Vakuum her, das von dem Druck, der im Vorgefäß herrschte, abhängig war. Es war auf diese Weise leicht, das Vakuum nach Belieben zu regulieren.

Es ist natürlich, daß die Reinheit der Gasfüllung auf diese Weise eine sehr große war. In der Tat zeigten auch lichtstarke Spektroskope keine Spur anderer als der Wasserstofflinien, mit Ausnahme der grünen Quecksilberlinie. Diese wurde auch durch Vorschalten von Schwefel nicht vollständig beseitigt. Sie verschwand erst, als ein Gefäß eingeschaltet wurde, das durch feste Kohlensäure auf $-80°$ abgekühlt war.

Zur Bestimmung der an den Kanalstrahlen transportierten Elektrizitätsmenge war ein Auffänger in der Röhre hinter der Kathode verschiebbar. Er bestand aus einer Messingröhre von 10 cm Länge, die an einem Ende verschlossen war, am anderen einen Deckel trug, in dem eine Öffnung von 6 mm Durchmesser gebohrt war. An das verschlossene Ende der Röhre war ein Messingdraht befestigt, der wieder mit einem Eisenzylinder verbunden war. Der Eisenzylinder verschob sich in einer Röhre von 12 mm l. W. Wurde um diese Röhre eine Spule gelegt, die von einem Strom durchflossen wurde, so wurde der Eisenzylinder in diese Spule hineingezogen und folgte auf diese Weise jeder Bewegung der Spule. Zur Messung des Kanalstrahlstromes wurde der Auffänger ganz nahe an die Kathode herangeschoben. Das ganze Kanalstrahlbündel fiel dann in die Öffnung des Auffängers und bei den großen Dimensionen des Auffängers konnten Sekundärstrahlen nicht in nennenswertem Betrage nach außen gelangen. Die Vorrichtung diente gleichzeitig dazu, die Abnahme des Kanalstromes mit der Entfernung von der Kathode zu messen. Der Strom selbst wurde durch ein Spulengalvanometer von Siemens & Halske gemessen, das durch Nebenschlüsse auf eine passende Empfindlichkeit gebracht war.

Der durch die Entladungsröhre gehende Strom wurde bei Spannungen über 4000 Volt von einer 20 plattigen Influenzmaschine, bei niedrigeren von einer Hochspannungsdynamo geliefert. Die niedrigeren Spannungen wurden durch ein elektro-

statisches Voltmeter von Siemens & Halske, die höheren durch Funkenlängen zwischen blanken Messingkugeln von 6 cm Durchmesser gemessen.

Jede Beobachtung geshah nun in der Weise, daß zunächst die Helligkeit des beleuchteten Platindrahtes im Okular gleich der Helligkeit der verbreiterten Spektrallinie gemacht wurde. Dann wurde die Entladung abgestellt und die Helligkeit der Strahlung des schwarzen Körpers gleich der des Platindrahtes gemacht. Dann wurde die Temperatur am Siemensschen Spulengalvanometer, das mit dem Thermoelement verbunden war, abgelesen. War diese Beobachtung gemacht, so wurde der Auffänger für die Kanalstrahlen bis ganz nahe an die Kathode geschoben und dann am Siemensschen Spulengalvanometer mit Spiegelablesung die Stromstärke des Kanalstrahlenstromes abgelesen, schließlich die Spannung. Da die Entladung sehr konstant blieb, war vollauf Zeit, die einzelnen Beobachtungen sorgfältig durchzuführen.

In der Tabelle sind die Ergebnisse der Beobachtungen zusammengestellt. Die erste Vertikalreihe enthält die beobachteten Entladungsspannungen, die zweite die hieraus berechneten Geschwindigkeiten des Wasserstoffatoms, die dritte die absolute Temperatur des schwarzen Körpers, die vierte den Kanalstrahlenstrom, die fünfte den Wert von σ, berechnet aus Formeln (4) und (5) mit folgenden Zahlenwerten:

$$r = 0{,}35 \text{ cm}, \quad e = 4{,}69 \cdot 10^{-10} \text{ elektrost. Einh.}$$

Die sechste endlich enthält den Druck des Gases bei der beobachteten Spannung in mm Hg.

In der Kolumne der Tabelle, die mit σ_1 überschrieben ist, sind die Werte von σ angegeben, die man erhält, wenn man anstatt der aus der Entladungsspannung berechneten Geschwindigkeit der Kanalstrahlen den Mittelwert der Geschwindigkeit setzt, den man erhält, wenn man die verschiedenen Geschwindigkeiten berücksichtigt, deren Vorhandensein durch die Breite der verschobenen Spektrallinie bewiesen wird. Da die äußerste Grenze dieser sehr nahe der aus der Elektrodenspannung berechneten entspricht, so entspricht der Mittelwert der Verschiebung der Spektrallinie, die wir erhalten, wenn

wir von der berechneten die halbe Breite $\delta\lambda/2$ der verschobenen Spektrallinie abziehen, d. h.

$$\lambda_0 - \lambda - \frac{\delta\lambda}{2}, \quad \text{wo} \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

das Verhältnis der berechneten Geschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit ist. Es ist also, wenn v_1 die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet,

$$\frac{v_1}{c} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} - \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{v}{c} - \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0},$$

woraus

$$\frac{v_1}{v} = 1 - \frac{c\,\delta\lambda}{2 v \lambda_0} \text{ folgt.}$$

Berücksichtigen wir noch, daß wir $\delta\lambda$ nicht durch Beobachtung in der Geschwindigkeitsrichtung, sondern in einer um den Winkel α geneigten erhalten haben, so ergibt sich

$$\frac{v_1}{v} = 1 - \frac{c\,\delta\lambda}{2\lambda_0 v \cos\alpha}.$$

Spannung in Volt	Geschwindigkeit $\frac{cm}{sec}\,10^{-7}$	Absolute Temperatur T	Strom $\times 10^5$ in C.G.S.	$\sigma \cdot 10^7$	$\sigma_1 \cdot 10^7$	s in mm Hg
1890	6,15	1293	0,28	3,77	2,3	0,401
1990	6,16	1342	0,52	4,86	3,0	0,40
2250	6,71	1355	0,64	5,41	3,4	0,31
2300	6,78	1363	0,78	5,08	3,2	0,30
2550	7,14	1362	0,72	5,92	3,8	0,23
2650	7,28	1333	0,64	4,17	2,7	0,200
5820	10,79	1414	3,52	4,9	3,8	0,081
10800	14,70	1362	2,09	5,7	4,4	0,061
12600	15,87	1352	2,60	4,5	3,5	0,053
13500	16,43	1383	2,72	7,4	5,8	0,050
18600	19,29	1384	2,37	10,5	8,3	0,039
32700	25,6	1333	2,58	6,9	5,6	0,016

§ 8. Die Dämpfung der Schwingungsenergie der Ionen durch Strahlung und der Absorptionsindex.

Die Größe σ hat sich im wesentlichen direkt durch die Beobachtung ergeben. Um aber die Größe U, die Energie

der Schwingungszentren zu bestimmen, müssen wir noch die Dämpfung kennen.

Unter der Voraussetzung, daß die Ionen durch schwingende negative Elektronen leuchten, wie es nach dem Zeemanschen Phänomen wahrscheinlich ist, hat Wiechert eine wichtige Berechnung der Dämpfungskonstante gegeben.[1]) Er findet

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{3}{8\pi^2} \frac{mc}{e} \frac{\lambda^2}{e}, \tag{6}$$

wo für

$$\frac{e}{m} = 1{,}87 \cdot 10^7, \quad e = 4{,}69 \cdot 10^{-10}$$

einzusetzen ist, entsprechend dem negativen Elektron. Hieraus ergibt sich

$$2\alpha = 9{,}77 \cdot 10^7.$$

Wenn man diesen Wert auf die Dämpfung unserer Ionen anwendet, so kommt man auf eine erhebliche Schwierigkeit. Er ist nämlich mit den Beobachtungen nicht vereinbar, wenn man von der Annahme ausgeht, daß das Leuchten der Kanalstrahlen vor der Kathode erregt wird und dann hinter der Kathode keine Anregung mehr erfolgt. Für eine Geschwindigkeit $6{,}15 \cdot 10^7$ wäre nämlich der Dämpfungsindex für den Zentimeter

$$\frac{2\alpha}{v} = \frac{9{,}77}{6{,}15}$$

viel zu groß, um mit der Beobachtung vereinbar zu sein. Tatsächlich bemerkt man auch bei diesen geringen Geschwindigkeiten auf Strecken von über 10 cm noch erhebliches Leuchten der Kanalstrahlen.

Obwohl nun der Wiechertsche Wert auf der Voraussetzung beruht, daß die Emission durch schwingende Bewegung eines Elektrons hervorgerufen wird, was bei unserer Unkenntnis über den Mechanismus des Leuchtens zweifelhaft erscheinen mag, so spricht doch ein weiterer Umstand gegen die Voraussetzung, daß der Leuchtprozeß ausschließlich vor der Kathode erregt wird. Wenn dies nämlich der Fall wäre, so dürfte hinter der Kathode kein Leuchten mehr hervor-

1) E. Wiechert, Jubelband für H. A. Lorentz 1900. p. 571.

gerufen werden und alles dort auftretende Licht würde von den zum Leuchten gebrachten und hinter die Kathode fliegenden Ionen ausgesandt werden.

Nun zeigt aber dies Spektrum hinter der Kathode nicht nur die verschobene Spektrallinie, sondern auch eine von ruhenden Ionen ausgesandte Linie. Beide sind durch einen dunkeln Zwischenraum getrennt. Es ist also nicht möglich, daß die Ionen zum Teil allmählich zur Ruhe kommen und schließlich eine „ruhende" Linie aussenden, denn dann müßte der dunkle Zwischenraum fehlen. Man kann doch nicht wohl annehmen, daß die allmählich langsamer fliegenden Teilchen bei einer bestimmten Geschwindigkeit zu leuchten aufhören und im Ruhezustande wieder zu leuchten beginnen.

Die Existenz der ruhenden Linie hinter der Kathode scheint mir vielmehr zu beweisen, daß wir auch hier noch Erregung des Leuchtens anzunehmen haben. Diese Überlegung macht es aber auch unmöglich, die Dämpfung experimentell aus der Lichtabnahme mit wachsender Entfernung von der Kathode zu bestimmen, wie es sonst wohl möglich wäre.

Legen wir für die Dämpfung den Wiechertschen Wert zugrunde, so können wir unter der Voraussetzung, die wohl ziemlich sicher zutreffen wird, daß die strahlenden Ionen ihre Schwingungsenergie vollständig in Form von Strahlung aussenden können, den Wert der Energie U selbst berechnen. Es ist dann

$$U = \int_0^\infty \sigma e^{-2\alpha t} dt = \frac{\sigma}{2\alpha}.$$

Ferner kann man auch den Absorptionsindex eines mit strahlenden Ionen erfüllten Raumes ohne Zuhilfenahme weiterer Hypothesen bestimmen. Bei den Versuchen mit Kanalstrahlen ist die Anzahl der leuchtenden Ionen so außerordentlich klein, daß eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen ist. Unter der Voraussetzung bekannter Dämpfung erhält man dann den Wert des Absorptionsindex.

Nennen wir $2\Re dn$ die Intensität, n die Schwingungszahl einer in der Richtung der Polarkoordinaten ϑ, φ, auf einen linear schwingenden Oszillator auffallenden unpolarisierten, monochromatischen Strahlung, dn die Spektralbreite der von

ihm emittierten und absorbierten Strahlung, so wird[1]) von dem Oszillator die Energie

$$d\,t \cdot \frac{3\,c^2\,\alpha}{4\,\pi\,n^2}\,\mathfrak{K}\sin^3\vartheta\,d\,\varphi\,d\,\vartheta$$

absorbiert. Kommen von allen Richtungen gleiche Intensitäten, so haben wir in bezug auf ϑ von 0 bis π, in bezug auf φ von 0 bis $2\,\pi$ zu integrieren, und erhalten

$$d\,t \cdot \frac{2\,\alpha\,c^2}{n^2}\,\mathfrak{K}.$$

Betrachten wir nun ein Volumelement $dx\,dy\,dz$ und nennen N die Anzahl Oszillatoren in der Volumeinheit. Es gehen dann in allen Richtungen Strahlen gleicher Intensität und in der Richtung dx die Energie

$$2\,\mathfrak{K}\,dn\,dt\,dy\,dz$$

in das Volumelement. Auf der anderen Seite tritt heraus die Energie

$$2\,\mathfrak{K}\,dn\,dt\,dy\,dz + 2\,\frac{\partial\,\mathfrak{K}}{\partial\,x}\,dx\,dn\,dt\,dy\,dz.$$

Der Unterschied ist die absorbierte Energie. Also

$$d\,t.\,N\,dx\,dy\,dz\,\frac{2\,\alpha\,c^2}{n^2}\,\mathfrak{K} = -\,2\,\frac{\partial\,\mathfrak{K}}{\partial\,x}\,dx\,dy\,dz\,dn\,dt.$$

Nun ist in einem absorbierenden Medium

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0\,e^{-\beta x},$$

$$\beta = \frac{\frac{\partial\,\mathfrak{K}}{\partial\,x}}{\mathfrak{K}},$$

also

$$= \frac{2\,\alpha\,c^2\,N}{2\,n^2\,d\,n}. \tag{7}$$

Es ist hiernach der Absorptionsindex, wenn wir es nur mit einfachen Elektronenschwingungen zu tun haben, proportional der Anzahl N der Ionen in der Volumeinheit.

Die Gültigkeit dieser Beziehung (7) ruht im wesentlichen auf denselben Voraussetzungen wie die Berechnung der Dämpfung nach Wiechert. Für einen Strahl von gleicher

1) Vgl. M. Planck, Vorles. über die Theorie der Wärmestrahlung p. 206.

Beschaffenheit, wie der bei der Spannung von 32700 Volt beobachtete, wo die Anzahl der Ionen in der Volumeinheit $N = 1{,}68 \cdot 10^7$ ist, ergibt sich in derselben Richtung, wie die Beobachtung erfolgte,

$$\beta = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$$

für den Zentimeter. Die Beobachtung dieser Absorption dürfte der Beobachtung unzugänglich sein.

Bei der Formel (7) ist angenommen, wie es bei Spektrallinien ja annähernd der Fall ist, daß die Gesamtintensität

$$\int_0^\infty \mathfrak{K}\, dn = \mathfrak{K}\, dn$$

ist. Man ersieht, daß bei schmalen Linien der Absorptionsindex erheblich größer sein müßte.

In unserem Falle hatten wir es mit einer durch die verschiedene Geschwindigkeit der Ionen verbreiterte Linie zu tun. Die Zahl der Ionen, von denen man eine schmale Linie erhält, ist also verkleinert und daher kommt ein verhältnismäßig kleiner Wert des Absorptionsindex.

Im Natriummetall ist der Absorptionsindex für gelbes Natriumlicht nach Drude

$$\beta_{Na} = 3{,}37 \cdot 10^5.$$

In einem Kubikzentimeter Natrium sind $N_{Na} = 2{,}6 \cdot 10^{22}$ Atome. In unserem Kanalstrahlbündel war die Zahl der bewegten leuchtenden Ionen

$$N = 1{,}68 \cdot 10^7,$$

daher ist

$$\frac{\beta \cdot N_{Na}}{\beta_{Na} \cdot N} = 5{,}75 \cdot 10^3,$$

d. h. die Absorption der einzelnen Kanalstrahlionen wäre $5{,}76 \cdot 10^3$ mal so groß wie die der einzelnen Na-Atome im festen Metall. Doch bezieht sich, wie oben bemerkt, dieser Absorptionsindex auf die bewegten Ionen. Um den eigentlichen Wert des Absorptionsindex zu erhalten, müßte man für dn die natürliche Breite der Linie einsetzen. Die Absorption von Spektrallinien in Salzflammen kann möglicher-

weise gemessen werden und würde, falls man die Ionenzahl bestimmen könnte, zu einer Prüfung der obigen Formel dienen können.

§ 4. Berechnungen und Hypothesen.

Es mag noch besonders hervorgehoben werden, daß der beobachtete Strahlungszustand mit der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen nichts zu tun hat. Allerdings scheint die Erregung des Leuchtens durch die Geschwindigkeit bedingt zu sein. Das einmal erzeugte Leuchten kann aber nur in unmerklichem Grade von der Geschwindigkeit beeinflußt werden. Aus der Tabelle p. 426 geht auch hervor, daß die Größe σ nur in geringer Weise von der Geschwindigkeit abhängt, wenn diese Abhängigkeit nicht überhaupt sekundären Einflüssen zuzuschreiben ist.

Nach der vorgetragenen Anschauung verhält sich ein System leuchtender positiver Ionen wie ein Körper von hoher Temperatur und geringem Emissionsvermögen. Ein Kanalstrahlenbündel von unendlichem Querschnitt würde die Spektrallinie in der Intensität geben wie ein schwarzer Körper von der berechneten Temperatur. Sei die Energie der aus dem Oberflächenelement ds des unendlich dicken Bündels senkrecht heraustretenden Strahlen

$$E_\lambda \, d\lambda \, ds.$$

Zu diesen Strahlen hat jedes auf dem Wege der Strahlen liegende Volumelement $ds.dx$ einen Beitrag geliefert, nämlich $N\sigma \, ds \, dx \, e^{-\beta x}$, wo β wieder den Absorptionsindex bezeichnet. Daher ist

$$E_\lambda \, d\lambda \, ds = N\sigma \, ds \int_0^\infty dx \, e^{-\beta x} = \frac{N\sigma}{\beta} \, ds.$$

Also ist

$$\frac{N\sigma}{\beta} = E_\lambda \, d\lambda.$$

Nun ist die Emission des schwarzen Körpers senkrecht zum Oberflächenelement

$$E_\lambda \, d\lambda = d\lambda \, \frac{2c^2h}{\lambda^5} \, e^{-\frac{\varepsilon}{\varkappa T}},$$

wenigstens, wenn $e^{\varepsilon/\varkappa T}$ groß gegen 1 ist. Die Temperatur T bestimmte sich aus der Gleichung

$$\frac{U}{s} = e^{-\frac{\varepsilon}{\varkappa T}},$$

so daß

$$E_\lambda d\lambda = d\lambda \frac{2c^2 h U}{\lambda^5 s} = \frac{d\lambda\, 2c^2 h}{\lambda^5 s} \cdot \frac{\sigma}{2\alpha}.$$

Daher ist

$$\beta = \frac{N\sigma}{E_\lambda d\lambda} = \frac{N\sigma \cdot 2\alpha s \lambda^5}{2c^2 h\, d\lambda\, \sigma},$$

oder, da

$$n = \frac{c}{\lambda}, \quad hn = \varepsilon, \quad dn = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

ist, wenn die positiven dn und $d\lambda$ nach derselben Weise gerechnet werden,

$$\beta = \frac{N 2\alpha c^2}{2n^2 dn}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (7).

Wenn wir den Wert von σ für hohe Spannungen zugrunde legen, nämlich

$$\sigma = 5{,}64 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Erg}}{\text{sec}},$$

und ferner setzen

$$2\alpha = 9{,}78 \cdot 10^7 \,\text{sec}^{-1}, \quad \varepsilon = 4{,}04 \cdot 10^{-12} \,\text{Erg}, \quad \varkappa = 1{,}846 \frac{\text{Erg}}{\text{Grad}},$$

so berechnet sich aus $\frac{\sigma}{2\alpha s} = e^{-\frac{\varepsilon}{\varkappa T}}$

$$T = 4584^0.$$

Berechnen wir die mittlere Geschwindigkeit, die dieser Temperatur entspricht, wenn wir ein vollkommenes Gas betrachten, dessen Atome die Masse eines Elektrons haben, so finden wir

$$u = 4{,}61 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Diese Geschwindigkeit erreichen die Elektronen durch eine Spannung von 0,64 Volt und sie entspricht der lebendigen Kraft eines Elektrons von

$$9{,}24 \cdot 10^{-13} \,\text{Erg}.$$

Diese Energie ist von der Größenordnung des Elementarquantums der Energie

$$4 \cdot 10^{-12} \,\text{Erg}$$

selbst.

Sollte die Übereinstimmung beider Werte etwa durch eine genauere Kenntnis des Dämpfungsverhältnisses und der Anzahl der Ionen eine bessere werden, so würde man anzunehmen haben, daß die mittlere lebendige Kraft der Elektronenbewegung auch hier die Temperatur bestimmt und daß die freien Elektronen bei dieser mittleren lebendigen Kraft sich mit den inneren gebundenen Elektronen des Atoms ins dynamische Gleichgewicht setzen können. Im vollen Gleichgewichtszustand würde dann ein beständiger Austausch zwischen freien und gebundenen Elektronen stattfinden. Beim Hineingehen eines Elektrons ins Atom würde seine Energie als ein Elementarquantum in Strahlung verwandelt werden und bei der Absorption eines Energieelementes würde ein Elektron wieder frei.

Für die Erregung des Leuchtens würde hiernach im wesentlichen die Existenz des notwendigen Betrages der mittleren lebendigen Kraft freier Elektronen notwendig sein.

Es kommt nach dieser Auffassung für die Erregung des Leuchtens nicht auf die Anzahl der Zusammenstöße und auf die Geschwindigkeit der Ionen an, sondern nur darauf, daß Elektronen von genügender mittlerer lebendiger Kraft sich mit den Ionen in demselben Raum befinden. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß die durch Kathoden- und Kanalstrahlen erzeugten sekundären Elektronen, deren Geschwindigkeit nach den Beobachtungen von Füchtbauer nahe gleich und von derselben Größenordnung ist, wie sie die vom Licht erzeugten Elektronen besitzen, und die in der Tat der Größenordnung nach mit der hier geforderten mittleren lebendigen Kraft der Elektronen übereinstimmt, bei der Erzeugung des Leuchtens eine wesentliche Rolle spielen, wie denn auch bereits von Einstein[1]) ein Zusammenhang zwischen den Elementarquanten der Energie und den Geschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektronen vermutet wurde.

Bei der ausgeführten Berechnung der Temperatur haben wir die ganze in der H_β-Linie des Wasserstoffs ausgesandte Energie im Vergleich zu dem Elementarquantum der Energie, das der Schwingungszahl der H_β-Linie entspricht, zugrunde gelegt.

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 146. 1905.

Das ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Da die Linie selbst nicht absolut homogenem Licht entspricht, sondern eine gewisse Breite hat, ein Umstand, der überhaupt erst erlaubt, ihr eine Entropie zuzuschreiben, so hat die Linie auch eine ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Schwingungszahlen. Nun kann aber nicht jeder einfachen Schwingungszahl ein Energieelement entsprechen. Einer einfachen Schwingungszahl würde in der Energiekurve des Wärmespektrums ein unendlich schmaler Streifen von unendlich kleinem Energiebetrage entsprechen, während das Energieelement endlich ist. Nach der oben vorgetragenen Auffassung ist ein Energieelement das von einem Atom nach einmaliger Erregung bez. bei Aufnahme eines Elektrons durch Strahlung abgegebene Energiequantum. Diese Hypothese bestimmt aber noch nicht die Verhältnisse eindeutig. Wir vermögen nicht eine begründete Bestimmung darüber zu treffen, ob wir jede im Spektrum einfach erscheinende Linie als selbständig anzusehen haben, der eine bestimmte Entropie zukommt.

Es wird das besonders dadurch fraglich, daß man, wie beim Zeemanschen Phänomen, aus einer Linie durch magnetische Einwirkung mehrere erhalten kann.

Es ist indessen, wie mir scheint, nicht im Widerspruch mit der Planckschen Theorie, wenn man der zu einem Energiequantum gehörenden Schwingungszahl einen gewissen Spielraum gestattet, der unter normalen Verhältnissen durch die natürliche Breite der Spektrallinie bestimmt ist. Verbreiterung der Linie wäre zu deuten als gegenseitige Beeinflussung der Atome, so daß die Strahlung nicht mehr als Summe der Ausstrahlung der einzelnen leuchtenden Atome aufgefaßt werden kann.

Die einfachen Linien als selbständig anzusehen, denen eine Entropie im obigen Sinne zukommt und deren Energieelement sich aus ihrer mittleren Schwingungszahl berechnet, scheint mir daher zunächst die einfachste Auffassung zu sein. Immerhin wird niemand verkennen, daß die Bestimmung der Temperatur, die H_β zukommt, einen aus mehr als einem Grunde hypothetischen Charakter hat.

Es muß hier noch auf eine Schwierigkeit hingewiesen werden, die in der vorgetragenen Auffassung liegt. Wenn wir

ein dynamisches Gleichgewicht der Ionen mit den Elektronen haben, so ist es wahrscheinlich, daß auch die gewöhnlichen Leitungselektronen sich mit den Ionen in ein solches Gleichgewicht setzen. Während nach dem oben Auseinandergesetzten die Zahl der wirklich zum Leuchten gebrachten gegenüber den nicht leuchtenden klein ist, kann durch die Leitungselektronen eine größere Zahl von Ionen vorübergehend neutralisiert werden. Dann würde die Anzahl N der Ionen, gemessen durch den positiven Kanalstrahlenstrom, zu klein ausfallen und die obigen Zahlen erhielten eine entsprechende Modifikation.

Wenn in Ergänzung einer früher von mir gemachten Annahme[1]) die Möglichkeit ins Auge gefaßt wird, daß die verschieden starken magnetischen Ablenkungen der Kanalstrahlen dadurch zustande kommen, daß ein Teil der Ionen seine Ladung auf der Bahn verliert und wieder aufnimmt, so ist es möglich, aus diesen Ablenkungen auf die richtige Ionenzahl zu schließen, und ich beabsichtige besondere Untersuchungen nach dieser Richtung hin anzustellen.

Andererseits kann, wenn ein Ion mehrere Elektronen abgegeben hat, die Anzahl N zu groß gemessen werden.

§ 5. Über die Zusammenstöße der fliegenden Kanalstrahlteilchen mit ruhenden Atomen.

Nach einer bekannten Betrachtung der kinetischen Gastheorie[1]) ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fliegendes Atom auf der Strecke r mit den ruhenden nicht zusammenstößt,

$$e^{-\alpha_1 r},$$

wo $\alpha_1 = N\pi R^2$ ist, wenn N die Anzahl der Atome in der Volumeinheit, R der Radius des Atoms (oder der Wirkungssphäre) ist. Da nun die Atome des Gases gegenüber den großen Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen als ruhend angesehen werden können und andererseits die Zusammenstöße der positiv geladenen Teilchen mit ruhenden die Zahl der ersteren verringern muß, so werden wir die Zahl dieser der Größe $e^{-\alpha_1 r}$ proportional setzen können. Dann ist α_1 der Absorptionsindex der Kanalstrahlteilchen und dieser muß uns etwas über die Zusammenstöße aussagen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 13. p. 677. 1904.

Um die Anzahl der N der Atome in der Volumeinheit zu kennen, wurde die Dichte des Gases mit einem McLeodschen Manometer von 500 ccm Inhalt gemessen. Hierbei konnte natürlich nicht der stationäre Gasstrom unterhalten werden, da bei diesem die Dichtigkeit nicht überall gleich ist. Es wurde deshalb die Füllung mit reinem Wasserstoff vorgenommen und längere Zeit gewartet, bis der Druck sich ausgeglichen hat. Dann wurde die Entladungsspannung und die entsprechende Dichte beobachtet. Die graphische Darstellung dieser Beobachtungen zeigt Fig. 3. Die Beobachtung des Ab-

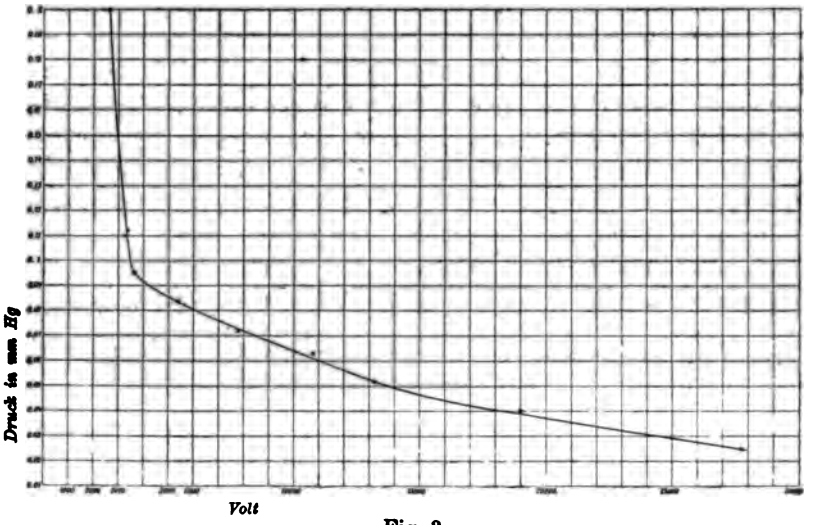


Fig. 3.

sorptionsindex der Kanalstrahlen geschah durch den beweglichen, in § 2 beschriebenen Empfänger, der in verschiedene Entfernung von der Kathode gebracht wurde. Es wurde in den verschiedenen Stellungen der Strom gemessen. Hierbei ergab sich, daß der Wert von α_1 bei kleiner Entfernung von der Kathode kleiner war als bei größerer, so daß der Absorptionsindex mit der Entfernung zunimmt.

Bei größerer Entfernung werden die Werte von α_1 konstanter und es wurden nun die Werte von α_1 in größerer Entfernung bei verschiedener Gasdichte und Geschwindigkeit miteinander verglichen.

Im folgenden sind einige der erhaltenen Werte zusammengestellt.

Spannung in Volt	s_1 in mm Hg	α_1 pro cm	$R \cdot 10^9$ cm
1550	0,47	0,21	1,67
2660	0,20	0,08	1,60
3150	0,18	0,07	1,8
4800	0,087	0,036	1,58
10800	0,061	0,02	1,4

Man sieht hieraus zunächst, daß der Wert von R ziemlich unabhängig ist von der Geschwindigkeit der Ionen. Er ist aber auch weit kleiner als die Werte, die aus der kinetischen Gastheorie folgen.

Fassen wir zum Schluß die Ergebnisse zusammen.

I. In den §§ 1 und 2 ist die mittlere Energie bestimmt, welche ein Wasserstoffatom im positiv geladenen Zustande in der Linie H_β in der Zeiteinheit aussendet. Diese Fragestellung und Beobachtungsmethode sind unabhängig von den weiteren, zum Teil hypothetischen Betrachtungen.

II. Im § 3 wird die mittlere Schwingungsenergie eines Wasserstoffions unter der Annahme bestimmt, daß die Dämpfung nur durch Strahlung erfolgt und durch den Wiechertschen Wert bestimmt ist. Mit der Dämpfung hängt unmittelbar zusammen der Absorptionsindex, wenn die einzelnen Oszillatoren einander nicht beeinflussen. Möglicherweise läßt sich die Dämpfung durch Beobachtung des Absorptionsindex bestimmen.

III. In § 4 wird unter Zugrundelegung der Planckschen Theorie der Elementarquanten der Energie aus dem erhaltenen Wert der mittleren Energie im Verhältnis zum Elementarquantum hypothetisch die Temperatur berechnet, die dem Leuchtprozeß von H_β zukommt.

Hierbei ist hypothetisch:

1. daß der Emission der Linienspektren eine Temperatur überhaupt zukommt und daß sie dann durch die Plancksche Theorie bestimmt wird;

2. daß die Emission der Linie H_β als selbständiger und einheitlicher Vorgang aufzufassen ist, dem eine bestimmte Entropie und Temperatur zuzuschreiben ist;

3. daß durch den Kanalstrahlstrom die Anzahl der Ionen richtig bestimmt wird.

IV. In § 5 wird aus dem Absorptionsindex der Kanalstrahlen im Gase bei verschiedener Dichte auf den Wirkungsradius der einzelnen Atome geschlossen, der sich merklich unabhängig von der Dichte des Gases und der Geschwindigkeit erweist.

Würzburg, Physik. Institut, Mai 1907.

(Eingegangen 9. Mai 1907.)

3. *Über die Polarisation der Röntgenstrahlen und der Sekundärstrahlen; von H. Haga.*

Bei seinen in 1904 und 1905 mitgeteilten[1]) Versuchen verglich Barkla mittels zwei geladener Elektroskope das Entladungsvermögen der durch Papier, Aluminium und Luft ausgesandten sekundären Röntgenstrahlen in senkrecht zu den einfallenden Strahlen stehenden Richtungen und fand einen Unterschied von 11—20 Proz. in Richtungen, die einen Winkel von 90° miteinander bildeten; die Stellen des maximalen und minimalen Entladungsvermögens wechselten ihre Lagen durch eine Drehung der Röntgenröhre von 90° um die Richtung des die Sekundärstrahlen erregenden Strahlenbündels. Barkla folgerte aus diesen Versuchen, daß die Röntgenstrahlen zum Teil polarisiert seien.

In einer späteren Arbeit[2]) zeigte Barkla, daß die durch eine Kohleplatte ausgesandten Sekundärstrahlen vollkommen polarisiert sind; auch dieses Resultat erhielt er mit den Elektroskopen, auf welche die tertiären Strahlen fielen, die von einem zweiten durch jene Sekundärstrahlen bestrahlten Kohlenstück ausgesandt wurden.

Von diesen beiden Resultaten habe ich nur das letztgenannte photographisch bestätigen können.[3]) Meine Versuchsanordnung ist aus der Figur, welche in ungefähr ein Drittel der Größe einen horizontalen Durchschnitt durch die Mitte darstellt, ersichtlich.

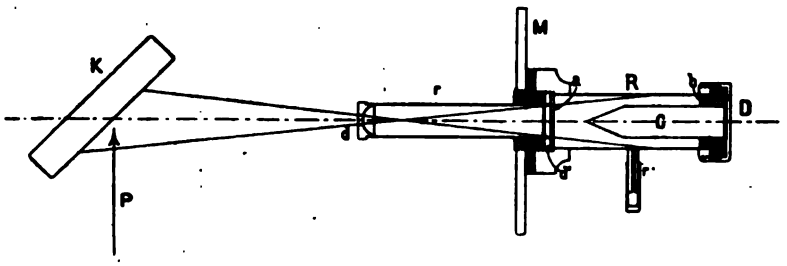
Die 4 mm dicke Messingplatte *M* ist mit einem eisernen Winkelstück auf der oberen Fläche eines eisernen Balkens befestigt; in dieser Platte ist ein 7 cm langes, 1,5 cm weites Messingrohr *r* mittels eines mit einem Schraubengewinde versehenen aufgelöteten Messingringes festgeschraubt; an der

1) C. G. Barkla, Nature 17. März 1904, 9. März 1905; Phil. Trans. Roy. Soc. London 204. p. 467. 1905.

2) C. G. Barkla, Proc. Roy. Soc. London 77. p. 247. 1906.

3) H. Haga, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 30. Juni 1906.

rechten Seite dieses Ringes war ebenfalls ein Schraubengewinde geschnitten, auf welches die 2,5 cm weite, 7 cm lange Röhre *R* geschraubt wurde. Die eine Öffnung dieser Röhre, *a*, war mit einer schwarzen Papierscheibe geschlossen und mit einem Diaphragma *d'* mit einer Öffnung von 14 mm versehen; in die andere Öffnung, *b*, paßte genau ein Hartgummiring, in dessen Mitte ein 6 cm langer, 14 mm dicker Kohlestab mit einer 17 mm langen, kegelförmigen Spitze befestigt war. Da die beiden Messingröhren, der Hartgummiring und Kohlestab sorgfältig auf der Drehbank gearbeitet waren, fielen ihre Achsen zusammen. Ein Messingdeckel *D* konnte auf das rechte Ende der Röhre *R* geschraubt werden, wodurch ein völlig lichtdichter Abschluß der Röhre entstand, und es möglich war, im Dunkelzimmer in die Röhre *R* ein Rollfilmstück hinein zu



schieben, es mit einem Paar federnder Metallringe an die Innenwand zu drücken, so daß diese ganz mit dem Film bekleidet war.

In dem an der Wand der Röhre *R* angelöteten und verschließbaren Röhrchen *r'* war ein nach der Achse durchbohrtes Stäbchen eingeschoben; durch diese Bohrung und ein korrespondierendes kleines Loch in der Wand der Röhre *R* wurde mittels einer feinen Nadel ein kleines Loch in das Film eingestochen; da bei den Versuchen das Seitenröhrchen horizontal war, gab die durch dieses kleine Loch gehende erzeugende gerade Linie den Teil des zylinderförmig gebogenen Films an, der sich in der horizontalen Ebene befand.

Dieser Apparat wurde vor der Kohleplatte *K* so aufgestellt, daß die von dieser ausgesandten Sekundärstrahlen durch das 5 mm weite Diaphragma *d* und das Diaphragma *d'* in die Röhre *R* fielen. Diese Diaphragmen waren so dimensioniert,

daß nur der hintere Teil des Films von den Sekundärstrahlen getroffen werden konnte, nicht aber der dem Kegel gegenüber befindliche Teil; auf diesen Teil konnten also nur die vom Kegel ausgesandten tertiären Strahlen einwirken. In der horizontalen Richtung *P* fielen die primären Röntgenstrahlen auf die Platte *K*, welche sich so nahe wie möglich bei der Röntgenröhre befand. Dicke Bleiplatten, zusammen 1,5 cm, schützten das Film in der Röhre *R* gegen eine direkte Wirkung der primären Strahlen; die Röhre *r* war umgeben von einem 8 mm dicken Bleizylinder. Zur Erzeugung der Röntgenstrahlen diente ein von Siemens & Halske gelieferter Induktor von 60 cm Funkenlänge mit vierteiliger Primärspule, ein Wehneltinterruptor und eine Akkumulatorenbatterie von 65—110 Volt; der Strom war 2—4 Amp.; es wurden Müllersche Röhren mit Wasserkühlung benutzt.

Eine deutliche Schwärzung des Films zeigte sich nach einer 60stündigen Expositionszeit, und immer erhielt ich zwei Maxima und zwei Minima; die Entfernung zwischen den Maximis und zwischen den Minimis war immer gleich dem halben Umfang des Durchschnitts der Röhre *R*; das obenerwähnte kleine Loch befand sich in einem der Maxima, so daß bei der beschriebenen Anordnung die Sekundärstrahlen eine maximale Wirkung in der horizontalen, eine minimale in der vertikalen Ebene zeigten. Dies ist also ganz dasselbe, was man bei einem entsprechenden Versuch mit Licht erhalten würde; wäre z. B. *K* ein Spiegel aus schwarzem Glase, auf welchen in der Richtung *P* Lichtstrahlen fielen, und *C* ein Glaskonus, so würde man auf dem Film an denselben Stellen wie oben Maxima und Minima erhalten haben.

Die Sekundärstrahlen sind also polarisiert und, da die Schwärzung der Minima äußerst gering ist, sind sie vorläufig als vollkommen polarisiert anzusehen.

Nach dieser Auffassung kann man die Kohleplatte als Polarisator, den Kohlekegel als Analysator betrachten.

Nicht nur Kohle kann als Polarisator wirken; ebenso wirkten die untersuchten Stoffe: Kupfer, Blei, Aluminium; doch war deren Wirkung quantitativ nicht dieselbe. Während mit einer Kupferplatte ungefähr dieselbe Schwärzung wie mit der Kohleplatte erhalten wurde, senden Blei und Aluminium

in viel geringerer Intensität Sekundärstrahlen aus, so daß auch die vom Kohlekegel ausgesandten Tertiärstrahlen sehr schwach sind. Trotzdem waren zwei Maxima und zwei Minima erkennbar.

Statt des Kohlekegels habe ich auch einen Kupferkegel als Analysator bei Anwendung einer Kupferplatte als Polarisator benutzt; ich erhielt, wenn auch sehr schwach, doch dasselbe Resultat.

Im ganzen sind die folgenden Aufnahmen gemacht worden:

Polarisator	*Analysator*	
Kohleplatte	Kohlekegel	4
Kupferplatte	„	3
„	Kupferkegel	1
Aluminiumplatte	Kohlekegel	2
Bleiplatte	„	1

Ich möchte noch bemerken, daß, wie leicht erklärlich, ein genaues Zusammenfallen der Achsen des Kegels und der Röhren r und R sehr wichtig ist; bei der nicht so genau gearbeiteten, in den Proceedings Royal Academy Amsterdam abgebildeten, Vorrichtung erhielt ich bei zwei Aufnahmen einen beträchtlichen Unterschied in der Schwärzung der beiden Maxima.

Man könnte nun gegen diese Versuche noch zwei Einwände erheben:

1. Der Teil der Kohleplatte, der die Sekundärstrahlen durch die Diaphragmen sendet, steht schief zur Achse des Kegels und auch zur Richtung der auffallenden primären Strahlen; es ließ sich denken, daß dadurch die Intensität des Sekundärstrahlenbündels nicht in allen Punkten eines senkrecht zur Kegelachse stehenden Querschnittes dieselbe wäre, und daß so eine ungleiche Schwärzung des Films verursacht wäre. Um dieses zu prüfen, wurde statt des Kohlekegels eine photographische Platte senkrecht zur Achse der Röhre R angebracht; eine Expositionsdauer von 26 Stunden gab ein sehr deutliches Bild, worin keine ungleichmäßige Intensität merkbar war; nur am Rande war ein Halbschatten zu sehen.

2. Es wäre möglich, daß während der langen Versuchsdauer die primären Röntgenstrahlen durch die Bleiplatten und

die Messingröhre auf das Film eingewirkt hätten. Gegen diesen Einwand spricht erstens das obenerwähnte Versuchsergebnis, daß unter übrigens gleichen Umständen die Schwärzung des Films bei einer Aluminium- oder Bleiplatte als Polarisator sehr schwach ist, und zweitens die Tatsache, daß keine Schwärzung entstand *unter* den federnden Metallringen.

Da demnach der Kohlekegel in der mit Film bekleideten Röhre als Analysator dienen kann, konnte auch untersucht werden, ob die primären Röntgenstrahlen polarisiert sind. Sehr viele Versuche habe ich hierüber angestellt mit weichen, mit harten und mit erwärmten Röhren, sowie auch mit einer Müllerröhre Nr. 20, die nur weiche Strahlen gibt; immer erhielt ich eine gleichmäßige Schwärzung des Films bei gut zentrierter Aufstellung, d. h. falls die Achse des auffallenden Bündels mit der des Kegels zusammenfällt. Wie in der folgenden Mitteilung[1]) gezeigt wird, gibt es ein einfaches Mittel zum Konstatieren, ob diese Achsen zusammenfallen. Wenn aber absichtlich oder wegen eines Aufstellungsfehlers jene Achsen nicht zusammenfielen, so erhielt ich zwar eine ungleiche Schwärzung, aber nie zwei Maxima und zwei Minima nach den verschiedenen Quadranten. Nach meinen Versuchen sind die *primären Röntgenstrahlen nicht polarisiert.*

Es ist schwer, mit Bestimmtheit zu sagen, welcher Ursache Barklas abweichendes Resultat zuzuschreiben sei; am wahrscheinlichsten kommt es mir vor, daß auch hier gilt, was R. v. Lieben[2]) über seine eigenen Versuche über die Polarisation der Röntgenstrahlen schreibt: „Zahlreiche Kontrollexperimente mit der neuen und mit der früher beschriebenen Anordnung gaben das Resultat, daß die zuerst benützte Versuchsanordnung eine Polarisation der weichen Strahlung nur vorgetäuscht hatte. Es gehen nämlich nicht nur vom Brennpunkte der Antikathode, sondern auch von der Glaswand der Röhre wirksame Röntgenstrahlen aus. Diese Strahlung ist nicht gleichmäßig, sondern es gibt gewisse Flächen, die stärker strahlen und hierdurch eine Asymmetrie bedingen. Nun wurde bei der früheren Anordnung die Bleiblende so groß gewählt,

1) H. Haga, Ann. d. Phys. **23.** p. 445. 1907.
2) R. v. Lieben, Physik. Zeitschr. **5.** p. 72. 1904.

daß auch die ungleich emittierende Wand der Röntgenröhre ihre Strahlung auf den Metallspiegel warf. Diese inhomogene Zusatzstrahlung hatte zur Folge, daß bei einer Drehung der Röhre (um die Strahlung als Achse) sich sowohl die Form der bestrahlten Spiegelfläche als auch die Strahlungsintensität auf derselben änderte."

Die Öffnungen in den Bleiblenden waren bei Barkla 5×5 cm, bei den ersten v. Liebenschen Versuchen wurde eine runde Öffnung von 10 mm Durchmesser benutzt, bei den letzten eine von 1 mm.

Da bei meiner Versuchsanordnung eine Polarisation sich durch das Auftreten von zwei Maximis und zwei Minimis nach den vier Quadranten kundgibt, konnte diese eventuell bestehende Fehlerquelle mich nicht täuschen.

Obgleich die primären Röntgenstrahlen nicht polarisiert sind, so ist, wie ich meine, dennoch der Hauptzweck meiner Untersuchung, nl. zu entscheiden, ob die Röntgenstrahlen transversale oder longitudinale Gleichgewichtsstörungen sind, völlig erreicht. Haben doch die bei meinen Versuchen in Betracht kommenden Sekundärstrahlen — in gewöhnlicher Luft, und einige Zentimeter entfernt von dem die Strahlen aussendenden Körper — ganz denselben Charakter wie die primären Strahlen; **nicht nur gingen sie durch das schwarze Papier bei *a*, sondern sogar durch den 6 cm langen Kohlestab und schwärzten eine im Deckel *D* angebrachte photographische Platte. Sind also die primären und sekundären Röntgenstrahlen von derselben Natur, so sind, da die Sekundärstrahlen polarisiert sind, die primären Röntgenstrahlen nur als ein transversaler Vorgang aufzufassen.**

Groningen, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)

4. *Über einen merkwürdigen Fall von selektiver Absorption bei Röntgenstrahlen;* von *H. Haga.*

Bei meinen Versuchen über die Polarisation[1]) von Röntgenstrahlen ließ ich u. a. ein Strahlenbündel axial durch eine Messingröhre fallen, in deren Achse ein 4 cm langer, 1 cm dicker Kohlestab mittels eines Hartgummiringes angebracht war. Das Bündel war durch Diaphragmen so abgeblendet,

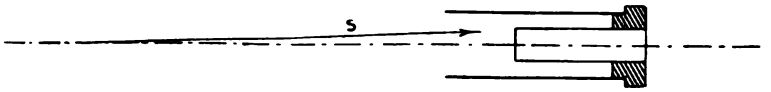


Fig. 1.

daß seine Grenze zwischen dem Kohlestab und der Innenwand der Röhre lag. Um der Röntgenröhre die dafür erforderte Stelle zu geben, wurde gegen den Hartgummiring ein fluoreszierender Schirm gehalten und die Röntgenröhre so lange verschoben, bis der Schatten der Kohle konzentrisch in dem auf dem Schirme sichtbaren Durchschnitt des Bündels sich zeigte. Hierbei erschien der Schatten des Stabes umgeben von einem schmalen dunklen Ringe. Wurde eine photographische Aufnahme gemacht, so zeigte sich natürlich ein heller Ring um das Bild der Kohle. Fig. 2 ist ein positives Bild einer dieser Aufnahmen. Die Erklärung dieses hellen Ringes ergibt sich aus den folgenden Tatsachen: Bei *weichen* Strahlen ist das Bild des Stabes dunkler als das des Ringes. Bei *harten* Strahlen ist aber der Ring dunkler als die Mitte. Das heißt also, der Kohlestab läßt von den *weichen* Strahlen mehr durchgehen als der Hartgummiring; der Hartgummiring dagegen läßt von den *harten* Strahlen mehr durch als der Kohlestab; oder anders gesagt: Der Kohlestab absorbiert hauptsächlich die

Fig. 2.

1) H. Haga, Ann. d. Phys. **23.** p. 439. 1907.

härteren, der Hartgummiring absorbiert hauptsächlich die *weicheren* Strahlen. Da nun die Röntgenröhre gewöhnlich ein Gemisch von harten und weichen Strahlen aussendet, werden von denjenigen Strahlen die, wie *S* in Fig. 1, einen kleinen Winkel mit der Achse bilden, in der Kohle die *härteren* absorbiert werden, so daß sie beim Austreten aus der Kohle hauptsächlich aus *weichen* Strahlen bestehen, welche gerade vom Hartgummi absorbiert werden, so daß dicht um das Bild des Stabes herum keine Schwärzung der photographischen Platte stattfindet.

Es ist also ganz ähnlich, als wenn man einen Glasstab aus rotem, einen Ring aus grünem Glase und weißes Licht benutzt hätte.

Die obige Erklärung macht es klar, daß nicht immer der weiße Ring ohne irgend eine Schwärzung ist, da dies abhängt vom Gemisch der harten und weichen Strahlen, die die Röhre aussendet; manche Aufnahme habe ich aber gemacht, wobei der Ring kaum einige Einwirkung zeigt.

Bei meinen Versuchen über die Polarisation wurde immer zu gleicher Zeit eine Aufnahme senkrecht zur Achse gemacht, um das Zusammenfallen der Achsen des auffallenden Bündels und des Kohlestabes bez. Kohlekegels zu konstatieren: nur wenn der weiße Ring überall gleich breit war, fand das Zusammenfallen statt.

Groningen, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)

5. *Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit*[1]; von *Rudolf Ladenburg*.

Fällt eine Kugel unter dem Einfluß der Schwere in einer reibenden Flüssigkeit, so ist nach einer Berechnung von G. G. Stokes[2]) die Kugelgeschwindigkeit nur abhängig von dem Auftrieb und dem Radius der Kugel und der inneren Reibung der Flüssigkeit, vorausgesetzt, daß diese Geschwindigkeit genügend klein und die äußere Reibung zwischen Kugel und Flüssigkeit unendlich groß ist. Praktisch kann eine solche Beziehung jedoch nur als erfüllt angesehen werden, wenn die Bewegung der Kugel weder durch benachbarte andere Kugeln gestört wird noch durch Wände, die die Flüssigkeit begrenzen. So zeigten Experimente[3]) in zylindrischen, beiderseitig geschlossenen Gefäßen noch einen merklichen hemmenden Einfluß der Wände, als die Dimensionen der Gefäße die der Kugel um fast das 100 fache übertrafen, und es schien mir deshalb wichtig, den Einfluß solcher Begrenzungen auch theoretisch zu berechnen.

Ich möchte auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Korn meinen aufrichtigen Dank sagen, der mir den Weg zur Ausrechnung zeigte und mich bei der Ausführung in liebenswürdigster Weise unterstützte.

Man kann den Einfluß beliebiger Flächen auf die Bewegung eines Körpers in einer reibenden Flüssigkeit nach H. A. Lorentz[4]) durch Superposition der Zustände bestimmen,

1) Die Resultate vorliegender Arbeit sind zum Teil schon in der Münchner Dissertation des Verf. (Leipzig 1906) enthalten und bilden eine theoretische Ergänzung zu der Mitteilung des Verf. „Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck“ Ann. d. Phys. **23**. p. 287. 1907.

2) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. **8**. p. 287; **9**. p. 8. 1850.

3) R. Ladenburg, l. c.

4) H. A. Lorentz, Zittingsverl. Akad. van Wet. **5**. p. 168. 1896; neu bearb.: „Abhandl. über theor. Phys.“ 1^1. p. 23 ff. 1906 (Teubners Verlag). Dieselbe Methode findet sich bereits bei G. G. Stokes, Cambr. Phil. Soc. **8**. 1848.

die durch Reflexion („Zurückwerfung") der ursprünglichen Bewegung an den Flächen und an dem Körper selbst entstehen. Sind die Dimensionen des Körpers unendlich klein und geht die Bewegung vom Körper selbst aus, so genügt[1]) die Kenntnis der ersten Reflexion von jenen Flächen; ist der Körper z. B. eine Kugel, so kann man[1]) aus der Geschwindigkeit, die infolge der ursprünglichen Bewegung und jener ersten Reflexion bei Abwesenheit der unendlich kleinen Kugel an ihrem Mittelpunkte herrschen würde, den Widerstand berechnen, den die Kugel bei ihrer Bewegung erfährt.

Bei der Bewegung einer Kugel in einer geschlossenen Röhre wäre also die Reflexion der für den unendlichen Raum geltenden Bewegung von einem begrenzten Zylinder zu berechnen; da ich hierbei auf unüberwindliche Schwierigkeiten stieß, habe ich mich auf die Berechnung und Superposition der Geschwindigkeiten beschränken müssen, die durch Reflexion von einem unendlich langen Zylinder und von zwei unendlich ausgedehnten Ebenen entstehen, deren Abstand gleich der Röhrenlänge ist. Diese vereinfachenden Annahmen scheinen mir aber bereits eine beträchtliche Annäherung an die wahren Versuchsbedingungen zu liefern, da die Geschwindigkeiten, die die unendlich kleine Kugel hervorruft, auch in endlicher Entfernung unendlich klein[1]) sind.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen der stationären Bewegung einer reibenden Flüssigkeit lauten[2]), wenn man die Glieder vernachlässigt, die Quadrate oder Produkte von Geschwindigkeiten enthalten, und wenn keine äußeren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken:

$$(1) \qquad k\,\Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad k\,\Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad k\,\Delta w = \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

wobei u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteile in Richtung der Koordinatenachsen X, Y, Z, k den Reibungskoeffizienten und p den Druck bedeuten und die Flüssigkeit

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 30.

2) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorl. über Mechanik, 4. Aufl. p. 378 ff. 1897, oder H. A. Lorentz, l. c. p. 30.

als unbegrenzt vorausgesetzt ist. Bewegt sich in dieser Flüssigkeit eine Kugel vom Radius R in Richtung der negativen Z-Achse mit der gleichförmigen Geschwindigkeit a, so genügen den Differentialgleichungen (1) und (2), wenn der Mittelpunkt der Kugel Koordinatenanfangspunkt und die äußere Reibung zwischen Kugel und Flüssigkeit unendlich groß ist, die Funktionen [1]):

$$(3)\qquad \begin{cases} u_1 = \frac{3}{4} a R^3 \frac{x z}{E^5} - \frac{3}{4} a R \frac{x z}{E^3}, \\ v_1 = \frac{3}{4} a R^3 \frac{y z}{E^5} - \frac{3}{4} a R \frac{y z}{E^3}, \\ w_1 = \frac{a R^3}{4}\left(\frac{3 z^2}{E^5} - \frac{1}{E^3}\right) - \frac{3}{4} a R \left(\frac{z^2}{E^3} + \frac{1}{E}\right), \end{cases}$$

$$p_1 = -\frac{3}{2} k R a \frac{z}{E^3} + \text{konst.},$$

wobei

$$E^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gesetzt ist.

Um nun zunächst die Reflexion dieser Bewegung von einem unendlich langen Zylinder zu berechnen, dessen Achse mit der Z-Achse zusammenfalle und dessen Querschnittsradius ϱ sei, führe ich in der XY-Ebene die Polarkoordinaten r und ϑ ein und setze

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dt} = s.$$

Berücksichtige ich, daß in diesem Falle $d\vartheta/dt$ offenbar Null ist und setze noch zur Abkürzung für eine beliebige Funktion φ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = D\varphi,$$

so wird

$$\Delta\varphi = D\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2},$$

und durch Vernachlässigung der Glieder mit R^3 in den Gleichungen (3) gehen die Gleichungen (1), (2) und (3) über in

$$(1\,a)\qquad \begin{cases} Ds - \frac{s}{r^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ Dw = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(2\,a)\qquad \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{s}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

1) G. Kirchhoff, l. c., oder H. A. Lorentz, l. c.

$$(3a)\qquad \begin{cases} s_1 = -\frac{3}{4} a R \frac{r z}{E^5}, \\ w_1 = -\frac{3}{4} a R \left(\frac{z^2}{E^5} + \frac{1}{E}\right), \\ p_1 = -\frac{3}{2} k R a \frac{z}{E^5} + \text{konst.}, \\ E^2 = r^2 + z^2. \end{cases}$$

Es handelt sich nun darum, neue Lösungen — im folgenden durch den Index 2 charakterisiert — der Differentialgleichungen (1a) und (2a) zu finden, die den Bedingungen genügen:

$$(4)\qquad \begin{cases} (s_2)_{r=\varrho} = -(s_1)_{r=\varrho}, \\ (w_2)_{r=\varrho} = -(w_1)_{r=\varrho} \qquad \text{und} \\ (s_2)_{z=\pm\infty} = (w_2)_{z=\pm\infty} = 0, \end{cases}$$

da dann offenbar der Zustand 2 die gesuchte, durch Reflexion an der Zylinderwand entstandene, Bewegung darstellt.

Zu diesem Zwecke führe ich die Besselschen oder Zylinderfunktionen erster und zweiter Art 0ter Ordnung, $J(\Theta)$ und $K(\Theta)$, ein, die partielle Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$(5a)\qquad \frac{d^2 z}{d\Theta^2} + \frac{1}{\Theta}\frac{dz}{d\Theta} + z = 0$$

sind und nach Heine[1]) darstellbar in der Form:

$$(5b)\qquad J(\Theta) = 1 - \frac{\Theta^2}{2^2} + \frac{\Theta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\Theta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

und

$$(5c)\qquad \begin{cases} K(\Theta) = -J(\Theta)\left(\ln_e \frac{\Theta}{2} + C\right) \\ \qquad\qquad - 2\left[J_2(\Theta) - \frac{1}{2} J_4(\Theta) + \frac{1}{3} J_6(\Theta) - \dots\right]. \end{cases}$$

Hierbei sind J_2, J_4 ... die geraden Zylinderfunktionen erster Art höherer Ordnung und C, die sogenannte Gausssche[2]) Konstante, hat den Wert[3])

$$C = +\,0{,}5772157\,.$$

1) Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 2. Aufl. 1. p. 184 ff. und 2. p. 175. 1878.

2) K. F. Gauss, Ges. Werke III. p. 154, C hat den Wert von $-\psi_0$.

3) Heine (l. c.) schreibt zwar $-0{,}5772\dots$, doch zeigt ein Vergleich mit der Originalliteratur (Gauss, l. c. und H. F. Weber, Borch.

Nun ergibt sich aus den Gleichungen (1a), daß

$$Dp = 0 \quad .$$

ist; ist also p_2 der den Geschwindigkeiten s_2 und w_2 entsprechende Druck und λ eine von Null verschiedene Zahl, so kann man für p_2 den Ansatz machen:

$$p_2 = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty f(\lambda) \sin \lambda z \, J(i\lambda r) \, d\lambda ,$$

wobei die Funktion $f(\lambda)$ noch näher zu bestimmen ist. Dann läßt sich zeigen[1]), daß die Gleichungen (1a) befriedigt werden durch die Funktionen:

$$(6) \quad \begin{cases} s_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{r}{2} f(\lambda) J(i\lambda r) + G(\lambda) J'(i\lambda r) \right] \sin \lambda z \, d\lambda \\ \text{und} \\ w_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{ir}{2} f(\lambda) J'(i\lambda r) + H(\lambda) J(i\lambda r) \right] \cos \lambda z \, d\lambda ; \end{cases}$$

hierin ist

$$J'(i\lambda r) \text{ für } \frac{\partial J(i\lambda r)}{\partial (i\lambda r)}$$

gesetzt und $G(\lambda)$ und $H(\lambda)$ sind zunächst willkürliche Funktionen. Da aber s_2 und w_2 den zwei Bedingungsgleichungen (4) und der Kontinuitätsgleichung (2a) zu genügen haben, werden die drei Funktionen $f(\lambda)$, $G(\lambda)$ und $H(\lambda)$ eindeutig bestimmbar. Wie sich zeigen wird, genügt im vorliegenden Falle die Kenntnis von $H(\lambda)$, und aus jenen drei Gleichungen ergibt sich[1]), wenn man

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Journ. f. Math. 75. p. 85. 1878), daß C positiv ist. Bei imaginären Werten des Argumentes ist nach Heine (l. c.) in der Darstellung für $K(\Theta)$ der Ausdruck $\frac{\pi}{2} i J(\Theta)$ zu addieren, so daß i im Argumente des Logarithmus fortfällt.

1) Zur genaueren Durchführung der Rechnung vgl. die Dissertation des Verf. p. 79—90.

durch den Ausdruck[1])

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty K(i\lambda r)\cos\lambda z\, d\lambda$$

ersetzt,

$$(7)\quad H(\lambda)=\frac{3}{2}Ra\left[\frac{K(i\lambda\varrho)}{J(i\lambda\varrho)}-\frac{1}{2}\frac{1+2\frac{J'(i\lambda\varrho)}{i\lambda\varrho}\frac{1}{J(i\lambda\varrho)}}{J^2(i\lambda\varrho)+J'^2(i\lambda\varrho)+2J(i\lambda\varrho)\frac{J'(i\lambda\varrho)}{i\lambda\varrho}}\right].$$

Wie in der Einleitung auseinandergesetzt, handelt es sich nun lediglich um die Berechnung der Werte, die s_2 und w_2 bei Abwesenheit der Kugel am Kugelmittelpunkte, d. h. am Koordinatenanfangspunkte besitzen: für $r=z=0$ folgt aus den Gleichungen (6)

$$(s_2)=0,$$
$$(w_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H(\lambda)\,d\lambda=\frac{R}{\varrho}a\,\frac{3}{\pi}\int_0^\infty\varphi(i\lambda\varrho)\,d(\varrho\lambda),$$

wenn ich die Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (7) abkürzend durch $\varphi(i\lambda\varrho)$ bezeichne.

Zur zahlenmäßigen Berechnung des Integrals

$$\int_0^\infty\varphi(i\lambda\varrho)\,d(\varrho\lambda)$$

habe ich in meiner Dissertation[2]) mit Benutzung der unendlichen Reihen (Gleichung (5b) und (5c)) die Werte von

$$J(i\lambda\varrho),\quad J'(i\lambda\sigma),\quad \frac{J'(i\lambda\varrho)}{i\lambda\varrho}\quad\text{und}\quad K(i\lambda\varrho)$$

für gewisse, geeignet scheinende Werte des Argumentes berechnet, aus ihnen jedesmal $\varphi(i\lambda\varrho)$ zusammengesetzt und so das bestimmte Integral nach der Simpsonschen Regel ausgewertet. Bei der Zusammensetzung von $\varphi(i\lambda\varrho)$ ist jedoch ein Rechenfehler unterlaufen, so daß sich statt der in der Dissertation[3]) gegebenen Zahlen der Wert von $\varphi(i\lambda\varrho)$

1) Vgl. Heine, l. c.
2) Dissertation des Verf. p. 124—126.
3) p. 126.

für $\lambda\varrho = \frac{1}{8}$ zu 2,79
„ „ $= \frac{1}{4}$ „ 2,00
„ „ $= \frac{1}{2}$ „ 1,35
„ „ $= 1$ „ 0,67
„ „ $= 2$ „ 0,21
„ „ $= 4$ „ 0,014 ergibt,

und damit wird

$$\int_0^\infty \varphi(i\lambda\varrho)\, d(\varrho\lambda) = 2{,}45$$

und

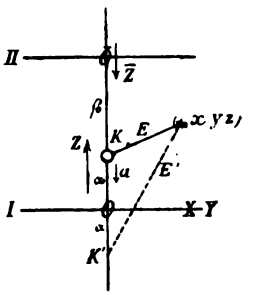
$$(w_2) = 2{,}4\,\frac{R}{\varrho}\,a;$$

d. h. unter dem Einfluß eines unendlich langen Zylinders vom Querschnittsradius ϱ würden sich die Flüssigkeitsteile am Mittelpunkte der Kugel mit der Geschwindigkeit $2{,}4\,(R/\varrho)\,a$ in der der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung — die Kugelgeschwindigkeit war in Richtung der negativen Z-Achse vorausgesetzt (p. 449) — bewegen und die relative Geschwindigkeit zwischen Kugel und Flüssigkeit würde den Wert

$$a\left(1 + 2{,}4\,\frac{R}{\varrho}\right)$$

annehmen.

Um ferner den Einfluß zu berechnen, den zwei einander parallele, unendlich ausgedehnte Ebenen auf die Bewegung einer Kugel zwischen ihnen ausüben, kann man die Methode verwenden, die H. A. Lorentz[1]) zur Berechnung der „Zurückwerfung" von *einer* senkrecht zur Kugelbewegung liegenden Ebene angegeben hat. Legt man die XY-Ebene in jene reflektierende Ebene, bezeichnet mit α den momentanen Abstand der Kugel von jener Ebene, mit E' die Entfernung eines Punktes (x, y, z) von demjenigen Punkte K' (vgl. Figur), der zum Kugelmittelpunkte K bezüglich der Ebene symmetrisch liegt und läßt wie bisher die Richtung der Kugelgeschwindig-



1) H. A. Lorentz, l. c.

keit mit der negativen Z-Richtung zusammenfallen, so erhält man für die allein in Betracht kommende z-Komponente der reflektierten Geschwindigkeit den Wert[1])

$$w_3 = \frac{3}{4} R a \left\{ \frac{1}{E'} + \frac{x^2 + a^2}{E'^3} + \frac{6 a z (z+a)^2}{E'^5} \right\},$$

wobei

$$E'^2 = x^2 + y^2 + (z+a)^2$$

ist, und diese Bewegung würde am Mittelpunkte der Kugel eine der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile von der Größe

$$(w_3)_{\substack{x=y=0 \\ z=a}} = \frac{9}{8} \frac{R}{a} a$$

hervorrufen.

Befindet sich nun auf der anderen Seite der Kugel im Abstande β eine zweite Ebene (II), so würde diese offenbar am Kugelmittelpunkte zu einer Geschwindigkeit

$$(w_3)' = \frac{9}{8} \frac{R}{\beta} a,$$

als Reflexion der ursprünglichen Bewegung, Veranlassung geben.[2]) Daneben ist aber offenbar auch die Zurückwerfung des Zustandes 3 von der Ebene II zu berücksichtigen. Um bei deren Berechnung die Lorentzsche Methode unmittelbar zu verwenden, habe ich die XY-Ebene in die Ebene II verlegt und die Richtung der Z-Achse umgedreht ($\bar{Z}$-Achse). Dann erhalte ich am Kugelmittelpunkte die reflektierte Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile

$$(w_4) = \left(\frac{9}{8} \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{9}{8} \frac{\alpha \beta}{(\alpha+\beta)^3} \right) R a,$$

welche diesmal mit der Richtung der Kugelgeschwindigkeit zusammenfällt, also den Widerstand, den die Kugel erfährt, verkleinert. Derselbe Wert würde sich aus Symmetriegründen für die Zurückwerfung des Zustandes 3′ von der Ebene I ergeben. Reflektiert man weiter die Bewegung 4 an der Ebene I,

---

1) Vgl. H. A. Lorentz, l. c. p. 40.

2) Daß sich die Kugel von dieser Ebene fortbewegt, ändert, wie die Rechnung von Lorentz zeigt, auch nichts an dem Vorzeichen der reflektierten Geschwindigkeit.

so erhält man an der Stelle des Kugelmittelpunktes die Geschwindigkeit:

$$(w_5) = \left(\frac{17}{18}\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{19}{27}\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\right) R a$$

und denselben Wert offenbar für die entsprechende Reflexion an der Ebene II. Wie man sieht, werden die reflektierten Geschwindigkeiten allmählich kleiner, aber nicht von einer höheren Ordnung unendlich klein; doch genügt, wie sich zeigen wird, die durch die berechneten Reflexionen erreichte Genauigkeit.

Ich komme nun zur Bestimmung des Widerstandes. Bewegt sich die Kugel von einem Punkte

$$z = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha+\beta),$$

wobei $\gamma > 1$, bis zu einem Punkte

$$z = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

in Richtung der negativen Z-Achse, so ist der mittlere Wert der durch die einzelnen Reflexionen hervorgerufenen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteile[1]), wenn man $\alpha+\beta = h$ setzt, infolge der ersten beiden Reflexionen:

$$\frac{\gamma}{\gamma-2}\frac{1}{h}\int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}h}[(w_3)+(w_3')]\,dz = \frac{\gamma}{\gamma-2}\frac{1}{h}\int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}h}\frac{9}{8}Ra\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{h-z}\right)dz$$

$$= a\frac{R}{h}\frac{9}{4}\frac{\gamma}{\gamma-2}\ln_e(\gamma-1);$$

infolge der ersten und zweiten Reflexionen

$$a\frac{R}{h}\left[\frac{9}{4}\frac{\gamma}{\gamma-2}\ln_e(\gamma-1) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4}\frac{\gamma^2-\gamma+1}{3\gamma^2}\right],$$

und infolge der ersten, zweiten und dritten Reflexionen

$$a\frac{R}{h}\left[\frac{9}{4}\frac{\gamma}{\gamma-2}\ln_e(\gamma-1) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4}\frac{\gamma^2-\gamma+1}{3\gamma^2} + \frac{70}{27} - \frac{38}{27}\frac{\gamma^3-\gamma+1}{3\gamma^2}\right].$$

Um diese Beträge wird also die Geschwindigkeit der Kugel relativ zur Flüssigkeit vergrößert und dementsprechend auch der Widerstand, den die Kugel erfährt.

---

1) Bei dieser Berechnung ist die durch Variation des Widerstandes bewirkte geringe Änderung der Kugelgeschwindigkeit vernachlässigt.

Um nun die Ergebnisse meiner Experimente[1]) mit dieser Berechnung zu vergleichen, ist hierin für γ 3,5 zu setzen, da die verwendeten Gefäße 24 cm lang waren und die Kugelgeschwindigkeit während der mittleren 10 cm beobachtet wurde. Aus obigen Formeln folgt dann für die Zusatzgeschwindigkeit

$$4{,}83\frac{R}{h}a \quad \text{bez.} \quad 2{,}05\frac{R}{h}a \quad \text{bez.} \quad 4{,}27\frac{R}{h}a,$$

so daß sich der zu benutzende Wert durch geometrische Interpolation zu $3{,}3\,(R/h)\,a$ ergibt. Berücksichtigt man noch die nächsten Reflexionen, so erhält man einen nicht merklich verschiedenen Wert, so daß in der Tat die hier gegebene Berechnung der drei Reflexionen ausreicht. Werden nur je 2,4 cm an den Enden der Gefäße von der Beobachtung ausgeschlossen[2]), so ist $\gamma = 10$ zu setzen, und man erhält als Zusatzgeschwindigkeit als Mittel den Wert $4{,}5\,(R/h)\,a$.

Fasse ich also nun den Einfluß des unendlich langen Zylinders und der zwei Ebenen zusammen, d. h. superponiere ich direkt die betreffenden Zusatzgeschwindigkeiten, so erhält der Widerstand[3]), den die Kugel erleidet, statt

$$6\pi k R a$$

den Wert

$$6\pi k R a\left(1 + 2{,}4\,\frac{R}{\varrho}\right)\left(1 + 3{,}3\,\frac{R}{h}\right),$$

und dieser Ausdruck gleich

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 (s - \sigma)$$

— dem Auftrieb der unter dem Einfluß der Schwere fallenden Kugel — gesetzt, liefert an Stelle des „Stokesschen Gesetzes“

$$\bar{k} = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a}$$

die Gleichung

$$(8) \qquad k = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a\left(1 + 2{,}4\,\frac{R}{\varrho}\right)\left(1 + 3{,}3\,\frac{R}{h}\right)},$$

1) Dissertation des Verf. p. 55, Tab. IVb, die zur Berechnung der Reibungskoeffizienten p. 59 verwendet wurde.

2) Diesem Falle entsprechen die Resultate der Tab. IVa; da R/h im Mittel 0,005 ist, ergibt die Theorie, daß in diesem Falle die Kugelgeschwindigkeit im Mittel etwa 1 Proz. kleiner sein muß als in jenem, in Übereinstimmung mit den Experimenten.

3) H. A. Lorentz. l. c. p. 29.

die für einen oben und unten durch ebene Flächen begrenzten Zylinder vom Radius ϱ und der Höhe h gelten soll, falls die Kugelgeschwindigkeit a im mittleren Drittel der Röhre gemessen wird.

In der Tat werden nun meine experimentell erhaltenen Resultate durch diese Gleichung (8) befriedigend dargestellt: Folgende Tabelle enthält die aus jenen Fallversuchen abgeleiteten Werte des Reibungskoeffizienten (C.G.S.), berechnet nach der unkorrigierten Stokesschen Gleichung ($\bar{k}$) und nach der Gleichung (8) (k); die Dimensionen der verwendeten Kugeln und Röhren und die Werte der beobachteten Geschwindigkeiten finden sich in den zitierten Mitteilungen.

Tabelle.

$\frac{R}{\varrho}$	$\frac{R}{h}$	$\bar{k}$	k
$\frac{1}{11{,}1}$	$\frac{1}{121}$	1681	1848
$\frac{1}{14{,}7}$	$\frac{1}{160}$	1600	1846
$\frac{1}{20{,}0}$	$\frac{1}{121}$	1515	1818
$\frac{1}{22{,}2}$	$\frac{1}{241}$	1515	1849
$\frac{1}{26{,}6}$	$\frac{1}{160}$	1491	1840
$\frac{1}{29{,}4}$	$\frac{1}{320}$	1490	1862
$\frac{1}{35{,}3}$	$\frac{1}{121}$	1456	1828
$\frac{1}{40{,}1}$	$\frac{1}{241}$	1447	1844
$\frac{1}{46{,}9}$	$\frac{1}{160}$	1438	1838
$\frac{1}{53{.}0}$	$\frac{1}{320}$	1424	1849
$\frac{1}{70{,}7}$	$\frac{1}{241}$	1415	1848
$\frac{1}{93{,}5}$	$\frac{1}{320}$	1396	1847

Während die aus den Fallversuchen mit verschieden großen Kugeln und in verschieden weiten Gefäßen nach der Stokesschen Gleichung berechnete „Reibungskonstante“ zwischen 1681 und 1396 variiert, erhält man nach der neuen Gleichung (8) den nahe konstanten Wert

$$1343 \pm 22,$$

und nach der Poiseuilleschen Methode hatte sich für dieselbe Flüssigkeit

$$1325 \pm 15$$

ergeben.

Cambridge, April 1907.

(Eingegangen 22. April 1907.)

6. *Über die lichtelektrische Ermüdung; von W. Hallwachs.*[1])

Die Vorgänge, welche sich bei den lichtelektrischen Erscheinungen in Gasen von Atmosphärendruck in den der Ober-

1) Für die gute Unterstützung, welche ich bei dieser Arbeit von den Herren Dr. R. Lindemann (jetzt in der Phys.-Techn. Reichsanst.) und Dr. H. Dember erhalten habe, möchte ich ihnen auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

Ein Auszug der vorliegenden Arbeit nach dem auf der Stuttgarter Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrag ist Physik. Zeitschr. 7. p. 766. 1906 und Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 8. p. 449. 1906 veröffentlicht, ausführlich findet sich dieselbe in den Berichten der kgl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., math.-naturw. Kl. 58. p. 341, Oktober 1906, welche Darstellung hier mit einigen Ergänzungen versehen ist.

Seit der ersten Veröffentlichung haben die Herren Ramsay und Spencer eine lichtelektrische Untersuchung [Phil. Mag. (6) 12. p. 397. 1906] mitgeteilt. In derselben geben sie p. 402 an: „It is not proposed to discuss here the literature on this subject, but it may be mentioned that previous to Le Bon's publications some of his results had been anticipated, among others by Elster and Geitel, Hoor, Stoletow, Wiedemann and Ebert, Hallwachs, Righi and Branley." Diese Stellungnahme gegenüber der Literatur, unter welcher Hr. Lenard nicht einmal erwähnt wird, erscheint mir nicht annehmbar. Das Studium derselben würde eine andere Auffassung von dem, was auf diesem Gebiet geleistet ist, liefern. Bevor ein solches erfolgt ist, läßt sich nicht entscheiden, welche Resultate der Arbeit die Verfasser selbst etwa in die Ergebnisse früherer Beobachter z. B. als Bestätigungen einordnen würden. In der Meinung, hier nicht vorgreifen zu sollen, möchte ich mich auf obigen Hinweis beschränken.

Ferner teilt Hr. Aigner (Wiener Ber. IIa. 115. p. 1485. 1906) eine Reihe von Versuchen mit, welche sich mit Fragen beschäftigen, die auch in der hier vorliegenden Arbeit behandelt sind. Letztere hat er offenbar nicht gekannt, sonst würde er auf die Einwände, welche seinen Versuchsanordnungen begegnen müssen, aufmerksam geworden sein und seine Schlüsse wohl anders formuliert haben. Wenn er übrigens den starken und bereits vor mehreren Jahren von mir nachgewiesenen Gefäßeinfluß nicht konstatieren konnte, so liegt dies daran, daß er nur Gefäße von solcher Form und Größe verglichen hat, daß auch sein größtes wohl noch vollen Gefäßeinfluß ausübte, somit Unterschiede gegen die kleineren nicht merkbar werden konnten. Auf die einzelnen Punkte der Arbeit soll bei einer späteren Gelegenheit näher eingegangen werden.

fläche der bestrahlten Körper am unmittelbarsten anliegenden Schichten abspielen, harren noch immer ihrer Aufklärung. Von der genaueren Einsicht in dieselben hängt sowohl die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung als auch diejenige des Grundversuches der lichtelektrischen Entladung ab. Die Aufgabe, sie zu finden, ist mit der Frage verknüpft, ob hinter der Ermüdung ein physikalisch interessantes Phänomen steckt oder nicht.

Für die lichtelektrische Ermüdung habe ich in einer früheren Arbeit[1]) eine Stufe der Erklärung gegeben. Nachdem im einzelnen der Nachweis geliefert worden war, daß die meisten der früher angegebenen Ursachen derselben (Oxydation[2]), Belichtung[3]), Korrosion der Oberfläche[4]]) keinen wesentlichen Einfluß haben, ließ sich mit Hilfe des Gefäßeinflusses und der ausgeprägten Verschiedenheit der Ermüdung von Cu und CuO zeigen, daß die Hauptermüdungserscheinung in freier Luft fast sicher dem Ozon verdankt wird.

Die vorliegende Untersuchung ergänzt zunächst den negativen Teil der vorigen durch Ausdehnung auf die mit Sonnenlicht (bei Zn) stattfindende lichtelektrische Entladung und durch weitere Versuche bezüglich der Unwirksamkeit der Korrosion. Ferner wird gezeigt, daß auch die Zurückführung auf sich bildende elektrische Doppelschichten[5]), welche mir gelegentlich der vorigen Arbeit noch sehr plausibel erschienen war und ja bei Ozon als wirksamer Substanz besonders nahe lag, nicht möglich ist; nur als Nebenursache, welche schwache Ermüdung um vielleicht 20—30 Proz. veranlassen kann, mögen elektrische Doppelschichten mitwirken.

Die eingehendere Untersuchung der in Gefäßen noch vorhandenen geringen Ermüdung (auch bei H-Füllung) weist dann auf die mit der Zeit fortschreitende Gasaufnahme der Platten als deren Ursache hin, wofür Versuche im Vakuum und in veränderter Temperatur auch positive Belege liefern.

---

1) W. Hallwachs, Phys. Zeitschr. 5. p. 489. 1904.
2) l. c. p. 492 u. 494.
3) l. c. p. 495 β.
4) l. c. p. 496.
5) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 196. 1902.

Schließlich wird die Wirkungsweise des den Hauptermüdungsvorgang bewirkenden Ozons untersucht. Auch hier läßt sich zeigen, daß es seinen ganz außerordentlich starken Einfluß weder durch Oxydation noch durch Änderung des Kontaktpotentiales ausübt, sondern direkt auf die Elektrizitätsträger wirken muß. Ozontitrierungen erweisen ferner, daß die Kleinheit des Ozongehaltes der Luft keinen Einwand für die Zurückführung der Hauptermüdung auf diesen Körper bildet.

Die Feststellung, daß die Empfindlichkeitsverringerung beim Eintauchen in ozonisierte Luft vom Feld unabhängig ist, führt dann zu dem Schluß, daß diese Verringerung auf Absorption der Elektronen durch von der Platte ad- und absorbiertes Ozon beruht, wodurch die Ermüdung in und außerhalb von Gefäßen auf dieselben, nur in ihrem quantitativen Erfolg verschiedenen, Grundwirkungen zurückgeführt wird. Daß die letzteren auch beim lichtelektrischen Grundphänomen stets eine entscheidende Rolle spielen müssen, vereinheitlicht die ganze Anschauung, verlangt aber auch, daß zur vollständigen Entscheidung grundlegender lichtelektrischer Fragen, z. B. nach dem Verhältnis der lichtelektrischen Empfindlichkeit der verschiedenen Metalle, das in die Körper eingedrungene Gas vorher weggeschafft werde.

A. Ergänzungen zum Nachweis, daß die lichtelektrische Ermüdung nicht auf einem Einfluß des Lichtes oder auf Korrosion beruht.

a) Nichteinfluß des Lichtes (Tageslicht).

In der früheren Arbeit waren die Ermüdungserscheinungen unter den Versuchsbedingungen, welche der Hauptmasse der lichtelektrischen Untersuchungen zugrunde gelegen haben (ultraviolettes Licht, Atmosphärendruck, mittleres Potential), bearbeitet worden. Es blieb festzustellen, ob auch die Ermüdung bei solchen lichtelektrischen Erscheinungen, welche unter anderen Versuchsbedingungen verlaufen, auf gleiche Ursachen zurückzuführen seien. Insbesondere war zu ermitteln, ob bei dem durch Tageslicht hervorgebrachten Verlust (Zn) nicht etwa Lichtwirkung die Ermüdung veranlasse, weil man gerade aus

solchen Versuchen früher auf optische Ermüdungsursachen geschlossen hatte.[1])

Die Versuche hierüber, welche Hr. Potzger im hiesigen Institute anstellte, waren folgendermaßen angeordnet. Von zwei nahe gleich großen Zimmern, *A* und *B*, wurde das eine verdunkelt. In dem hellen Zimmer stand die aus Elektroskop, Fernrohr und lichtelektrischer Zelle bestehende Versuchsanordnung in der Nähe des Fensters, so daß Sonnenlicht die Zelle bestrahlen konnte. In diese ließen sich zwei Zinkplatten, I und II, einsetzen und auf ihren lichtelektrischen Verlust im Tageslicht, eventuell direktem Sonnenlicht, untersuchen. Die Platten wurden vor dem Versuch abgeschmirgelt und nach lichtelektrischer Untersuchung die eine in *A*, die andere in *B* zur Ermüdung ausgelegt. Während der Emüdungsperiode empfing die im hellen lagernde Platte direkte Sonnenstrahlung. Von Zeit zu Zeit untersuchte man beide Platten wieder lichtelektrisch. Durch Vertauschung der Platten bezüglich der Zimmer wurde die Plattenverschiedenheit und durch Ausführung eines zweiten entsprechenden Versuchspaares bei Verdunkelung von *A* und Hellassen von *B*, wo jetzt auch die Versuchsanordnung stand, der Einfluß der Zimmer eliminiert. Die Verdunkelung der Räume geschah durch Herablassen der Fensterverdunkelung. Diese Anordnung verhindert die Verwechslung eines Gefäßeinflusses mit dem der Dunkelheit. Die Konstanz des Lichtes wurde nur roh kontrolliert: da beide Platten unmittelbar hintereinander untersucht wurden, hätten sich Lichtänderungen aus den Resultaten eliminieren lassen, das Licht blieb aber offenbar sehr konstant.

Die Resultate der Hauptversuche sind in der folgenden Tab. 1 zusammengestellt; beobachtet wurde die Anzahl Skalenteile, welche das Goldblatt des Elektroskops während bestimmter Belichtungsdauer der in die Zelle zum Versuch eingesetzten Platte durchlief. Unter Ermüdung ist die Abnahme der Empfindlichkeit in Prozenten des Anfangswertes verstanden.

---

1) H. Buisson, Compt. rend. **130.** p. 1298. 1900; Ann. de Chim. et Phys. (7) **24.** p. 320—398. 1901; C. v. Schweidler, Wien. Ber. **112.** IIa. p. 974. 1903.

Tabelle 1.

Ermüdungsperiode in Minuten	Belichtdauer in Sekunden	Hell in *A*, dunkel in *B*. (Isolation: 10 Min., Verlust 1 p.)							
		Verluste in Skalenteilen				Ermüdung in Prozenten			
		I in *A*	II in *B*	I in *B*	II in *A*	I in *A*	II in *B*	I in *B*	II in *A*
0	15	6	5,5	6	5,5	0	0	0	0
6	„	3,5	3	3	3	42	45	51	45
24	60	5	5	4,5	4	80	78	82	78
52	„	3	2,5	3	3	88	89	88	87
135	„	1,5	1,5	1,5	2	94	94	94	91
		Dunkel in *A*, hell in *B*.							
0	15	6	5,5	5,5	5,5	0	0	0	0
6	„	3,5	3	4	3,5	42	45	27	38
24	60	3,5	4	4	4	86	78	78	78
52	„	3	3	2,5	2,75	88	87	89	88
135	„	1,5	1,5	1,5	1,5	94	94	94	94

Man sieht schon direkt aus der Tabelle, daß es keinen Einfluß auf die Ermüdung hat, ob diese nun im Hellen oder im Dunkeln stattfindet. Bildet man die Mittel, welche sowohl den Einfluß der Plattenbeschaffenheit als auch den des Zimmers eliminieren, so ergeben sich:

	Prozente Ermüdung			
Im Hellen	40	78	88	93
Im Dunkeln	44	81	88	94

Die „helle" Platte lag am Ort der lichtelektrischen Zelle. Die Ergebnisse dieser Versuche liefern den Nachweis, daß auch bei dieser Klasse von lichtelektrischen Erscheinungen, denen mit Sonnenlicht, das Licht keine Ermüdungsursache ist. Daß die Platten im Dunkeln, wie es behauptet worden ist, an Empfindlichkeit wieder gewinnen, davon ist nichts zu bemerken und ich habe auch während meiner sonstigen, umfangreichen Versuche über die Ermüdung niemals eine Verbesserung, welche auf Dunkelheit zurückführbar gewesen wäre, erhalten.

Eine dritte Klasse von beobachteten Ermüdungserscheinungen bilden diejenigen in evakuierten Röhren.[1]) Von diesen

1) Vgl. z. B. P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 490. 1903; C. Ladenburg, Diss. Leipzig 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 558. 1903.

ist ebenfalls vermutet worden, daß sie von einer Wirkung des ultravioletten Lichtes auf die Kathodenoberfläche herrühren. Die hierüber angestellten Versuche sind aber nicht einwandfrei. Einwandfreien Nachweis würde nur der Vergleich der Ermüdung bei tangentialer mit dem bei normaler Belichtung, unter Festhaltung aller übrigen Versuchsbedingungen, liefern. Da nun in evakuierten Röhren zahlreiche andere Anlässe für eine Ermüdung vorhanden sind, z. B. Ozonbildung durch das in die Röhre dringende, ultraviolette Licht[1]); im Kitt des Fensters befindliche Ermüdungskörper (z. B. Holzteer, der, wie ich früher fand, starke Ermüdung liefert), welche sich bei langer Versuchsdauer im Vakuum verbreiten können; Änderung der Gasbeladung der Platten etc., so habe ich geglaubt, von der Untersuchung der Ermüdung dieser speziellen Klasse von Erscheinungen, nachdem für zwei andere das Nichtvorhandensein eines Lichteinflusses nachgewiesen ist, absehen zu können.[2])

Tatsächlich könnte man eher gerade umgekehrt sagen: je lichtelektrisch wirksameres Licht verwendet wird, um so geringer fällt die Ermüdung darin aus. Dies ist aber so zu verstehen: je langwelligeres Licht zur lichtelektrischen Messung benutzt wird, um so größer ist die Ermüdung, welche man für die auf die nämliche Weise ermüdete Platte durch den Versuch erhält. So wurde schon in der früheren Arbeit gefunden[3]), daß eine im Freien ermüdete Platte, welche, mit dem Kohle-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **1.** p. 503. 1900; E. Warburg u. E. Regener, Berl. Ber. **40.** p. 1228. 1904.

2) Hr. Ladenburg findet l. c. die Ermüdung besonders stark bei Ag, gar nicht vorhanden bei Al, Hr. Kreusler (Ann. d. Phys. **6.** p. 404. 1901) gibt an, Ag sei das einzige Metall, dessen Empfindlichkeit während einer Versuchsreihe konstant blieb, für Al erhält er eine normale Ermüdung, die etwa 60 Proz. von der des Cu betrug. Solche Unstimmigkeiten deuten darauf hin, daß den Substanzen Ag und Al hier zugeschrieben wird, was tatsächlich durch andere, nicht aufgeklärte Ursachen bewirkt worden ist. Ausgeschlossen ist natürlich eine Verschiedenheit des Verhaltens nicht, da die einen Versuche im Vakuum, die anderen bei Volldruck stattfanden, und die Felder verschieden waren. Indes möchte man eine solche Abhängigkeit von den Versuchsbedingungen doch erst nach eingehenderen Versuchen in Erwägung ziehen.

3) l. c. p. 498.

bogenlicht untersucht, auf $^1/_3$ der Anfangsempfindlichkeit herabgekommen war, mit der Hg-Quarzlampe untersucht etwa 25 Proz. stärkere Ermüdung zeigte. Während ferner die stärkste Zimmerermüdung, welche ich je für frisches Zn in einer halben Stunde mit Kohlebogenlicht beobachtete, die Empfindlichkeit auf $^1/_{1,8}$ herabdrückte, bekam Hr. Potzger unter diesen Verhältnissen, aber mit Sonnenlicht $^1/_{3,4}$ und mit trübem Himmelslicht $^1/_8$. Über eine mögliche mit den späteren Betrachtungen gut stimmende Erklärung siehe am Schluß dieser Arbeit (p. 512).

b) Nichteinfluß der Korrosion.

Der Umstand, daß sich bei den lichtelektrischen Zellen nach längerer Benutzung ein Abbild z. B. des Netzes, sei es direkt, oder beim Anhauchen auf der Platte zeigt, hat vielfach die Annahme veranlaßt, daß eine Strukturveränderung der Oberfläche, daß Korrosion Ursache der Ermüdung ist.[1]) Insbesondere hat Hr. Ladenburg die Ansicht ausgesprochen, daß der höchste Politurzustand, Hochglanz, erforderlich sei, um das Maximum der lichtelektrischen Wirkung zu ergeben.

In der früheren Arbeit habe ich auf gelegentliche Versuche hingewiesen, die diesen Annahmen widersprechen. Inzwischen sind nun weitere Versuche ausgeführt worden, welche zeigen, daß die lichtelektrische Stärke weder von der größeren oder geringeren Rauheit der Oberfläche, noch auch von der monatelangen Benutzung einer solchen abhängt, wenn man nur andere Ermüdungsursachen ausschließt.

Eine Cu-Platte wurde wiederholt auf Hochglanz unter Benutzung aller Erfahrungen, die man hinsichtlich des Polierens inzwischen gemacht hatte, mit Schmirgelpapier Hubert, qual. sup., 0000 poliert. Die Werte für die Empfindlichkeit lagen zwischen 1,92 und 2,38, bezogen auf die Eichzelleneinheit. Unmittelbar nachdem wieder der höchste erreichbare Wert (2,38) erhalten worden war, brachte man die Platte auf mittelfeines Schmirgelpapier (Hubert, qual. sup., Nr. III) und zerkratzte auf diesem reibend die Oberfläche. Sofort danach fand sich 2,32 für die Empfindlichkeit. Darauf diente ganz

1) Z. B. H. Kreusler, l. c. p. 464. Anm. 2; L. Ladenburg, P. Lenard, l. c. p. 463. Anm. 1.

grobe Schmirgelleinwand (Naxos-Union Qual. D. D. Nr. 3) zum weiteren Zerkratzen, nach welchem man 2,39 erhielt. Der Rauhigkeitsgrad der Oberfläche hat also keinen Einfluß auf die lichtelektrische Empfindlichkeit.

Um auf etwaigen primären Einfluß von der in den Zellen nach längerem Gebrauch eintretenden, durch die erwähnten Abbildungen nachgewiesenen Oberflächenänderungen zu prüfen, mußte die Plattensubstanz ein ozonzerstörender Körper sein, sonst blieb der Einwand bestehen, daß durch das ultraviolette Licht erzeugtes Ozon die Ermüdung bewirkt habe. Überdies mußte auch die durch andere Ursachen veranlaßte Ermüdung während der Versuchsperiode möglichst gering gehalten werden. Dazu boten sich zwei Eichzellen mit CuO-Platten dar. Die folgende Tab. 2 gibt das Verhältnis ihrer Empfindlichkeiten zu den dabei angegebenen Zeitpunkten. Im Juni 1904 wurde die eine Eichzelle (ε) aus dem Licht dauernd entfernt und nur viermal im Verlauf von 16 Monaten zur Prüfung auf ihre lichtelektrische Empfindlichkeit vor die Bogenlampe an einen fixierten Ort gebracht. Während dieser ganzen langen Zeit diente die andere Eichzelle (ζ) bei allen meinen Versuchen als Normale und war mit Ausnahme der Ferien fast täglich in Benutzung.

Tabelle 2.

	1904			1905	
Datum	16. VI.	2. VII.	3. XI.	9. III.	20. XI.
ζ	77 sec	80	87	88	102
ε/ζ	0,701	0,748	0,740	0,700	0,732

Man sieht hieraus, daß das Bestrahlen einer Zelle mit ultraviolettem Licht während der Versuche eines Zeitraums von 1,5 Jahren die lichtelektrische Empfindlichkeit nicht beeinflußt. Die eingetretene Ermüdung von 77 auf 102 Sek. kann also nicht der Korrosion zugeschrieben werden.

Nach den beiden vorigen Versuchen wird man dem Rauhigkeitsgrad der Oberfläche oder deren Korrosion keinen primären Einfluß auf die lichtelektrische Ermüdung zuschreiben dürfen. Es ist indes nicht ausgeschlossen, daß es Fälle gibt, in welchen der die Netzabbildungen auf den Platten bedingende Vorgang die Ursachen der lichtelektrischen Ermüdung und damit diese selbst, aber nur sekundär, beeinflußt.

c) Zum Schluß dieses, frühere Ergebnisse ergänzenden, Teiles sei noch erwähnt, daß auch Versuche darüber angestellt wurden, ob etwa eine von außen in das Gefäß dringende unbekannte Strahlung[1]) Ermüdungsursache sei. Diese Versuche, bei denen die Ermüdung in einer dünnen Glashülle verglichen wurde mit derjenigen, welche bei Einsetzung dieser Hülle in mehrere, ineinander gestülpte, dickwandige Glasgefäße stattfand, hatten, analog wie die früher erwähnten Versuche mit Röntgen- und mit Radiumstrahlen, völlig negatives Ergebnis. Auch ist mir bei Anwendung von nicht allzu engen und genügend gereinigten Gefäßen nichts entgegengetreten, was auf eine Abhängigkeit der Ermüdung von der Substanz des Gefäßes (Glas, Messing, Zn, Al, Stahl) hätte schließen lassen.

B. Die lichtelektrische Ermüdung beruht nicht auf der Bildung elektrischer Doppelschichten.

In der früheren Arbeit war bereits bewiesen worden, daß bei der Ermüdung elektrische Einflüsse auf Bestandteile des Zwischenmediums nicht beteiligt sind. Es blieb aber noch eine andere elektrische Erklärung möglich, die seinerzeit von Hrn. Lenard hervorgehoben worden war[2]), daß sich nämlich an der Oberfläche der Platte selbst Vorgänge abspielten, deren Resultat die Bildung elektrischer Doppelschichten wäre. Solche Schichten hätten eventuell die Fähigkeit, die Ermüdungserscheinungen hervorzurufen. Wenn nämlich ihre negative Seite nach außen läge, so müßten die von der Platte fortgehenden negativen Teilchen beim Durchgang durch die Schicht einen Geschwindigkeitsverlust erleiden, der unter geeigneten Umständen die Ermüdung veranlassen könnte. Da letztere dauernd bestehen bleibt, so hätte sie von einer dauernden Änderung des Kontaktpotentials begleitet sein müssen.

Zur Aufklärung dieser Verhältnisse waren daher während der Ermüdungsperiode zwischengeschaltete Bestimmungen des Kontaktpotentials der lichtelektrischen Versuchsplatten auszuführen. Sie ergaben, daß kein Parallelismus zwischen dem Verlauf der Variationen des Kontaktpotentials und den Er-

1) Vgl. die Arbeiten von Mc Clennan, Rutherford, Patterson etc. Referat darüber vgl. J. J. Thomson, Bearbeitung Marx, § 6a.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 196. 1902.

müdungserscheinungen besteht. Sollen diese nämlich durch Doppelschichten erklärt werden, so müssen sie von einem Negativerwerden der untersuchten Metallplatten begleitet sein. In vielen Fällen blieb aber bei starker Ermüdung das Kontaktpotential konstant oder erhöhte sich sogar (vgl. Tab. 4 und deren Erläuterung). Hieraus folgt, daß die Ermüdungserscheinungen eine allgemeine Erklärung durch Bildung von Doppelschichten nicht erhalten können.

Es bleibt aber noch die Frage offen, inwieweit Kontaktpotentialänderungen vielleicht als Nebenursache einen merkbaren Einfluß besitzen. Durch Vergleich der Ermüdung in starkem und sehr schwachem Felde ließ sich nachweisen (vgl. unter c), daß bei den von mir untersuchten Erscheinungen ein solcher Einfluß nur einen kleinen Teil der Ermüdung, etwa von der Größenordnung von 20—30 Proz., eventuell zu erklären vermag.

a) Versuchsanordnungen.

1. Bestimmung der Kontaktpotentiale.

Zur Bestimmung der Kontaktpotentiale diente die Kompensationsmethode.[1]) Bei derselben wird die eine Platte eines Kondensators durch Anlegen eines Hilfspotentials auf gleiches Potential gebracht wie die ihr gegenüberstehende Platte aus anderem Metall. Die erfolgte Kompensation ergibt sich daraus, daß beim Auseinanderziehen der Platten das mit der einen, isolierten Platte verbundene, empfindliche Elektrometer von geringer Kapazität keinen Ausschlag zeigt. Die gesuchte Potentialdifferenz ist dann gleich dem angelegten Hilfspotential.

Der Apparat hierzu bestand aus einer Messinghülle mit Tür, in welcher ein mittels Quarzfuß isoliertes Tischchen die zu untersuchende Platte ($d = 4$ cm), durch zwei Anschläge und eine kleine Feder fixiert, trug. Darüber schwebte eine größere Messingplatte von alter Oberfläche, deren axialer, zylindrischer Halter sich in einer oben am Gehäuse festen Messingröhre sicher geführt, mittels Rolle und Schnur von außen auf- und

1) F. Schulze-Berge, Diss. Berlin (Helmholtz) 1880, Wied. Ann. 12. p. 293. 1881; H. Pellat, Journ. d. Phys. 9. p. 145. 1880; Ann. de chim. et phys. (5) 24. p. 5—136. 1881. Prioritätsreklamation bezüglich der Methode vgl. Lord Kelvin, Phil. Mag. (5) 46. p. 82. 1898.

abschieben ließ. Seine tiefste Lage bestimmte ein auf das obere Rohrende treffender Anschlag. In dieser Lage wurde der oberen Platte die untere mittels dreier, von unten wirkender Stellschrauben mit Federfixierung möglichst genähert und parallel gestellt. Das übrigens isolierte Gehäuse und die obere Platte lagen am Hilfspotential, welches Akkumulator und Rheostat unter Abzweigung lieferten. Von der unteren Platte führte eine isolierte, aber erdbare Leitung zum Blättchen des Hankelschen Elektrometers, an dessen Belegungen ± 280 Volt lagen. Geerdete Hüllen von Zinkblech umgaben sowohl das Elektrometer, als auch die genannte Leitung, letztere bis dicht an das Gehäuse des Kontaktpotentialapparates, welches durch ein Streifchen Hartgummi dagegen isoliert blieb. Die Leitung passierte einen isolierten Hg-Napf, in diesen konnte die Erdleitung von oben eingeführt werden. Der dazu gebrauchte Erdschlüssel bestand aus einem vertikal in einem Röhrchen vermittelst Rolle und Schnur leicht verschiebbaren Messingstift, dessen anderes Ende ein Metallfaden mit der geerdeten Hülle der Leitung verband. Zwei Anschläge begrenzten das Spiel des Schlüssels.

Das Hankelsche Elektrometer gab bei direktem Anlegen des Potentials gewöhnlich für 0,5 Volt etwa 30, wie Doppelmillimeter in 25 cm Entfernung aussehende, Skalenteile Ausschlag.[1]) Beim Anlegen des Potentials an den Kontaktapparat lieferten 0,01 Volt Potentialverschiedenheit beim Auseinanderziehen der Platten bis zu etwa 5 Skt. Diese große Empfindlichkeit gelangte nicht immer zur Anwendung, da meist eine geringere für den vorliegenden Zweck vollständig ausreichte und weniger Zeitaufwand beim Einstellen der Kondensatorplatten verlangte, weil diese nicht auf den erreichbar kleinsten Abstand gebracht zu werden brauchten. Zu diesem Einstellen

1) Man kann zwar die Empfindlichkeit des Hankel noch weiter, z. B. auf das Doppelte steigern, kommt aber dann der Labilität so nahe, daß die unvermeidlichen kleinen Änderungen der Hilfsbatterie und der Temperatur das Blättchen ziemlich bald aus der Stabilität bringen und man fast alle Tage frisch einstellen muß. Dem gelegentlich auch angewendeten Wilsonschen Elektroskop fand ich, gleiche Stabilität vorausgesetzt, das Hankelsche wohl überlegen, so daß ich zu letzterem wieder zurückgriff.

diente jeweils eine der Versuchsplatte gleiche Hilfsplatte, um die erstere sofort nach dem Einsetzen ohne Zeitverlust auf ihr Kontaktpotential untersuchen zu können.

Die Isolation des Systems untere Kondensatorplatte bis Blättchen, welche lediglich durch Quarz und Schellack bewirkt war, ließ nichts zu wünschen übrig und wurde außerdem bei jedem Versuch kontrolliert.

Der Gang einer Potentialdifferenzbestimmung mit der beschriebenen Anordnung war folgender. Die Platte ließ sich mit Hilfe einer Pinzette in wenigen Sekunden an Ort bringen. Nach dem Niederlassen der oberen Platte und Aufheben der bis dahin bestehenden Erdverbindung mußte das Blättchen des Elektrometers in Ruhe bleiben. Geschah dies, so wurde die obere Platte, an welcher schon von vornherein eine mutmaßlich nahezu kompensierende Potentialdifferenz anlag, hochgezogen und der Ausschlag bestimmt. Ein zweiter Versuch nach kleiner Variation des angelegten Potentials und ein dritter, die Wiederholung des ersten, lieferten dann zusammen, neben der Kontrolle der Konstanz, die Empfindlichkeit und durch Interpolation die Kontaktpotentialdifferenz der beiden Platten.

Ein Beispiel solcher Bestimmungen möge angeführt werden (Tab. 3), unten lag eine Cu-Platte, die obere Platte war, wie erwähnt, aus altem Messing, an sie ist das Kompensationspotential der Tabelle angelegt.

Tabelle 3.

Kompensationspotential	Ausschläge	
−0,1200 Volt	23,0 − 33,2 = + 10,2	$1\,p = 0{,}06/33{,}8 = 0{,}00178$ Volt
−0,0600 „	23,5 − 0,0 = − 23,5	$P_{\text{unten}} - P_{\text{oben}} = -0{,}102$ Volt
−0,1200	23,0 − 33,4 = + 10,4	

Die untersuchten Platten werden unmittelbar nach dem Einlegen in den Kontaktapparat etwas positiver, ähnliches beobachtete Hr. Pellat.[1]) Bei frisch polierten Platten beträgt der Anstieg bis etwa gegen 0,02 Volt, bei älteren wenige Tausendstel Volt. Er beruht wohl darauf, daß die Platten bis auf sehr

1) H. Pellat, Compt. rend. 94. p. 1247. 1882.

kleinen Abstand zu nähern sind, wenn größere Empfindlichkeit erzielt werden soll. Die Methode hat also einen prinzipiellen Fehler, welcher aber für die vorliegende Untersuchung keine Rolle spielte.

2. Lichtelektrische Versuche im starken Feld.

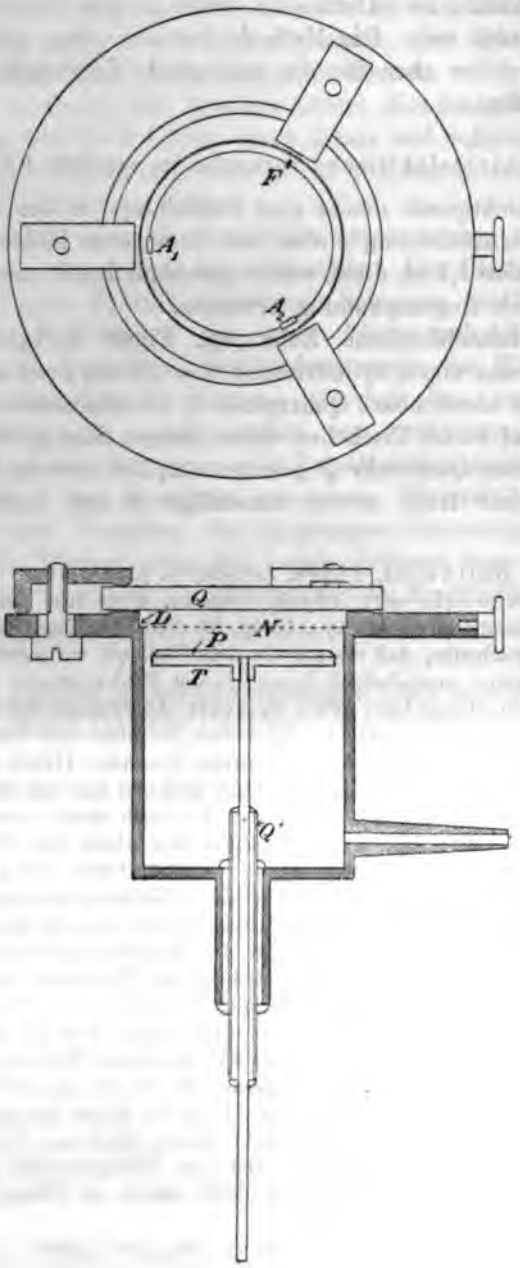
Als Lichtquelle diente eine Bogenlampe in der früher beschriebenen Anordnung[1]), aber mit homogenen Kohlen[2]) (obere 1,6 cm untere 1,1 cm dick), welche gewöhnlich mit etwa 13 Amp. und 53 Volt Bogenspannung arbeitete.

Die lichtelektrische Zelle (vgl. Figur) bestand im allgemeinen aus einem zylindrischen ($d = 4{,}5$ cm; $l = 6$ cm), durch eine leicht abnehmbare Quarzplatte Q verschlossenen Messinggefäß. Auf einem Tischchen darin, dessen Stiel in ein ins Gefäß gekittetes Quarzrohr Q' gekittet war, ließ sich die Versuchsplatte P mit Hilfe zweier Anschläge A und einer kleinen

---

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 489. 1904. Hr. W. B. v. Czudnochowski sagt (Physik. Zeitschr. 5. p. 101. 1904) bei Erwähnung meiner Ann. d. Phys. 13. p. 38. 1904 veröffentlichten Arbeit, in der ich nachwies, daß die auf Cu lichtelektrisch wirksame Strahlung der Bogenlampe ausschließlich (innerhalb der Fehlergrenzen) vom Bogen selbst ausgeht, dieses hätte schon H. Hertz (Ausbreitung der elektrischen Kraft, p. 85—86) festgestellt. Das ist meines Erachtens eine Verwechselung eines qualitativen mit einem quantitativen Resultat. Hertz zeigte, daß auch das Licht des Bogens lichtelektrisch wirksam ist, daß aber das von den Kohlenenden ausgehende Licht im Vergleich damit unwirksam ist, hat er nicht behauptet. Mit seinen Versuchen würde kein Widerspruch entstehen, wenn sich später quantitativ ergeben hätte, daß z. B. $^1/_4$ der Wirkung vom Bogen, $^3/_4$ von den glühenden Kohlenspitzen ausgehe. Die Versuche von Hertz waren qualitativer Natur, gingen darauf aus zu zeigen, welche Lichtarten überhaupt die Wirkung hervorbringen, und erstrebten quantitativ nur die Feststellung des Minimums von Lichtaufwand, welches man zur Hervorbringung eines merkbaren Einflusses auf die Funkenentladung noch brauchte. Er zeigte, daß die Bogenlampe noch in einem Abstande von 1, 2, 3, 4 m merkbare Wirkung hervorruft und daß auch ein Lichtbogen, dessen Kohlespitzen abgeblendet sind, noch lichtelektrische Wirkung liefert. Über die Größe der letzteren sind keine Messungen ausgeführt. Ich habe weder früher aus den Versuchen von Hertz den Schluß gezogen, daß das Elektrodenlicht unwirksam ist, und halte diesen Schluß auch jetzt daraus zu ziehen, für nicht möglich.

2) R. Lindemann, Ann. d. Phys. 19. p. 807. 1906.


F
A1
A2
Q
M
N
P
T
Q'

Stellfeder *F* leicht und schnell fest lagern. Der Platte stand in etwa 6 mm Entfernung ein Drahtnetz *N* gegenüber. Der um dasselbe gelötete Messingring ruhte in einer Ausdrehung *D* des Gefäßes, durch Reibung darin genügend befestigt. Netz und Gefäß standen mit einer Akkumulatorenbatterie von +280 Volt in Verbindung, der Tisch mit dem Elektrometer.

Das Gefäß lag, durch ein Hartgummigestell isoliert, im Innern eines zur Erde abgeleiteten Zinkblechkastens, welcher vorn offen und zur räumlichen Fixierung der Zelle gegenüber der Bogenlampe auf einem Stativ festgekittet war. Die Beine des letzteren erhielten durch am Asphaltfußboden befestigte Rahmen ebenfalls eine feste Lagerung, während der Ort des Lichtbogens durch an den Wänden feste Schattenmarken fixiert wurde. Auf diese Weise ließen sich Orientierung und Abstand der Zelle gegenüber der Bogenlampe immer schnell wiederfinden, wenn inzwischen Gefäß und Platte in anderen Anordnungen gebraucht worden waren.

Neben der Zelle ruhte auf demselben Hartgummigestell eine zweite stets verschlossene Zelle mit alter CuO-Platte, und nur sehr langsam abnehmender Empfindlichkeit. Sie wurde von Zeit zu Zeit unter Ablesung von Strom und Spannung der Bogemlampe durch eine besondere Versuchsreihe auf normale Lichtstärke bezogen und konnte so als Eichzelle dienen, indem sie immer gleichzeitig mit der Untersuchungszelle beobachtet wurde.

Die Leitungen von den lichtelektrischen Zellen zu den Elektrometern verliefen auf Schellackstützen im Innern von rechteckigen, 7 × 7 cm Weißblechröhren mit abnehmbaren Deckeln, aus welchen sich elektrostatische Hüllen für Leitungen sehr bequem zusammenbauen lassen.

Als Elektrometer dienten im Innern abgeleiteter, mit geeigneten Fenstern und einem verstellbaren Mikroskop versehener Zinkkästen isoliert aufgestellte Blattelektroskope. Der letzteren Fenster erhielten eine Drahtnetzbelegung, so daß die Blättchen vollständig metallisch eingehüllt waren. Diese Hüllen lagen an einem geeigneten von Null verschiedenen Potential (meist 180 Volt), so daß die Blättchen auch im abgeleiteten Zustand bereits divergierten, was die mikroskopische Beob-

achtung erleichtert, empfindlicher und exakter macht. Zur Beleuchtung dienten in etwa 6 m Abstand aufgestellte, mit geeigneten Blendschirmen versehene Lampen. 1 Volt Potentialänderung des Blättchens ergab etwa 2 Skalenteile Ausschlag am Okularmikrometer. Man beobachtete gewöhnlich eine lichtelektrische Potentialänderung von nur etwa 18 Volt. Dies hatte, da zwischen Netz und Platte 280 Volt lagen, den Vorteil, daß der übrigens außerordentlich geringe Isolationsverlust von der Potentialvariation des Systems Blättchen bis Platte unabhängig blieb und somit exakt zu eliminieren war. Letzteres ist nicht möglich, wenn das Blättchen eine Potentialänderung durchläuft, welche der Spannung zwischen Netz und Platte nahe gleich kommt.

Auf den Trägern der Elektroskopblättchen saßen kleine Hg-Näpfe, in welche auf dem Deckel der Zinkhüllen der Elektroskope befestigte Erdungsschlüssel von der unter 1. beschriebenen Form eintauchen konnten.

Die Beobachtungen geschahen so, daß nach Aufhebung der Erdung des Blättchens und der damit verbundenen Versuchsplatte die zu einer Potentialerhöhung um etwa 18 Volt erforderliche Zeit zur Bestimmung gelangte. Die Empfindlichkeit der Elektrometer wurde häufig durch Ermittelung des Ausschlages revidiert, welcher einer Änderung von 20 Volt des Potentials der inneren Hülle entsprach. Diese 20, jeweils nach der Kompensationsmethode mittels eines Westonelementes bestimmten Volt lieferten zehn kleine Akkumulatoren.

3. Lichtelektrische Versuche im schwachen Feld.

Bei diesen trat an die Stelle des einen der gerade beschriebenen Elektrometer das Hankelsche. Die Zelle bestand aus einem Blechstreifen, welcher die Versuchsplatte mittels Federklemmung festhielt und außerhalb der Auflagefläche dieser Platte lackiert war. Zwei aufgesetzte Schellackstäbchen hielten das 20×8 cm² Messingdrahtnetz in 2,7 cm Abstand von der Platte. Die Zelle ließ sich in einem großen Eisenkasten isoliert aufhängen, in welchen die Strahlen der Bogenlampe durch ein mit Drahtnetz überspanntes Fenster eintraten. Das Netz der Zelle lag an $+1{,}1$ Volt (1 Daniell), so daß ein Feld von nur $1{,}1/2{,}7 = 0{,}41$ Volt/cm zustande kam, während bei den

Versuchen unter 2. ein mehr als tausendmal so starkes Feld, nämlich 280/0,06 = 470 Volt/cm wirkte. Die benutzte Potentialvariation betrug im allgemeinen etwa 0,1 Volt.

b) Lichtelektrische Ermüdung und Kontaktpotential.

Zur Ermittelung der gleichzeitig mit der Ermüdung etwa stattfindenden Kontaktpotentialänderungen wurde im allgemeinen die Versuchsplatte zuerst auf Kontaktpotential untersucht, dann lichtelektrisch im starken Feld, hierauf nochmals kontaktelektrisch. Da sich das Kontaktpotential nur sehr langsam ändert, und zwischen den einzelnen Versuchen nur kurze Zeit verstrich, indem das Einschalten der Platten in die verschiedenen Versuchsanordnungen auf genügende Schnelligkeit der Manipulationen, wie unter a) angedeutet, besonders eingerichtet war, so ergaben sich bei der geschilderten Aufeinanderfolge der Versuche richtig zusammengehörige Werte des Kontaktpotentials und der lichtelektrischen Empfindlichkeit.

Die ursprünglich frisch polierten Platten machten dann eine Ermüdungsperiode im Zimmer, im Freien, in einer Flasche etc. durch, um darauf zum zweitenmal untersucht zu werden. In der Tab. 4 finden sich eine Anzahl derartiger Versuche, welche an Cu-Platten stattfanden, zusammengestellt. Die Tabelle enthält die Dauer der Ermüdungsperiode, den Aufenthaltsort während derselben, den Anfangs- und Endwert der lichtelektrischen Empfindlichkeit und der Kontaktpotentiale gegenüber der Messingplatte des Kontaktapparates, wobei das Minuszeichen ausdrückt, daß die Versuchsplatte negativer war wie die Messingplatte, sowie endlich die Änderung des Kontaktpotentials. Letzteres ist in allen hier zusammengestellten Fällen etwas positiver geworden. Es hätte negativer werden müssen, falls es die Ursache der Ermüdung gewesen wäre. Diese ließ man bis zu erheblicher Stärke anwachsen, wie die Versuche zeigen; die Kontaktpotentialänderungen waren hier nur sehr klein.

Aus diesen Versuchen folgt, daß die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung des Cu nicht in der Bildung von elektrischen Doppelschichten besteht.

Tabelle 4.

Zeit	Platte 2		Platte 0		Platte *b*		Platte 2		Platte 2		Platte 2	
	0^h	46^h	0^h	$46{,}5^h$	0^h	21^h	0^h	24^h	0^h	144^h	0^h	$0{,}8^h$
Aufenthalt inzwischen	—	im Zimmer	—	Zimmer	—	Zimmer zuletzt im Fenster	—	Im Freien und im Zimmer	—	Flasche	—	Im Freien
Lichtelektrische Stärke	100	13,2	100	12,6	100	9,4	100	9,6	100	32	100	43,4 Proz.
Kontaktpot.	−0,067	−0,003	−0,073	−0,007	−0,118	−0,115	−0,122	−0,112	−0,166	−0,076	+0,040	+0,077 Volt
Änderung desselben	—	+0,06	—	+0,07	—	+0,003	—	+0,01	—	+0,09	—	+0,04 Volt

Tabelle 5.

Zeit	Cu_a			Cu_a				Cu_a				Pt	
	0^h	$6{,}1^h$	$6{,}4^h$	0^h	$5{,}2^h$	$26{,}7^h$	$95{,}3^h$	0^h	$5{,}5^h$	48^h	$95{,}5^h$	0^h	$1{,}5^h$
Aufenthalt inzwischen	—	Freien	Zimmer	—	Freien	Zimmer	Zimmer	—	Freien	Flasche	Flasche	—	10^m in Ozon dann 1^h Zimmer
Lichtelektrische Stärke	100	10,0	10,5	100	14	13	5,9	100	14	13	8,9	100	45,4 Proz.
Kontaktpot.	−0,099	−0,173	−0,124	−0,105	−0,234	−0,097	−0,029	−0,125	−0,240	−0,118	−0,021	−0,329	−0,466 Volt
Änderung desselben gegen den Anfangswert	—	−0,074	−0,035	–	−0,129	+0,008	+0,076	—	−0,115	−0,007	+0,104	—	−0,137 Volt

Es verliefen indes nicht alle Versuche in derselben Richtung wie die in Tab. 4 aufgeführten. Öfters wurden die Platten beim Lagern auch negativer, und zwar im allgemeinen gerade dann, wenn die Ermüdung besonders schnell vor sich geht, nämlich meistens beim Lagern im Freien. Allerdings geschieht dies nicht regelmäßig, auch beim Lagern im Freien geht das Kontaktpotential öfters aufwärt, was mit den Witterungsverhältnissen zusammenzuhängen scheint. Auch Ozon, welches so kräftige Ermüdung bewirkt, macht die Platten negativer. Umgekehrt ist die verhältnismäßig langsame Ermüdung in Gefäßen stets mit einem positiven Werden der Platten verkuüpft. Die vorstehende Tab. 5 gibt eine Übersicht über diese Verhältnisse.

Wären die Versuche der Tab. 5 allein vorhanden, so würde man vielleicht geneigt sein, die Änderung des Kontaktpotentials als eine wesentlichere Ursache der lichtelektrischen Ermüdung aufzufassen. Wenn dies nun auch die Resultate der Tab. 4 ausschließen, so bleibt mit letzteren doch vereinbar, daß die Kontaktpotentialänderungen als Nebenursache mitwirken. Bis zu welchem Betrage dies möglich ist, soll zunächst untersucht werden. Diese Untersuchung wird auch zur Beseitigung etwaiger Bedenken dienen, welche die Tab. 5 gegen den aus Tab. 4 gezogenen Schluß allenfalls erwecken könnte.

Die beobachteten Kontaktpotentialänderungen sind klein, steigen höchstens bis zu $^1/_8$ Volt an. Liegt nun diese Potentialdifferenz Δp auf der Strecke, wo die aus der Platte austretenden Elektronen noch nicht absorbiert sind, so kann ein Wert $\Delta p = {}^1/_8$ Volt, wie sich zeigen wird, nur eine Ermüdung von ca. 20—30 Proz. herbeiführen. Erstreckt sich aber ein erheblicher Teil von Δp bis in das Gebiet, wo die Elektronen bereits absorbiert sind, so würde $^1/_8$ Volt große Ermüdung bewirken können, es müßte aber dann die Ermüdung von der Feldstärke abhängig sein, was nicht der Fall ist, wie besondere Versuche weiter unten zeigen und damit die Möglichkeit, größere Ermüdungen auf Kontaktpotentialänderungen zurückzuführen, beseitigen.

α) Die Doppelschicht werde von den Elektronen passiert (vor der Absorption durch das Gas). In diesem Falle ergeben die Messungen des Hrn. Lenard über die Anfangsgeschwindig-

keiten[1]) der Elektronen einen Anhalt für die Abschätzung der Größenordnung der hiermit verknüpften Ermüdung. Die „Geschwindigkeiten" der Elektronen würden um den Potentialsprung der Doppelschicht herabgesetzt, was eine Verminderung der Zahl der ausgestrahlten Elektronen bewirkt. Falls mit sehr schwachem Felde (in meinen Versuchen 0,4 Volt/cm) gearbeitet wird, ergibt die Ablesung z. B. an der Pt-Kurve des Hrn. Lenard (für $^1/_8$ V.) eine Verminderung der ausgestrahlten Quanten um 16 Proz. Im starken Felde (bei meinen Versuchen 470 Volt/cm) kommen, wie aus derselben Kurve hervorgeht, etwa 20 Proz. mehr Elektronen heraus, diese besitzen aber nur sehr geringe „äußere Geschwindigkeiten", so daß sie durch $^1/_8$ Volt entgegenwirkenden Kontaktpotentialsprung nahezu sämtlich wieder zur Rückentladung gebracht werden. Das gleiche geschieht mit denjenigen Elektronen, deren äußere Geschwindigkeit $^1/_8$ Volt nicht übersteigt, das sind etwa 13 Proz. der gesamten ausgestrahlten. Im ganzen könnte daher äußersten Falles eine Ermüdung bis zu etwa 33 Proz. auftreten. Die der Kontaktpotentialänderung entsprechende Doppelschicht vermag also nur Ermüdungen *um* 20—33 Proz., d. h. *auf* 80—70 Proz. des Anfangswertes unter diesen Umständen höchstens zu veranlassen, d. h. nur einen kleinen Teil des tatsächlich beobachteten. Die Ermüdung müßte nach dem vorstehenden im starken Felde etwas größer sein wie im schwachen, während die weiter unten mitzuteilenden Versuche ihre Unabhängigkeit vom Felde ergeben. Indes ist die Genauigkeit nicht groß genug, um hieraus einen Widerspruch konstruieren zu können, auch handelt es sich bei der angestellten Betrachtung nur um eine Abschätzung der Größenordnung nach. Das Ergebnis ist daher, daß ein kleiner Teil der Ermüdung, etwa 20—30 Proz., eventuell durch Änderung des Kontaktpotentials bewirkt sein wird, daß diese Änderung aber auf dem unter α) betrachteten Weg die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung nicht zu liefern vermag.

β) Zweite Möglichkeit: *ein merklicher Betrag q der Potentialänderung der Doppelschicht reicht bis in das Gebiet, in dem die*

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149—198. 1902, insbesondere Taf. I, Fig. 2.

Elektronen bereits absorbiert sind. In diesem Falle vermöchten sehr kleine q starke Ermüdungen hervorzurufen: bei Feld Null würden schon 0,01 Volt genügen können, um jedes weitere Fortgehen der Ionen aufzuhalten.[1]) Ist nun die Dicke der Doppelschicht nicht allzu klein, so müßte das wirkende Feld einen mit seiner Stärke steigenden Betrag von q kompensieren, was aber die hier folgenden Versuche ausschließen, da sie gleiche Ermüdung für Feld 0,4 und 470 ergeben. Diese Unabhängigkeit vom Feld ließe sich eventuell auch noch darauf zurückführen, daß die Dicke des wirksamen Teils der Doppelschicht zu gering wäre, um eine merkliche Kompensation von q auch bei dem stärkeren Feld (470) zu ermöglichen. Dann könnte aber q nur von der Größenordnung 0,01 Volt sein, da sonst die ganze lichtelektrische Strömung (analog wie im Feld Null) aufgehoben würde, was durchaus nicht der Fall ist. Schwankungen der Potentialvariation von nur 0,01 Volt müßten dann den größten Einfluß auf die Ermüdung ausüben. Dies trifft aber nach unseren früheren Versuchen nicht zu, da selbst Potentialschwankungen von der Größenordnung $^1/_{10}$ Volt nur sekundären Einfluß auf die Ermüdung haben. Die Annahme β ist daher nicht in Erwägung zu ziehen.

Zum Nachweis der erwähnten Unabhängigkeit der Ermüdung vom Feld kamen folgende Versuche zur Ausführung. Zunächst gelangten zwei frisch polierte Cu-Platten im starken Feld (470) und in einem schwachen Feld zur Untersuchung, welches durch Herabsetzung der Potentialdifferenz der Zelle von 280 auf 10 Volt erzielt wurde. Im starken Felde ließ man das Potential um 19 Volt, im schwachen um 8,5 Volt herabsinken. Wechselweise Beobachtung eliminierte die Ermüdung während der Versuchsdauer. Die Platten kamen dann eine gute halbe Stunde ins Freie, um etwa auf die Hälfte zu ermüden, worauf abermals ihre Untersuchung stattfand. Um ein Beispiel für die Beurteilung der Genauigkeit zu geben, mögen diese Versuche im einzelnen mitgeteilt werden.

---

1) Dies folgt aus der Annahme, daß die gebildeten Ionen aus je einem Elektron ($\varepsilon = 6{,}6 \times 10^{-10}$ st. E.) und einem Gasmolekel (kinetische Energie $= 23{,}5 \times 10^{-15}$ Erg) bestehen.

Tabelle 6.

V = Potentialdifferenz an der Zelle; Cu_I, Cu_{II}, „Eichzelle" bedeuten die bei diesen Platten zum Durchlaufen von 19 bez. 8,5 Volt gebrauchten Zeiten.

V	t	Cu_I sec	Eichzelle	t	Cu_{II} sec	Eichzelle
280	$11^h 44^m$	12,3; 12,2; 12,1	62,8	$12^h 5^m$	13,1; 13,1; 12,9	63,3
10	51	109	62,0	9	126	62,9
280	54	13,0; 13,0; 12,9	62,3	14	14,2; 14,2; 14,1	64,1
10	$12^h 35^m$	231	65,2; 64,5	$1^h 8^m$	265	62,0; 62,7
280	40	26,0; 26,1	64,6	14	29,5; 29,3	63,0
10	44	230	64,3; 62,9	16	263	62,7; 62,4

Aus diesen Versuchen ergeben sich für Cu_I im starken Feld eine Ermüdung auf 49,9 Proz., im schwachen auf 48,9 Proz., für Cu_{II} die entsprechenden Zahlen 45,8 und 47,4. Innerhalb der Versuchsfehler sind also die Ermüdungen in beiden Feldern, deren Stärke sich wie 28:1 verhalten, einander gleich. Die Kontaktpotentiale wurden hier, da die Versuche wesentlich zur Orientierung dienen sollten, nicht gemessen. Wenn auch aus anderen Versuchen, welche in jenen Tagen (August) stattfanden, folgt, daß das Kontaktpotential etwa um 0,1 Volt heruntergegangen sein muß, so waren doch Versuche zuzufügen, bei denen jenes gleichzeitig zur Messung gelangte. Da es zur Zeit derselben (im März) nicht gelang, das Kontaktpotential durch Lagern im Freien herunterzuschieben, kam Ozon zur Anwendung, ferner eine Platinplatte sowie die unter B. a. 3. beschriebene Anordnung für das schwache Feld, welches hier noch nicht ein Tausendstel des starken betrug. Die Platinplatte zeigte, frisch ausgeglüht, $-0{,}36$ Volt gegenüber der alten Messingplatte, die lichtelektrische Stärke (reziproke Entladungszeit, bezogen auf die der Eichzelle) fand sich im starken Feld zu 0,78, im schwachen zu 0,71 (die Zahlen beziehen sich auf verschiedene Einheiten, sind nicht vergleichbar). Nach 10 Min. Verweilen in Ozon und darauffolgendem dreiviertelstündigem freien Liegen auf dem Tische (zur Elimination der raschen Empfindlichkeitsänderung unmittelbar nach dem Herausnehmen aus dem Ozon) ergab sich die Kontaktpotentialdifferenz

zu $-0{,}466$, die lichtelektrische Stärke zu 0,352 im starken und 0,288 im schwachen Feld. Bei einer Potentialerniedrigung um 0,137 Volt hatte also die Empfindlichkeit der Platte im starken Feld um 54—55, im schwachen um 59—60 Proz. abgenommen. Die Ermüdung ist also in den beiden Feldern, die sich etwa wie 1000 : 1 verhalten, wesentlich gleich. Der kleine Unterschied der Zahlen ist ohne Bedeutung für die Gültigkeit der oben gezogenen Schlüsse und unterhalb der Fehlergrenzen. Die Genauigkeit ist ja nicht sehr groß, da die Versuchsreihe sich wegen des Manipulierens mit drei ziemlich umfangreichen und zum Teil zarten Versuchsanordnungen recht schwierig gestaltete, um so mehr als wegen der fortwährenden Variation sowohl der frischen als auch der mit Ozon beladenen Platten schnell und unter steter Rückprüfung zu arbeiten war. Erst beim vierten Ansetzen gelang es, die Versuchsreihe ohne Zeitverlust glatt durchzuführen. Einer dieser Ansätze war zwar auch ohne Zwischenfall verlaufen, aber die verwendete Platte (Cu) war in der Ermüdungsperiode nicht negativer, sondern positiver geworden, und zwar um 0,04 Volt. Die trotzdem zu Ende geführte Versuchsreihe ergab im starken Feld eine Ermüdung um 63, im schwachen um 59 Proz. Die Unabhängigkeit der letzteren vom Feld bestätigt sich also auch durch diese Versuchsreihe, andere gelegentliche Beobachtungen lieferten regelmäßig dasselbe Resultat.

Die unter α) und β) angestellten Betrachtungen und Versuche liefern den Nachweis für den oben in der Einleitung von B. bereits vorangestellten Schluß, daß die **Hauptursache** der lichtelektrischen Ermüdung **nicht** in der Ausbildung oder Änderung elektrischer Doppelschichten besteht, daß diese aber als Nebenursachen, welche schwache Ermüdungen um höchstens 20—30 Proz. veranlassen können, mitwirken werden.

Letzteres müßte in solchen Fällen, wo die Hauptermüdungsursache nur wenig kräftig ist, deutlicher hervortreten, eine Folgerung, die indes nur einseitig geprüft werden kann, da in diesen Fällen die Platten regelmäßig positiver werden. Dies geschieht in ganz reinen Gefäßen und bei frischem CuO. Die aus der Platte kommenden Elektronen passieren daher eine Schicht, in welcher sie eine Geschwindigkeitsvermehrung erhalten. Hierdurch wird ein etwas größerer Bruchteil von

ihnen in das Bereich des sie weitertragenden Hauptfeldes kommen, d. h. die lichtelektrische Empfindlichkeit sollte sich etwas vergrößern.

Dies ist nun tatsächlich der Fall, wie die folgenden Versuche beweisen. Bei denselben kamen in geschlossenen Messingzellen von der p. 471 geschilderten Art Cu-, Pt- und CuO-Platten zur Untersuchung. Die Zellen waren vor dem Versuch längere Zeit geschlossen gewesen (vgl. weiter unten p. 487). Die Cu-Platten des ersten und zweiten Versuches erhielten unmittelbar vor dem Gebrauch frische Politur, beim dritten Versuche ließ man die Platte zunächst etwas ermüden; die Pt-Platte war frisch ausgeglüht (vgl. darüber p. 491—492), die CuO-Platte direkt vor dem Versuche frisch hergestellt.

Die folgende Tab. 7 ergibt bei den drei beobachteten Körpern kleine Anstiege der Empfindlichkeit. Gleichzeitige Messungen der Kontaktpotentiale fanden nur bei CuO statt, aber auch Cu und Pt liefern beim Einbringen in Flaschen ein Ansteigen des Kontaktpotentials, wie sich immer wieder ergab, so z. B. auch in Tab. 4 und 5, indes nur um einige hundertstel Volt. Beim CuO beträgt der Anstieg zunächst volle 0,2 Volt. Da hierbei das Wachsen der lichtelektrischen Empfindlichkeit nicht größer ausfällt, wie bei den Versuchen mit Cu und Pt, so kann möglicherweise die hier gegebene Erklärung für den beobachteten Empfindlichkeitsanstieg nicht ganz ausreichen. Indes sind mir weitere Umstände, welche zur Erklärung dienen könnten, nicht begegnet.

Faßt man die Ergebnisse des vorstehenden Kapitels B. über den etwaigen Einfluß der Kontaktpotentialänderungen mit den Resultaten der früheren Arbeit und denen des Kapitels A. zusammen, so findet sich, daß sämtliche bisher für die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung gemachten Annahmen nicht zutreffen: weder die Korrosion der Oberfläche, noch das Licht oder andere von außen kommende Strahlungen, oder die Oxydation, noch auch elektrische Ursachen, sei es, daß sie in Einflüssen auf das Zwischenmedium oder in der Ausbildung oder Änderung von elektrischen Doppelschichten bestehen, liefern die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung.

Tabelle 7.[1])

Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit in Gefäßen, welche längere Zeit geschlossen waren.

Zeit in Stunden	Lichtelektrische Empfindlichkeit relativ zur Eichzelle	in Prozenten	Zeit in Stunden	Lichtelektrische Empfindlichkeit relativ zur Eichzelle	in Prozenten	
	Cu_1			Pt		
0	1,59	100	0	1,86	100	
0,03	1,67	105	0,95	1,53	113	
0,65	1,76	111	2,0	1,51	112	
17,3	1,55	98	4,0	1,45	107	
24,6	1,40	88	6,0	1,47	108	
72,5	1,19	75	13,0	1,46	108	
	Cu_2		20	1,44	107	
0	1,47	100	36	1,40	103	
1,0	1,56	106	53	1,31	97	
4,25	1,50	102	69	1,26	93	
9,92	1,37	93	111	1,12	83	
24,2	1,26	85		CuO		CuO/Mssg.
72,5	0,95	65	0	—	—	−0,687
Cu_2 mit Vorermüdung			0,15	0,885	100	—
0	1,61	156	0,2	—	—	−0,614
2,6	0,98	95	4,15	—	—	−0,435
			4,28	0,998	113	—
Platte ins Gefäß			4,4	—	—	−0,456
2,7	1,03	100	29,4	—	—	−0,314
2,75	1,07	104	29,5	0,943	107	—
4,35	1,11	108				
6,63	1,15	112				
24,1	1,12	109				
74,4	0,92	89				
168	0,71	69				

1) Die Zahlen der verschiedenen Versuchsreihen beziehen sich auf verschiedene Einheiten, sind nicht vergleichbar.

Die weitere Untersuchung verfolgte nun den Weg, zuerst der Ursache der auch in reinen (ozonfreien) Gefäßen noch vorhandenen, sehr langsamen Ermüdung nachzuforschen und dadurch vielleicht Stützen zu gewinnen für die Aufklärung der Ermüdungswirkung des Ozons, welche außerhalb von Gefäßen die Hauptrolle spielt, wie in der früheren Arbeit gezeigt wurde.

C. Ermüdung in Gefäßen.

Innerhalb eines Gefäßes ist die Ermüdung sehr stark verringert, wie früher gezeigt wurde, aber eine sehr viel langsamer verlaufende Ermüdung bleibt bestehen. Diese kann durch einen im Gefäß vorhandenen Rest des außen wirksamen Agens (Ozon) bedingt sein oder die Folge einer anderen, außen überdeckten, Ermüdungsursache bilden.

Um diese Frage aufzuklären, gelangte zunächst der Verlauf der Ermüdung in Gefäßen zu ausgedehnter Untersuchung. Als solche dienten zylindrische Glasgefäße von etwa 4 cm Durchmesser und 20 cm Länge, deren Verschlußhauben Schliffstücke bildeten. Nach Reinigung mit Sodalösung und destilliertem Wasser wurden sie durch einen Luftstrom getrocknet, welcher vor seinem Eintritt in das Gefäß eine meterlange Watteröhre durchlief. Jede Spur Gummi blieb bei den hierbei erforderlichen Verbindungen ausgeschlossen, wie es nach früherem [1]) unbedingt erforderlich ist. Cu-Platten kamen dann nach frischer Politur und Bestimmung der lichtelektrischen Empfindlichkeit bei möglichst kurzer Lüftung der Verschlußhauben in die Flaschen, welche darauf an einem ruhigen Orte störungsfrei lagerten.

Nach dem Ablauf der Ermüdungsperiode gelangten die Cu-Platten ohne Zeitverlust in der lichtelektrischen Zelle zu neuer Untersuchung. Bei der Länge der erforderlichen Ermüdungsperioden konnte man sich nicht mit einer einzigen Flasche begnügen, sondern mußte eine ganze Anzahl gleicher und jedesmal zu Anfang sowohl als auch zu Beginn eines neuen Versuches gleich behandelter Flaschen verwenden. Die zur lichtelektrischen Bestimmung dienende Eichzelle wurde von Zeit zu Zeit durch „Normalversuche", d. h. unter Ein-

1) W. Hallwachs, l. c. p. 493.

regulierung des Lichtes auf eine festgesetzte Spannung und Stromstärke auf bestimmte Lichtstärke bezogen, wobei sich zurzeit eine Genauigkeit von etwa 2—3 Proz. bei Ausführung von je drei Normalversuchen erreichen läßt. Jeder Normalversuch bestand aus fünf Einzelversuchen, deren jeder zehn Ablesungen von Strom und Spannung und eine Zeitablesung der Zelle umfaßte. Zu Beginn und am Schluß jedes Normalversuches wurde die Kohlenlänge ermittelt, um die Elektrodenspannung aus der gemessenen Spannung zwischen den Kohlenhaltern finden zu können. Außerdem fand noch eine Empfindlichkeitsbestimmung des Elektrometers statt, sowie eine Kontrolle der Uhr und dergleichen mehr.

Außer Cu kam auch Pt zur Untersuchung, welches aber ständig in einer Zelle der p. 471 beschriebenen Art verweilte. Ferner liefert die Eichzelle selbst, bei welcher eine CuO-Platte benutzt war, den Verlauf der Ermüdung bei dieser Substanz für eine über $3^1/_2$ Jahre ausgedehnte Periode. Die CuO-Zelle hatte allerdings eine aufgekittete Quarzplatte, aber durch Vergleich der Ermüdung von Cu in einem gleichen Gefäße mit der in den oben erwähnten Flaschen ergab sich, daß der verwendete Kitt (Wachs, Kolophonium, Asphalt)[1]) keine Störung veranlaßt. Auch der Umstand, daß die Eichzelle sehr häufig dem Lichte ausgesetzt war, ist nach p. 466 ohne Bedenken.

Tabelle 8.

Zeit in Wochen	Empfindlichkeit Cu	Zeit in Monaten	Empfindlichkeit		
			Cu	CuO	Pt
0	100	0	100	100	100
1	52	3	31	64	94
2	54	6	33	60	82
3	45	9	31	54	63
4	43	12	28	44	57[2])
14	31	18	—	38	—
		24	—	32	50
		30	—	33	—
		42	—	32	—

1) Asphaltzusatz zum gebräuchlichen Wachs—Kolophonium-Kitt verhindert allmähliches Abspringen von Glas, Quarz etc., selbst dann, wenn die Kittstelle mit z. B. Wasser in langer und wiederholter Berührung ist, wie z. B. beim Doppeltrogrefraktometer.

2) Dieser Wert gilt für 10,3 Monate.

Die vorstehende Tab. 8 enthält eine Zusammenstellung der Versuche. Sie gibt die lichtelektrische Stärke relativ zum Anfangswert, diesen gleich 100 gesetzt. In der ersten Kolumne stehen die Resultate mit Cu für Ermüdungsperioden bis zu 14 Wochen, in den anderen Kolumnen die Ergebnisse mit allen drei untersuchten Substanzen für monatelange Perioden.

Die Tabelle zeigt, daß Cu bereits nach einer Woche auf die Hälfte ermüdet ist, in drei Monaten auf ein knappes Drittel herabgeht und diesen Wert auf die Dauer im wesentlichen beibehält. Die kleinen Schwankungen in den einzelnen Werten sind darin begründet, daß sich letztere auf verschiedene Platten und Flaschen beziehen, daß keine Temperaturkorrektion eingeführt ist, und die Richtigkeit der Lichtstärke nur auf 2—3 Proz. garantiert werden kann. Der Verlauf der Werte bei Cu macht es wahrscheinlich, daß es sich hier nicht um die Wirkung eines Restes von Ozon handelt, dieses kann auch mit Rücksicht auf die Reinigungsart der Flaschen, den Durchgang durch ein meterlanges Watterohr, kaum noch zugegen sein und würde überdies in den Flaschen schneller zerstört, so daß eine durch dasselbe bewirkte Ermüdung viel rascher zu Ende käme, als es die Versuchsreihe zeigt. Es muß also noch eine andere Ermüdungsursache vorhanden sein.

Zur Sicherung dieses Schlusses gelangten noch einige Versuche zur Ausführung, bei welchen die gereinigten Flaschen vor dem Einlegen der Platten in einem Ofen auf 300° erhitzt wurden und die bei der darauffolgenden Abkühlung eindringende Luft durch eine, an die Flasche angeblasene, in einem anderen, dicht danebenstehenden Ofen ebenfalls auf 300° erhitzte Glasspirale hindurchstreichen mußte. Nach der Abkühlung waren zwar die Gefäße zur Einbringung der Platten noch einen Moment zu öffnen, aber durch Vermeiden jeglicher Erwärmung der Gefäße bei dieser Manipulation und durch die Betrachtung des eventuellen Einströmens mit Hilfe von Tabaksrauch an einem gleichen Gefäß, versicherte man sich, daß der Luftaustausch sehr gering blieb, wohl sicher unterhalb 2 cm^3, während das Gefäß 500 cm^3 faßte.

Das Ergebnis dieser Versuche war nun, daß nach einem,

sieben und 48 Tagen die Empfindlichkeit 69, 51 und 31 Proz. der ursprünglichen betrug. Mit Sodalösung und Luftstrom durch Watte, wie oben angegeben, gereinigte Flaschen ergaben ganz übereinstimmend nach einem und sieben Tagen 69 und 52 Proz., während der für 7 Wochen erhaltene Wert, wie aus Tab. 8 ersichtlich, ebenfalls genügend übereinstimmt.

Der obige Schluß, daß in der Flasche eine andere Ermüdungsursache wirken müsse, daß es eine ozonfreie Ermüdung gibt, ist damit gesichert. Dies weisen übereinstimmend auch die in Tab. 8 aufgeführten Versuche mit CuO und Pt nach, auf welche Ozon, wie in der früheren Arbeit nachgewiesen, nur vorübergehend Einfluß hat, sie sind ja auch Desozonisatoren.

Wenn aus den Gefäßen nicht wie in den vorhergehenden Versuchen das Ozon durch geeignete Reinigung oder Erhitzen beseitigt ist, müßte die Ermüdung stärker sein. Dies ist auch der Fall. Läßt man z. B. eines der p. 471 beschriebenen Gefäße längere Zeit verschlossen, währenddessen allenfalls ursprünglich an den Wänden und im Gefäßraum vorhandenes Ozon zerstört werden muß, und öffnet dasselbe dann, um eine frisch polierte Platte einzuschieben, nur möglichst kurz, so ist die lichtelektrische Ermüdung dieser Platte erheblich geringer, wie wenn das Gefäß längere Zeit offen auf dem Tisch gelegen hat. Ersteres war der Fall bei den Versuchsreihen der Tab. 7 mit Cu. Man vergleiche mit diesen die beiden folgenden Versuche (Tab. 9), welche mit ganz denselben Gefäßen und Platten ausgeführt wurden, nachdem erstere 10 bez. 7 Tage bei entferntem Quarzdeckel offen, mit der Öffnungsebene vertikal auf einem Tisch an einem luftruhigen Ort gelegen hatten. Die lichtelektrische Empfindlichkeit ist wieder in Prozenten ihres Anfangswertes gegeben.

Der Vergleich mit den Werten der Tab. 7 ergibt, daß sich nun eine andere Ermüdungsursache, vermutlich Ozon, überlagert, welche erstens bewirkt, daß die Empfindlichkeit sofort abnimmt, ohne erst über ein Maximum zu gehen, und daß zweitens die Ermüdung bis zu viel stärkerem Grade fortschreitet. Eine Reihe ähnlicher Versuche hatten das gleiche Ergebnis.

Tabelle 9.

Zeit in Stunden	Cu_1	Zeit in Stunden	Cu_2
0	100	0	100
1,0	98	1,2	92
2,4	91	—	—
4,1	83	5,0	81
7,0	75	—	—
24	55	24	64
3 × 24	37	3 × 24	46
6 „	30	6 „	37
12 „	25	12 „	28
19 „	21	28 „	23
40 „	16	—	—

Es ist nun die Frage zu erörtern, worin die Ursache derjenigen Ermüdung, welche sich nach Beseitigung des Ozons noch einstellt, besteht. Nachdem durch die seitherigen Versuche eine ganze Reihe möglicher Ursachen ausgeschlossen ist, bleibt dafür kaum noch etwas anderes übrig als die Gas-Ad- und Absorption der Platte. Daß diese auf die Stärke des lichtelektrischen Stromes einen ausschlaggebenden Einfluß haben muß, folgt aus der außerordentlichen Größe des Absorptionsvermögens der Gase für langsame Elektronen: aus den Zahlen des Hrn. Lenard[1]) ergibt sich für 6 Volt-Strahlen in Gasen von Atmosphärendruck ein Absorptionskoeffizient von 20000 bis 30000, welcher wegen der Kondensation im Oberflächengebiet dort zu mächtigen Werten anwachsen muß. Da ferner die Wirkung des ultravioletten Lichtes ziemlich tief in die Platten eindringt, nämlich, wie Hr. Ladenburg[2]) fand, bis zu nahezu 9×10^{-4} mm, so kommen für die Absorption der Elektronen bis in diese Tiefe eingedrungene Gasmengen in Betracht. Die nach dem frischen Polieren wieder einsetzende Gas-Ad- und Absorption wird Zeit zu ihrer vollständigen Ausbildung brauchen, insbesondere wird in die tieferen Schichten des Metalles hinein der Absorptionsprozeß nur langsam fort-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 732. 1903.

2) E. Ladenburg, Diss. p. 27. O. Leiner, Leipzig 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 577. 1903.

schreiten. Mit ihm ist allmählich wachsende Absorption der Elektronen verknüpft, der die lichtelektrische Ermüdung entspricht. Die Langsamkeit des Vorwärtsdringens vom Gas in die tieferen Schichten des Metalles wird die lange Dauer des Ermüdungsprozesses erklären.

Dieser, wie mir scheint, ziemlich einleuchtenden Betrachtungsweise stehen nun Angaben in der Literatur entgegen, die ihre Annahme bei meinen Versuchen verzögerten. So findet sich z. B. die Angabe, daß im Wasserstoff keine Ermüdung stattfinde.[1]) Wäre dies der Fall, so könnte die Gasabsorption keine Ermüdungsursache sein, denn auch der Wasserstoff hat nach Lenard für so langsame Strahlen ein sehr großes, das der Luft übersteigendes Absorptionsvermögen. Ich habe daher Cu und Pt in Wasserstoff auf ihre eventuelle Ermüdung untersucht, mit dem Ergebnis, daß beide auch in diesem Falle Ermüdung zeigen und diese sich ganz analog verhält wie diejenige in Luft, nur für Pt etwas stärker, für Cu etwas schwächer ist.

Bei den diesbezüglichen Vorversuchen hatte man die Quarzverschlußplatte, nach dem Einbringen der Cu- oder Pt-Platte in das Gefäß, aufgekittet. Um den Zweifeln zu begegnen, welche in der Richtung bestanden, daß das Aufkitten die Ermüdung beeinflussen könne, kam bei den schließlichen Versuchen eine im allgemeinen entsprechend wie die p. 471 beschriebene, gestaltete Gefäßzelle zur Anwendung. Indes bestand sie aus einem Stahlschliff mit Hg-Dichtung, ließ sich daher in zwei Teile zerlegen, und gestattete so, die Quarzplatte vor dem Einbringen der Versuchsplatte aufzukitten und kalt werden zu lassen. Der im folgenden angegebene Versuch mit Pt ist mit diesem Gefäß ausgeführt, Cu exponierte man darin nur kürzere Zeit, und da sich während derselben das nämliche ergab wie bei der auf 31 Tage ausgedehnten früheren Versuchsreihe, so ist deren Ergebnis hier aufgeführt.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch entwickelt, ging durch Röhren mit KOH, mit $CaCl_2$, P_2O_5, reduziertem Cu und schließlich durch ein in fester CO_2 liegendes $CaCl_2$-Rohr.

---

1) J. J. Thomson, Conduction of el. through gases p. 224. 1903. Art. 120. Marx' Übersetzung p. 229.

Alle Verbindungen waren durch Verschmelzen hergestellt. Die schließlich an das $CaCl_2$-Rohr angeschmolzene Glasröhre führte zu einem Hg-gedichteten Doppelhahn, der die Verbindung mit der Luftpumpe oder mit einem Rohr herstellte, an welches das in die Gefäßzelle eingekittete Zuführungsrohr angeschmolzen war. Nach mehrfacher Evakuierung und darauf folgender H-Füllung der Gefäßzelle blieb diese, um die Wände mit Wasserstoff zu sättigen, längere Zeit, etwa 2 Tage, mit H gefüllt stehen. Sodann erfolgte, nach möglichst rascher Öffnung des Gefäßes, Einführung der Versuchsplatte und Wiederschließen des Gefäßes, dreimalige Evakuierung und Wiederfüllung mit Wasserstoff, jedesmal bis auf Atmosphärendruck. Möglichst umgehend fand dann die erste lichtelektrische Beobachtung statt, etwa 1 Stunde nach dem Ausglühen[1]) bez. Polieren der Versuchsplatte.

In der folgenden Tab. 10 sind die Ergebnisse, welche nach einigen, im wesentlichen übereinstimmenden Vorversuchen erhalten wurden, angegeben, die lichtelektrische Stärke wieder in Prozenten des Anfangswertes.

Tabelle 10.

Ermüdung in Wasserstoff.

Zeit in Tagen	Cu	Zeit in Tagen	Pt
0	100	—	100
0,03	103	—	—
0,07	104	—	—
0,17	105	—	—
0,30	105	—	—
0,91	103	0,82	77
2,05	100	2,83	72
3,2	92	4,03	67
7,3	88	7,01	65
13,2	72	14,0	65
19,1	65	25,0	59
31,2	55	56,0	57

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß auch in H Ermüdung stattfindet, so daß kein Hindernis mehr im Wege steht, in

1) Vgl. weiter unten p. 491—492.

der Gefäßermüdung eine Folgewirkung der Gasabsorption zu sehen.[1])

Nachdem dies festgestellt war, suchte man nun positive Nachweise für die Wirkung von Gasabsorption zu finden. Vor dem näheren Eingehen hierauf möge noch bemerkt werden, daß die lichtelektrische Stärke des Cu und Pt in Wasserstoff sich kleiner ergab wie in Luft, und zwar für Pt etwa 30 Proz., für Cu etwa 50 Proz. Indes erfordert die Feststellung der absoluten lichtelektrischen Stärke eines Körpers in einem Gas ein sehr umfangreiches Versuchsmaterial, da sie von so vielen Umständen abhängig ist. Mit H kamen nur etwa drei vollständigere Versuche zur Ausführung, so daß die angegebenen Zahlen nur grobe Orientierungen geben. Daß die Empfindlichkeit einer reinen Platte in Luft größer ist wie in *reinem* H, stimmt mit den Versuchen des Hrn. Wulf[2]) überein, in *nicht* ganz reinem H hatte derselbe 10 mal so große Empfindlichkeit wie in Luft erhalten, wieder ein Beispiel, wie vorsichtig man in diesem Gebiet sein muß. Auch Hr. W. M. Varley fand[3]) die Empfindlichkeit in H etwas geringer wie in Luft (vgl. auch am Schluß dieser Arbeit p. 513).

Ferner möge hier noch erwähnt werden, daß, während bei Cu die Oberfläche ihre Erneuerung immer durch Hochglanzpolieren erhielt, die Pt-Platten zu diesem Zwecke ausgeglüht wurden, und zwar im Bunsenbrenner, wodurch sich, wie frühere zahlreiche Versuche gezeigt hatten, recht gute Konstanz der lichtelektrischen Stärke ergibt, welche die mit Hochglanzpolieren erreichbare übersteigt. Diese Konstanz war dahin gedeutet worden, daß Ausglühen das Ermüdungsagens

---

1) Für die Erklärung der oben erwähnten Angabe von Hrn. J. J. Thomson finden sich verschiedene Möglichkeiten, z. B. die, daß bei den ihr zugrunde liegenden Versuchen (dieselben sind leider nicht zitiert) die Ermüdung *in* einem H enthaltenden Gefäß mit der in Luft *außerhalb* eines Gefäßes, statt *in* einem solchen verglichen, und dann der Gefäßeinfluß als Wirkung des H gedeutet wurde; oder die Bemerkung bezieht sich auf verdünnten H, und das Ausbleiben der Ermüdung ist der Verdünnung, nicht dem H zuzuschreiben (vgl. Tab. 12 und Erläuterungen) u. a. m.

2) Th. Wulf, Ann. d. Phys. 9. p. 958—962. 1902.

3) W. M. Varley, Phil. Trans. London 202. p. 439. 1904.

beseitigt, ausgeglühte Platten also als lichtelektrisch rein zu betrachten sind.

Nun hat Hr. Nothdurft[1]) in einer hübschen Arbeit gelegentlich darauf hingewiesen, daß beim Ausglühen einer Pt-Platte in der Bunsenflamme Flammengase absorbiert würden, womit eine Empfindlichkeitsvermehrung verbunden sei, die mit derjenigen, welche er durch elektrolytische Wasserstoffbeladung erhielt, in Parallele gestellt wird. Um zu sehen, ob dies richtig ist, fand eine Vergleichung der Wirkung des Glühens im Bunsenbrenner und des galvanischen Glühens statt. Wie die Versuche der Tab. 11 beweisen, liefern beide Prozesse dasselbe, so daß eine bemerkbare Wirkung von etwa absorbierten Flammengasen nicht eintritt. Das Ausglühen der Pt-Bleche im Bunsenbrenner genügt also und wurde daher der Einfachheit halber bei den meisten Versuchen angewendet.

Tabelle 11.

Objekt	Entladezeit	Objekt	Entladezeit
Ermüdetes Pt_1 . . .	128 sec	Ermüdetes Pt_2 . . .	158 sec
Galvanisch geglüht . .	43	Mit Bunsenbrenner geglüht	42
Wieder geglüht . . .	44	Dies wiederholt . . .	46
„ „ . . .	48	„ „ . . .	48
Nach 1h Pause mit Bunsenbrenner geglüht .	44	Nach 1h Pause galvanisch geglüht . . .	48
Dies wiederholt . . .	43	Dies wiederholt . . .	48

Die Erhöhung der lichtelektrischen Empfindlichkeit ermüdeter Pt-Platten durch Ausglühen ist also als Beseitigung des Ermüdungsagens aufzufassen, die analoge Wirkung durch elektrolytischen Wasserstoff läßt sich zwanglos vielleicht auch darauf zurückführen, daß H das Ermüdungsagens ebenfalls wegschafft. Möglicherweise erklärt sich auch ein Teil der Resultate des Hrn. Wulf[2]) auf diesem Wege.

1) O. Nothdurft, Diss., Freiburg 1904, Univ.-Druckerei U. Hochreuther 1904, Über den Hallwachs- und Le Bon-Effekt.

2) Th. Wulf, l. c. p. 963. Die Versuche des Hrn. Wulf sind vielfach wegen des undefinierten Anfangszustandes der Platten, der mangelnden Lichtmessungen und des Gummis in der Zelle leider nicht recht deutbar.

Nach diesen Zwischenbemerkungen sollen nun die Versuche besprochen werden, welche positive Nachweise für den Einfluß der Gasabsorption auf die lichtelektrischen Erscheinungen liefern.

Wenn das aufgenommene Gas die im reinen Gefäß noch bestehende, die „Gefäßermüdung" bedingt, so sollte im Vakuum ein Teil dieses Gases weggehen und dadurch die lichtelektrische Empfindlichkeit, wenn jegliche andere Ermüdungsursache ausgeschlossen ist, vermehrt, wenn dies nicht ganz geschehen ist, wenigstens die Stärke der Ermüdung vermindert werden.

Versuche in dieser Richtung sind wegen der Schwierigkeit, sie so einzurichten, daß sekundäre Ermüdungsursachen[1]) ausgeschlossen bleiben, sehr tüftelig, um so mehr als sich im Vakuum alle etwa auf den Oberflächen der Gefäßwände und a. a. O. sitzenden Substanzen besser verbreiten, was bei der notwendigerweise viele Tage langen Dauer des Eingeschlossenseins in Gefäßen besonders ins Gewicht fällt. Ich bin deshalb an dieselben erst gegen Ende der vorliegenden Untersuchungen, nachdem vollständigere Orientierung in dieser Richtnng erreicht war, herangegangen. Als Beispiel von auftretenden Störungen möge nur erwähnt werden, daß hochglanzpolierte Cu-Platten nach mehrtägigem Verweilen in einem evakuierten Rohr, wenn dies, wie bei den anfänglichen Versuchen mit einem Hg-Manometer versehen war, regelmäßig eine weißliche Trübung zeigten, die erst nach Entfernung der Manometer wegblieb.

Nach mannigfachen Vorversuchen gelangte man zu folgender Einrichtung der Gefäße. Sie bestanden aus etwa 1 m langen, 2 cm weiten Glasröhren, an deren einem Ende ein langes, mehrfach umgebogenes und mit verschiedenen Einschnürungen versehenes Biegerohr angeschmolzen war. Das Reinigen der Rohre geschah mit Sodalösung, das Trocknen durch einen Luftstrom unter Vorlegen eines 1 m langen Watterohres, darauf wurden sie beiderseits mit Watte verstopft einige Tage liegen gelassen.

Nach Anschmelzen des Biegerohres an die Pumpe ließ man, um beim Anblasen eingedrungene Feuchtigkeit zu ver-

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 494. 1904.

treiben, von der Pumpenseite her nochmals kurze Zeit, wieder unter Vorlage des Watterohres einen Luftstrom durchsaugen. Die inzwischen präparierte, zu untersuchende Platte von 10 cm Länge und 1,5 cm Breite gelangte währenddessen in einem geschlossenen Gefäß mit Gipsfenster zur lichtelektrischen Messung. Aus dem Gefäß herausgenommen, kam dann die Platte unmittelbar in das zu evakuierende Rohr, wurde mit einem gut gereinigten langen Glasstab, von dem man nur das äußerste, nicht in das Rohr gelangende Ende anfaßte, bis an das innere Ende des Rohres vorgeschoben und letzteres dann auf der anderen Seite, 10—15 cm vom äußeren Ende entfernt, möglichst rasch zugeschmolzen. Sofort trat die Wasserluftpumpe, darauf die Hg-Luftpumpe, eine Gaedepumpe[1]), in Tätigkeit. Nach einigen Umdrehungen der letzteren war nahezu Röntgenvakuum erzeugt, eine kleine Prüfröhre an der Pumpe nur einen Moment mit Strom beschickt, damit kein Ozon später stören könnte, zeigte über $^2/_3$ ihrer Länge grüne Fluoreszenz. Sofort von der Pumpe abgeschmolzen, lagerte das Gefäß nun etwa 10—20 Tage, eine Frist, welche sich nach Vorversuchen als geeignet ergeben hatte. Nach Ablauf derselben sprengte man das Ende des weiteren Teiles des Rohres ab, ließ die Platte in das lichtelektrische Untersuchungsgefäß gleiten und machte eine lichtelektrische Bestimmung.

Ein Zwilling des Rohrgefäßes wurde bis auf das Auspumpen in allem gleich behandelt, er enthielt eine Kontrollplatte bei Volldruck (Atmosphäre).

Man arbeitete mit drei solcher Röhrenpaare. In die Röhren des ersten und die Vakuumröhre des zweiten kamen je zwei, in die zweite Volldruckröhre eine Cu-Platte; die Röhren des dritten Paares wurden mit je einer Pt-Platte beschickt.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser Beobachtungen, die lichtelektrische Stärke ist auf die der Eichzelle als Einheit bezogen.

---

1) Da ich vielleicht der erste bin, der eine Arbeit, bei welcher diese Pumpe gebraucht wurde, veröffentlicht, so möchte ich nicht unterlassen, auf das überraschend schnelle Arbeiten und das ausnehmend bequeme Operieren mit dieser Pumpe hinzuweisen. Die Lieferung ist neuerdings Hrn. Leybold-Köln übertragen.

Tabelle 12.

Körper	Anfangs-empfind-lichkeit	Druck im Gefäß	Er-müdungs-frist in Tagen	End-empfind-lichkeit	Er-müdung auf	Relative Stärke-zunahme
Cu_1	2,63	0 mm	10	1,33	51 Proz.	
Cu_2	1,94	0	10	1,06	55	46 Proz.
Cu_3	2,96	760	10	1,10	37	
Cu_4	2,89	760	10	1,00	35	
Cu_5	3,18	0	19	3,80	122	
Cu_6	2,41	0	19	3,09	129	153 „
Cu_7	1,92	760	19	0,95	49	
Pt_1	2,14	0	20	2,25	105	40 „
Pt_2	2,49	760	20	1,88	75	

Bei den Versuchen mit dem zweiten Röhrenpaar zeigt die Volldruckröhre eine Ermüdung von 49 Proz., dies entspricht dem Fall eines mit aller Sorgfalt gereinigten Gefäßes (vgl. Tab. 8). Beim ersten und dritten Paar sind die Ermüdungen im Volldruck viel größer, als für eine gleiche Frist in einem bestens gereinigten Rohr: in diesen beiden Fällen müssen sich andere Ermüdungsursachen übergelagert haben. Bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche müßten auch die Rückseiten der Platten extra gereinigt werden, was leider versäumt wurde, auch wäre für die Rohrreinigung Erhitzung zu Hilfe zu nehmen.

Trotz dieser Unvollkommenheiten tritt aus den Versuchen der Tabelle ein kräftiger, Ermüdung vermindernder Einfluß des Evakuierens hervor. Die Zunahme des lichtelektrischen Verhältnisses Vakuum- zu Volldruckplatte beträgt auch beim Platin noch volle 40 Proz. und erreicht beim zweiten Rohrpaar, welches für die Volldruckplatte störungsfreie Ermüdung aufweist, 153 Proz. Dabei ist die Empfindlichkeit der Vakuumplatte, auch absolut genommen, gestiegen, ebenso wie diejenige der Platinvakuumplatte. Die oben aus der Annahme, daß Gasabsorption die Ursache der geringen „Gefäßermüdung“ ist, gezogene Konsequenz, im Vakuum müsse die Ermüdung geringer

sein und eventuell, bei genügender Reinheit, ihr Vorzeichen wechseln, findet also durch diese Versuche volle Bestätigung.[1])

Eine weitere Konsequenz des Einflusses der Gasabsorption wäre die, daß eine längere Zeit auf tiefer Temperatur gehaltene, dann wieder rasch auf Zimmertemperatur erwärmte Platte, eine Empfindlichkeitsabnahme zeigen sollte, denn die bei der tieferen Temperatur vermehrte Gasabsorption würde Zeit brauchen, um wieder vollständig rückgängig zu werden.

Ein Versuch in dieser Richtung wurde mit fester CO_2 ausgeführt. Dabei kamen wieder, um den Einfluß der tiefen Temperatur möglichst von anderen Einflüssen befreit zu erhalten, zwei gleiche Apparate zur Anwendung, welche bis auf den Unterschied, daß die Hauptgefäße des einen in fester CO_2, des anderen in Zimmertemperatur verweilten, alle Manipulationen in gleicher Weise durchliefen. Die Apparate hatten folgende Zusammenstellung. An ein Rohrgefäß mit aufgeschliffener Haube war ein $CaCl_2$- und KOH-Rohr angeschmolzen, letzteres führte andererseits zu einer mit konzentrierter KOH-Lösung gefüllten, durch Kork und Paraffin geschlossenen Flasche. An eine zweite an das Gefäß geschmolzene, mit einem Hahn versehene Röhre ließ sich die Wasserluftpumpe anschließen. Das Gefäß des einen Apparates, welches ein Thermometer enthielt, sowie dessen $CaCl_2$- und KOH-Röhre befanden sich in fester CO_2. Zwei Tage vor dem Versuch wurde durch jeden Apparat $^5/_4$ Stunden lang filtrierte Luft durchgesaugt und derselbe dann geschlossen. Nach Bestimmung der lichtelektrischen Stärke führte man die Platten in die Gefäße ein und ließ sie darin, nachdem zunächst $^1/_4$ Stunde Luft durchgesaugt war, etwa 3,5 Stunden, das eine bei $-80°$, das andere bei Zimmertemperatur, verweilen. Sodann kam das kalte Gefäß in ein Wasserbad von 30°; nach 5—10 Minuten erreichte, wie das Thermometer angab, die eingeschlossene Platte Zimmertemperatur. Bei der unmittelbar darauf folgenden lichtelektrischen Untersuchung lieferte die „kalte" Platte eine Ermüdung auf 63 Proz., während die in Zimmertemperatur verbliebene auf 87 Proz. gegangen war; letzteres zeigt, daß nach den Versuchen der Tab. 4 der früheren Arbeit[2]) zu urteilen, Neben-

1) Über eine weitere Bestätigung vgl. die Anm. p. 516.

2) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 494. 1904.

einflüsse genügend eliminiert blieben. Die Ermüdung der kalt gewesenen Platte ergibt sich wesentlich größer, so daß auch dieser Versuch die Wirkung der Gasabsorption bestätigt.

Denselben Versuch mit flüssiger Luft zu wiederholen gelang nicht, die Platte erhielt während der Erwärmungsperiode jedesmal einen weißlichen Beschlag, welcher vermutlich durch einen von der außen erwärmten Gefäßwand nach der kalten Platte hinüber destillierenden Körper veranlaßt wurde. Die Platte des kalten Gefäßes zeigte sich zwar nach der schließlichen Erwärmung etwas stärker ermüdet wie die Vergleichsplatte, indes nicht soviel wie bei dem Versuche mit -80^0. Dies Verhalten würde sich wohl erklären, wenn der Beschlag aus CO_2 bestanden hätte, da in CO_2 die lichtelektrische Wirkung stärker ist wie in Luft[1]) und die unmittelbar anliegende Gasschicht den Haupteinfluß auf die Stärke der lichtelektrischen Wirkung haben muß.

Eine weitere Bestätigung für den Einfluß der Gasabsorption wurde durch die Bestimmung der auch zu anderen Zwecken erforderlichen Temperaturkoeffizienten der Eichzellen erhalten. Temperaturkoeffizienten ließen sich nur mit durch Alterung im Gefäß genügend konstant gewordenen Platten ausführen, weil sonst die durch gewöhnliche Ermüdung eintretende Empfindlichkeitsänderung diejenige, welche lediglich eine Folge der Temperaturerhöhung war, überdeckt hätte. Dazu standen die Tab. 8 benutzten Eichzellen mit Pt und CuO zu Gebote, Messinggefäße von der p. 471 beschriebenen Art. Die Platten brauchten, wenn man sich auf kleine Temperaturintervalle beschränkte, aus den Zellen, in denen sie sich seit nahezu einem bez. 2,5 Jahren befanden, nicht herausgenommen zu werden.

Die Zelle mit Pt ergab bei 19^0 eine lichtelektrische Stärke 1,00, nach 9stündigem Verweilen in einem Luftbade von etwa 32^0 war dieselbe 4 Min. nach dem Herausnehmen auf 1,11 heraufgegangen und nahm nun, während die Zelle in Zimmertemperatur verblieb, wieder ab: nach einer halben Stunde hatte

1) A. Stoletow, Compt. rend. **107.** p. 91. 1888; W. M. Varley, Phil. Trans. London **202.** p. 439. 1904.

sie den Wert 1,05 und nach 17 Stunden den Wert 1,01 erreicht. Eine Vorrichtung, um die Temperatur der Platte zu messen, war nicht vorhanden. Um diese einzuführen, hätte man die Zelle öffnen müssen, und gerade dies mußte in erster Linie vermieden werden. Man begnügte sich daher mit der angenäherten Kenntnis der Temperatur. Bei diesen, den weiter folgenden und anderen gelegentlichen Versuchen ähnlicher Art schien die lichtelektrische Stärke hinter der momentanen Temperatur zurückzubleiben und einen konstanten Wert erst dann zu erreichen, wenn die betreffende Temperatur längere Zeit bestanden hatte.

Die Zelle wurde in einem weiteren Versuche 5 Stunden auf 45° gehalten. 2 Min. nach dem Herausbringen aus dem Bad lieferte sie lichtelektrisch 1,29, nach 10 Min. 1,14, nach 20 Min. 1,06 und nach 23 Stunden 1,03, alles bei Zimmertemperatur.

Nunmehr kam die Zelle über Nacht in eine Temperatur von etwa 3° und lieferte dann 2 Min. nach dem Herausnehmen 0,96, nach 20 Min. 0,98.

Man sieht, daß die Zelle schließlich immer wieder sehr nahezu auf ihren Anfangswert zurückkommt. Aus den Zahlen läßt sich ein Temperaturkoeffizient von etwa $^1/_2$ Proz. für den Grad herleiten.

Die CuO-Zelle, welche anfänglich eine Empfindlichkeit 0,588 hatte, ergab, nach 4 Stunden Verweilen in 34°, 3 Min. nach dem Herausnehmen 0,665, nach 5 Min. denselben Wert, gleich darauf berührt schien sie, nach dem Gefühl zu urteilen, Zimmertemperatur erreicht zu haben; nach $^1/_2$ Stunde erhielt man 0,622, am Tage darauf 0,594, alles bei einer Temperatur von etwa 21°. Der Temperaturkoeffizient, für den es sich nur um eine Orientierung handelte, beträgt etwa 0,9 Proz.

Man sieht aus den vorstehenden Versuchen, daß die Gasaufnahme auch das Verhalten gegenüber der Temperatur erklärt, indem sie eine Zunahme der Empfindlichkeit mit steigender Temperatur fordert, welche der Versuch auch liefert.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammenfassend und mit dem früher Gefundenen vereinigend, wird man sagen können, daß sich die lichtelektrische Ermüdung in reinen Gefäßen gut auf die Gasabsorption der Platten zurückführen läßt. Auch die hieraus gezogenen Konsequenzen sind mit den Tatsachen durchaus im Einklang, während alle früheren Erklärungsversuche diesen widerstreiten. Daß aus unseren gesamten Kenntnissen über die lichtelektrischen Erscheinungen ein Einfluß der ab- und adsorbierten Gase gefolgert werden muß, sichert diese Auffassung.

Politur der Platten.

Das Vorstehende erklärt nun auch, warum es so schwer ist, die Platten derart zu polieren, daß sie konstante Empfindlichkeit bekommen. Im Laufe der Untersuchungen ergab sich, daß die Empfindlichkeit sehr stark davon abhängt, wie warm die Platte während des Polierens geworden ist, daß die höchsten Empfindlichkeiten dann erreicht wurden, wenn die Platten sich ordentlich erwärmt hatten. Die Temperaturerhöhung bewirkt offenbar Entfernung eines weiteren Teiles des eingedrungenen Gases und damit eine Empfindlichkeitsvermehrung. Achtete man auf diesen Umstand, so war die Anfangsempfindlichkeit bei verschiedenen Platten viel konstanter. Daß das Pt durch einfaches Erhitzen ebenfalls auf maximale und recht konstante Empfindlichkeit kommt, erklärt sich auch auf diesem Wege einfach.

D. Über die Wirkungsweise des Ozons bei der lichtelektrischen Ermüdung.

Nachdem im vorigen die verhältnismäßig geringe Ermüdung in speziell gereinigten Gefäßen auf eine Wirkung der von dem Metalle aufgenommenen Gase und in der früheren Arbeit[1]) die starke Ermüdung im freien Raum auf Ozon zurückgeführt worden ist, bleibt jetzt noch die Aufgabe übrig, zu ermitteln, wie die Wirkung des Ozons zustande kommt, und welcher Zusammenhang zwischen der Ermüdung außer- und innerhalb von Gefäßen besteht.

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 489. 1904.

Für den Ursprung der Wirkung des Ozons können, wenn man zunächst von den seitherigen Ergebnissen dieser Untersuchung absieht, folgende drei Möglichkeiten in Betracht gezogen werden: chemische Wirkung (z. B. Oxydation), d. h. Verwandlung der Plattensubstanz in eine lichtelektrisch unempfindlichere; elektrische Wirkung, d. h. Bildung bez. Variation einer kontaktelektrischen Doppelschicht mit der negativen Seite nach außen; direkter Einfluß auf die Bewegung der Elektrizitätsträger. Die Entscheidung wurde herbeizuführen erstrebt durch Versuche über die Empfindlichkeitsabnahme in den ersten Augenblicken nach dem Einbringen der Platten in Ozon.

Für dieselben diente folgende Anordnung. Zwei $25 \times 20 \times 15$ cm Zn-Gefäße standen vor der Bogenlampe, 1 m davon entfernt, das Licht drang durch vorn aufgekittete Quarzplatten. In der oberen Fläche der Gefäße befindliche größere Öffnungen ließen sich durch schwere eiserne Deckel, die in eine Hg-Rinne tauchten, dicht verschließen. Durch diese Öffnungen konnte man lichtelektrische Zellen sehr rasch einführen, an zwei isolierten stärkeren Querdrähten festhängen und dann die Gefäße wieder verschließen, eine Manipulation, die etwa 3 Sek. beanspruchte. Der eine der genannten Querdrähte stand mit der in der Zelle sitzenden Untersuchungsplatte, außerdem mit dem Elektrometer in Verbindung, der andere mit dem Drahtnetz der Zelle und der Batterie von $+280$ Volt. Die Zelle selbst bestand aus einem in den einen Querdraht einzuhängenden Metallträger, auf welchem sich die Untersuchungsplatten einfach einspannen ließen, und aus einem durch zwei Schellacksäulchen in etwa 6 mm Abstand vor der Platte gehaltenen Drahtnetz, von welchem ein federnder Draht mit Haken zu dem anderen, mit der Batterie verknüpften, sonst isolierten, Querdraht führte. Alle Zuleitungen waren metallisch eingehüllt, ein am Elektrometer sitzender Schlüssel gestattete dieses, samt Zuleitungen zur Zelle und Platte darin, bis zum Versuchsbeginn zu erden und dann zu isolieren. Vom Öffnen des Gefäßes bis zu der nach Einhängen der Zelle stattfindenden Öffnung des Erdschlüssels und damit des Versuchsbeginns vergingen im allgemeinen nicht ganz 6 Sek.

Zwei an dem einen Zinkkasten sitzende Rohrstutzen er-

laubten einen Ozonstrom durchzuleiten, wobei die Wasserluftpumpe das in einer Ozonröhre erzeugte Gas ansaugte. Vor den einzelnen Versuchen wurde die Pumpe abgestellt. Der Ozongehalt im Gefäß war meistens von der Größenordnung von 0,2 g im m^3 ($^1/_{100}$ Volumprozent), wie sich aus gelegentlichen Titrierungen ergab.

Der Versuch verlief so, daß nach Einspannung der Platte die Zelle zuerst im Luftkasten, sodann, nach Umsetzung in den Ozonkasten, dort auf ihre Empfindlichkeit, immer unter Mitbeobachtung der Eichzelle, untersucht wurde. Die beiden Kästen waren miteinander verglichen. Im Ozon las man die Durchgangszeiten des Elektrometers durch die einzelnen Skalenteile ab. Daß letztere für den vorliegenden Zweck genügend gleichwertig waren, ergab sich aus besonderen Versuchen, welche für die ersten sechs Skalenteile, als Mittel aus sechs Ablesungen, Durchlaufzeiten von 5,9; 6,0; 6,0; 6,35; 6,1; 6,0 Sek. lieferten.

Die folgende Tabelle gibt ein Versuchsbeispiel. Die angegebenen Zeiten bedeuten die Zeiten bis zum Durchschreiten der angegebenen Skalenteile, bei der Eichzelle die Zeit für die Zurücklegung von 39 Skt. eines zweiten Elektroskops.

Tabelle 13.

Cu in Luft.

Skalenteile	5	10	20	*E*
Sekunden	5,1	10,7	21,4	69,9
	5,0	—	20,4	
	5,3	10,8	21,8	

Cu in Ozon.

$t = 0$ beim Versuchsanfang, d. h. 6 Sek. nach Beginn des Umsetzens (Öffnung des Deckels der Ozonzelle).

Skalenteile	1	2	3	4	5	10	15	20	*E*
Sekunden	2,2	5,0	8,0	10,8	14,0	28,7	44,0	60,4	69,8

Nachdem diese Platte im ganzen etwa 1,5 Min. im Ozonkasten verweilt hatte, wurde sie wieder in den Luftkasten umgesetzt und dort ergaben sich zu den Zeiten t (Minuten) nach dem Einhängen folgende Zeiten.

Tabelle 14.

t (Minuten)	5p	10p	15p	20p	E
	Sekunden				
0	8,8	17,9	27,0	36,0	69,7
0,7	7,8	16,2	24,8	33,8	
3,5	7,5	15,5	23,8	31,8	69,6
9,5	6,7	13,9	20,8	27,8	70,0
10	6,8	13,8	20,9	28,2	
20	6,3	13,0	19,6	26,7	70,0
20,5	6,4	13,2	20,0	26,8	
30	6,5	13,1	19,5	26,2	68,3
30,5	6,4	12,3	18,3	25,0	
40	5,9	12,2	18,6	24,9	69,0
40,5	6,2	12,5	19,0	25,3	

Von dem zugestrahlten, ultravioletten Licht wird in der Ozonzelle durch das Ozon selbst, wie ein Hilfsversuch zeigte, etwa 4 Proz. absorbiert, so daß alle folgenden Angaben der direkt als Zeitenverhältnis angegebenen Ermüdungen um 4 Proz. wegen Verminderung der bis zur Platte gelangenden Lichtstärke zu korrigieren sind.

Man sieht aus den Tabellen, daß das Ozon einen außerordentlich starken Einfluß besitzt, daß die Cu-Platte 7 Sek. nach dem Einbringen bereits 51 Proz. ihrer Empfindlichkeit eingebüßt hat, nach 15 Sek. 60 Proz., welche Ermüdung dann bis zu 60 Sek. nur auf 64 Proz. wächst. Bei diesen Versuchen war der Ozongehalt nicht bestimmt worden; bei dem gemessenen Ozongehalt 0,2 g im m^3 (0,01 Volumproz.) fand sich für 7 Sek. eine Abnahme der Empfindlichkeit um 71 Proz., nach 25 Sek. um 74 Proz., nach 85 Sek. um 77 Proz. Hier wird in 7 Sek. erreicht, was in ozonfreier Luft $^1/_4$ bis 1 Jahr braucht (Tab. 8); daß das Ozon, obwohl es nur spurweise in der Atmosphäre vorkommt, die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung bildet, scheint nicht mehr verwunderlich. Weiter ersieht man aus Tab. 14, daß der größte Teil der Ermüdung allmählich wieder weggeht, wenn man die Platte in

Luft bringt; die Cu-Platte erholt sich in 4 Min. bis auf 86 Proz. ihres Anfangswertes.[1])

Die Schnelligkeit, mit welcher die Ozonwirkung einsetzt, und ihr allmähliches Wiedererlöschen nach dem Herausbringen der Cu-Platte aus dem Ozon würde die Annahme, daß Oxydation der Oberfläche, ein Prozeß, der doch nicht so schnell wirken und nicht ohne weiteres rückgängig werden kann, die Ermüdung veranlasse, widerlegen, wenn diese nicht schon durch den früheren Nachweis, daß die Kupferoxyde etwa dieselbe lichtelektrische Empfindlichkeit wie Cu besitzen, ausgeschaltet wäre. Der jetzige Nachweis beseitigt indes die Zweifel, die man noch im hier vorliegenden Fall, wo die Platten direkt in Ozon eingehängt werden, hegen könnte, und stärkt so die frühere Beweisführung.

Zur Prüfung der zweiten der oben genannten Möglichkeiten, Bildung einer elektrischen Doppelschicht, wurden verschiedene Metalle: Cu, Pt, Ag, Zn, Fe auf ihre Ermüdung im ersten Augenblicke nach dem Einbringen ins Ozon verglichen. Um die allmähliche Abnahme des Ozongehaltes zu eliminieren, schlossen im allgemeinen zwei Bestimmungen der Ermüdung des Cu diejenigen eines anderen Metalles ein. In der nachstehenden Tab. 15 sind die Ergebnisse zusammengestellt. Die Zahlen geben die Empfindlichkeitsabnahme in Prozenten des Anfangswertes in Luft, „Wirkungszeit" ist die Dauer des Aufenthaltes im Ozon. Die Einzelheiten der Beobachtungen, aus welchen die folgenden Daten berechnet sind, entsprechen dem Tab. 13 aufgeführten Beispiel.

Die Ozongehalte sind bei den drei Versuchssätzen nicht ganz die nämlichen, so daß nur die Versuche desselben Satzes miteinander verglichen werden können. Bei dem letzten (Versuch für Ag) mißglückte der eine Versuch mit Cu, was aber insofern nichts zu sagen hat, als bei diesem Satz durch Absorptionsbeobachtung des die Zelle durchstreichenden Lichtes vor und nach den Versuchen die fast vollständige Konstanz des Ozongehaltes festgestellt wurde.

1) Eine solche weitgehende Erholung trat jedoch nur nach besonders kurzem Aufenthalt im Ozon ein. Bei längerer Einwirkung (z. B. 5 Min.) blieb die Cu Platte dauernd stark ermüdet (z. B. auf $^1/_3$), CuO erholt sich auch dann, wie schon in der früheren Arbeit gezeigt.

Tabelle 15.

Abnahme der lichtelektrischen Stärke im Ozon.

Substanz	Wirkungszeit		
	60 Sek.	30 Sek.	10 Sek.
	Empfindlichkeitsabnahme in Prozenten		
Cu_1	79,9	78,3	78,1
Pt_1	76,8 → 77,8	74,7 → 76,3	74,9 → 74,9
Cu_2	75,6 → 76,2	74,3 → 74,3	71,7 → 73,4
Pt_2	75,7	73,9	71,8
	36 Sek.	18 Sek.	9 Sek.
Cu_1	66,1	64,7	63,2
Zn	62,1 → 64,5	62,3 → 63,0	61,5 → 61,4
Cu_2	62,9	61,4	59,5
	70 Sek.	46 Sek.	16 Sek.
Ag	77,8	75,1	70,8
Cu	75,8	75,1	72,4

Aus Tab. 15 folgt für alle Metalle sehr starke lichtelektrische Empfindlichkeitsabnahme und diese hat unter der hier stattfindenden Voraussetzung kurzer Einwirkung des Ozons für Pt, Zn, Cu und Ag innerhalb der Versuchsfehler denselben Wert. Aus dieser Unabhängigkeit von der Substanz der Platte folgt, insbesondere wegen der großen elektromotorischen Verschiedenheit von Zn einerseits und den übrigen Metallen andererseits, daß die durch das Ozon bewirkte Ermüdung nicht kontakt-elektrischen Ursprunges ist. Damit bleibt von den oben erwähnten Erklärungsmöglichkeiten nur die übrig, daß die starke Wirkung des Ozons auf einem direkten Einfluß desselben auf die Elektrizitätsträger beruht. Auf die weitere Erörterung, in was dieser Einfluß bestehen möchte, wird weiter unten eingegangen werden (p. 510ff.).

Das untersuchte Fe verhielt sich etwas anders, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle 16.

Substanz	Wirkungszeit		
	80 Sek.	50 Sek.	25 Sek.
	Empfindlichkeitsabnahme in Prozenten		
Cu_1	61,5	60,3	57,7
Fe	78,0 > 61,0	74,7 > 59,6	68,3 > 56,8
Cu_2	60,5	58,9	55,9
	66 Sek.	46 Sek.	22 Sek.
Cu_1	75,8	75,1	72,4
Fe	83,7 > 72,2	81,9 > 71,2	75,6 > 67,5
Cu_2	68,6	67,2	62,6

Das Fe zeigt erheblich größere Schwächung wie das Cu. Indes haben die Werte für Eisen einen stärkeren und mit Abnahme der Wirkungszeit beträchtlich steigenden Gang, sie konvergieren also für die Zeit Null gegen die des Cu und werden dann nur noch wenig von ihnen entfernt sein; es ist leicht möglich, daß sie schließlich ganz mit ihnen zusammenfallen würden. Der stärkere Gang in der Schwächung des Eisens weist darauf hin, daß sich ein weiterer, die Empfindlichkeit vermindernder Prozeß hier überlagert. Es liegt nahe, denselben darin zu vermuten, daß ein Oxyd gebildet wird, und dies lichtelektrisch weniger empfindlich wie Eisen ist. Die relative Stärkeverschiedenheit der beiden Cu-Werte im zweiten Beobachtungssatz der Tabelle beruht darauf, daß dieser zeitlich genommen einer der ersten Beobachtungssätze war, bei dem noch etwas lange Zeit zwischen den einzelnen Beobachtungen verstrich.

Da es sehr mühsam ist, und vieler Versuche bedarf, wenn man die einzelnen Platten zu Anfang auf konstante und maximale Empfindlichkeit durch die Politur bringen will, verzichtete man hierauf, nachdem ein Hilfsversuch mit sehr stark vorermüdeten Cu-Platten die Gewißheit ergeben hatte, daß die bei den Platten der Hauptversuche noch bleibenden Verschiedenheiten der Anfangsempfindlichkeit keinen hier in Betracht kommenden Einfluß auf die Schwächungen ausüben konnten. Die folgende Tab. 17 enthält das Resultat dieses

Kontrollversuches, bei welchem die Cu-Platten bis hinab auf etwa $^1/_8$ ihrer maximalen Empfindlichkeit vorermüdet waren, die Pt-Platte dagegen, wie bei den Versuchen der Tab. 15, frisch ausgeglüht wurde.

Tabelle 17.

Substanz	Wirkungszeit	
	66 Sek.	32 Sek.
	Ermüdung in Prozenten	
Cu_1	62	59,8
Pt	75,1 > 60,4	71,1 > 57,2
Cu_2	58,8	54,6

Die Werte für Cu bleiben, obwohl dieses so sehr stark, auf $^1/_8$ seines Maximalwertes, vorermüdet ist, nur ca. 20 Proz hinter denen des Pt zurück. Wenn also die für Tab. 15 benutzten Platten auch selbst bis auf die Hälfte vorermüdet waren, konnte dies die Resultate nicht erheblich beeinflussen.

In der früheren Arbeit war der Schluß, daß der Hauptbetrag der lichtelektrischen Ermüdung im freien Raum einer Wirkung des Ozons zuzuschreiben sei, darauf gegründet, daß die große Verschiedenheit, welche Cu und CuO hinsichtlich der lichtelektrischen Ermüdung zeigen, von keiner der bekannten, in der Atmosphäre enthaltenen Substanzen veranlaßt wird außer vom Ozon. CuO ermüdet im Ozon nicht dauernd, Cu mit großer Stärke, alle untersuchten Substanzen, welche Ermüdung veranlassen, wirken auf beide wesentlich gleich. Diesem Schluß konnte man das Bedenken entgegensetzen, daß in der Luft doch nur sehr geringe Ozonmengen vorhanden seien, so daß das Ozon eine ganz außerordentliche Wirkung auf die lichtelektrische Entladung haben müsse, wenn solch kleine Mengen die ziemlich kräftigen Ermüdungen erklären sollten. Diese Bedenken werden durch die vorliegenden Versuche gehoben. Bei einem Ozongehalt von nur 0,2 g im m^3, dessen Bestimmung weiter unten erläutert wird, oder 0,01 Volumprozent, hatte, wie oben angegeben, die Empfindlichkeit bereits nach 7 Sek. um 71 Proz. abgenommen. Es genügen also äußerst geringe Mengen Ozon zu kräftiger Ermüdung. Im Freien hatte man

in der früheren Arbeit etwa in 1,5 Stunden eine Ermüdung auf die Hälfte bekommen[1]), zur Ermüdung um 70 Proz. waren etwa 2—3 Stunden erforderlich, also etwa 1300 mal so lang als im Ozon von 0,01 Volumprozent. Man wird daher einen Ozongehalt der Luft von höchstens $^1/_{130000}$ Volumprozent für ausreichend erachten müssen, um die beobachtete Ermüdung der Größenordnung nach zu erklären, eventuell genügt wegen der Bewegung der Luft im Freien weniger.

Was die Ozontitrierung betrifft, so wurde eine mit der Gasuhr gemessene Menge des Gases, nachdem sie vorher den bei den Versuchen benutzten Zinkkasten durchlaufen hatte, durch zwei hintereinander geschaltete Flaschen mit gemessenen Mengen 0,1 norm. KJ-Lösung gesaugt, und gemessene Proben davon nach Zusatz äquivalenter Mengen H_2SO_4 und etwas Stärkekleister mit 0,01 norm. Natriumthiosulfat titriert. 1 cm^3 letzterer Lösung entspricht 0,24 mg Ozon.

Diese Einschaltung der KJ-Flaschen erfolgte erst, nachdem etwa eine Stunde lang der Ozonstrom im Gang gewesen war. Während des Ozondurchganges fanden nun gleichzeitig Messungen der Absorption des ultravioletten Lichtes durch das Ozon statt. Zu diesem Zweck erhielt der Zinkkasten ein zweites Quarzfenster, welches, dem in der Vorderwand gegenüber, in der Rückwand saß. Dahinter wurde eine lichtelektrische Zelle aufgestellt und, aus dem Vergleich von deren Empfindlichkeit bei Luft und Ozonfüllung des Kastens, die durch das Ozon hervorgebrachte Absorption des lichtelektrisch wirksamen Lichtes bestimmt. Es ergab sich, daß einem Gehalt von 0,62 g Ozon im m^3 oder $3{,}2 \times 10^{-3}$ Volumprozent eine Lichtabsorption von 25 Proz. entsprach. Die durchstrahlte Ozonstrecke betrug 15,4 cm, hieraus ergibt sich für reines Ozon ein Schwächungskoeffizient $\alpha = 65$, welcher Wert mit dem von Hrn. E. Meyer[2]) gefundenen im Einklang ist, soweit ein Vergleich wegen des zusammengesetzten Lichtes gezogen werden kann.

Auf Grund der angegebenen Daten wurde der Ozongehalt in anderen Fällen aus der Lichtabsorption bestimmt, z. B. in

1) l. c. p. 489.
2) E. Meyer, Ann. d. Phys. 12. p. 855. 1903.

dem oben p. 506 (unten) angegebenen Fall aus der gefundenen Lichtabsorption von 8,4 Proz. der Ozongehalt von 0,2 g im m^3.

Auch über den Ozongehalt der freien Luft habe ich wenigstens eine Orientierung zu erlangen gesucht. Damit dabei nicht vor dem Eintritt in die KJ-Lösung an Rohrwänden Entozonisierung eintritt, wurde ein etwa 1,5 cm weites, langes Glasrohr in eine kleine Kristallisationsschale mit KJ-Lösung gestülpt und von oben angesaugt. Das Rohr tauchte dabei so in die Lösung ein, daß deren Niveau nach Einsaugung von etwa $^2/_3$ der Flüssigkeit bis zur unteren Rohrmündung sank, und nun die Luft durch die ins Rohr gesaugte Flüssigkeit hindurchperlte. Nach dem Durchleiten von 5 m^3 Luft waren zur Titrierung 4,6 cm^3 der Natriumthiosulfatlösung erforderlich, was 0,2 mg im m^3 ergibt. Dies ist etwa der tausendste Teil der p. 506 angegebenen Ozonkonzentration im Zinkkasten. Es würde also dieser Ozongehalt mit demjenigen, welchen man oben als völlig ausreichend zur Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung berechnete, im Einklang sein.

Indessen verlief die Ozontitrierung der Luft insofern nicht glatt, als sich starke Nachbläuung zeigte, welche nach zwei Tagen bereits weitere 1,8 cm^3 Titrierlösung, d. h. 40 Proz. der ursprünglichen Menge erforderte. Über eine für den vorliegenden Zweck brauchbare, ordentliche Methode, den Ozongehalt der Luft zu bestimmen, konnte ich bisher nichts finden und es scheint mir fast, als ob eine solche nicht vorhanden sei. Zimmerluft gab auf gleiche Weise untersucht nur 60 Proz. des für das Freie ermittelten Ozongehaltes. Auch dies ist mit den früheren Versuchen im Einklang, zumal die stärkere Luftbewegung im Freien die Ozonabsorption steigern muß, aber diese Feststellungen sind aus dem angegebenen Grunde nur sehr oberflächlicher Art. Da die Nachbläuung auf das Vorhandensein von Stickstoffoxyden hinweist, und bei meinen Versuchen mit Ozon die Bildung von solchen nicht besonders eliminiert werden konnte, bleibt es immerhin möglich, daß diese die dem Ozon zugeschriebenen Wirkungen mit veranlassen.

Zum Schluß fragt es sich noch, ob sich etwas darüber ermitteln läßt, welcher Art die direkte Einwirkung des Ozons auf die Elektrizitätsträger ist.

Einen schematisierten Ansatz für die Vorgänge in der Nähe der Platte hat Hr. J. J. Thomson gegeben[1]), nämlich

$$i = \frac{eJ}{1 + D/\lambda X u},$$

wo i die lichtelektrische Stromstärke, J die Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionen, X die Feldstärke, D, u, e den Diffusionskoeffizienten, die spezifische Geschwindigkeit und die Ladung der Ionen, λ die Länge der Strecke bedeutet, auf welcher sich Hr. Thomson die Dichtigkeit der Elektrizität von der Platte aus gerechnet ansteigend denkt. D/u ist für alle im gewöhnlichen Gaszustand befindlichen Gase bei gleichem Druck gleich.

Die angegebene Formel hat zur Folge, daß i_1/i_2, das Verhältnis der Stromstärken für zwei Felder X_1 und X_2, variieren muß, wenn man das Gas ändert, falls nicht etwa auch λ unabhängig vom Gas wäre. Letzteres darf man zunächst nicht annehmen, da sonst i unabhängig vom Gas sein müßte, was wenigstens für Luft, CO_2 und H als sicher unzutreffend erwiesen ist.[2]) Auch andere Ansätze, die ich für den Verlauf in unmittelbarer Nähe der Platte versucht habe, ergeben, wie sich bei der Komplikation der Verhältnisse ja vermuten läßt, die Abhängigkeit der Stromstärke von der Feldstärke einerseits und den Eigenschaften der Elektrizitätsträger andererseits nicht in solcher Form, daß i_1/i_2 für verschiedene Gase denselben Wert haben könnte.

Um zu sehen, ob demgemäß i_1/i_2 für Luft und ozonisierte Luft verschiedene Werte hat, wurde die lichtelektrische Empfindlichkeit in diesen Gasen für zwei Felder ($X_1 = 498$ und $X_2 = 5{,}13$ Volt/cm) bestimmt. Dazu diente im wesentlichen die p. 500 beschriebene Anordnung. Die bestrahlte Platte war aus Kupfer, ihr Abstand vom Netz der Zelle betrug 0,55 cm. Wechselweises Beobachten im starken und schwachen Feld gestattete das Absinken der Empfindlichkeit während der Versuchsreihe, gleichzeitiges Beobachten der Etalonzelle, die kleinen Lichtschwankungen zu eliminieren. Bei X_1 lagen 280 Volt am

1) J. J. Thomson, Cond. of el. p. 228. 1903. Übers. von E. Marx, p. 234. 1906.

2) W. M. Varley, l. c. p. 484. Tab. IV.

Netz, die beobachtete Zeit t_1 entspricht 20 Skt. (11,8 Volt) Elektroskopgang; bei X_2 hatte das Netz 4 Volt, t_2 bezieht sich auf 4 Skt. oder 2,35 Volt, so daß die Spannungsdifferenz Netz–Platte während des Versuches auf 1,65 Volt herabsank und im Mittel den Wert 2,82 Volt besaß. Die am Etalon, wie gewöhnlich für 31 Skt. Elektrometergang beobachtete Dauer ist in der folgenden Tab. 18, welche die Resultate der hier besprochenen Versuche enthält, mit t_0 bezeichnet.

Die lichtelektrischen Empfindlichkeiten i_1 und i_2 ergeben sich als reziproke Verhältnisse von t_1 und t_2 zu t_0 nach Reduktion auf gleiche Potentialänderung. Die Tabelle enthält nur die Verhältnisse i_1 zu i_2; die Folge der Vertikalspalten schließt sich der zeitlichen Versuchsfolge an. Der Ozongehalt betrug etwa 0,06 Volumprozent.

Tabelle 18.

	Luft				Ozonisierte Luft					
t_0	70,1	71,0	70,9	71,0	69,0	71,4	71,5	70,3	70,0	72,2
t_1	20,4	—	20,8	—	75,7	—	99,0	—	115,0	—
t_2	—	54,0	—	57,0	—	225	—	282	—	320
i_1/i_2	—	**13,0**	**13,3**	—	—	**13,1**	**12,9**	**13,3**	**12,9**	—
	Mittel: $i_1/i_2 = 13{,}1$				Mittel: $i_1/i_2 = 13{,}0$					

Aus diesen Versuchen folgt nun, daß i_1/i_2 nicht verschieden, sondern gleich ist für beide Fälle, obwohl die Felder im Verhältnis 100:1 stehen, und trotzdem beide i im Ozon sehr viel kleiner sind, etwa den vierten Teil betragen (nach der Tabelle $^1/_{5,5}$, welcher Wert aber wegen der Lichtabsorption des Ozons mit $^4/_3$ zu multiplizieren ist). Vorversuche, bei denen das Feld allerdings nur im Verhältnis 3:1 variiert, indes gewartet worden war, bis die Empfindlichkeit im Ozon auf den siebenten Teil herabging, hatten dasselbe Resultat geliefert.

Aus der durch die Versuche bewiesenen Konstanz von i_1/i_2 ist zu schließen, daß die Wirkung des Ozons sich nur in den Schichten abspielen kann, wo bei Variation des äußeren Feldes das Gesamtfeld nicht merklich variiert. Das geschieht aber nur in unmittelbarster Nähe und in den oberflächlichen Schichten

der Platte. Das Feld des elektrischen Spiegelbildes nimmt in der nächsten Nähe der Platte so große Werte an, daß äußere Felder von 0,5—500 Volt/cm, wie sie bei meinen Versuchen benutzt wurden, klein dagegen bleiben. Zugleich wird dort die Absorption der Elektronen durch das Gas sehr groß werden, da erstens die unmittelbar an der Oberfläche anliegende Gasschicht und das eingedrungene Gas stark kondensiert sind und zweitens das Absorptionsvermögen für die Elektronen außerordentlich große Werte hat. Hr. Lenard findet[1]) für Luft von 1 mm Hg-Druck das Absorptionsvermögen 30, was für Atmosphärendruck einen Absorptionskoeffizienten 23000 ergibt. Würde die adhärierende Gasschicht im Mittel z. B. 50 Atm. Druck besitzen, so kämen durch eine Schicht von $2{,}5 \times 10^{-6}$ cm oder $^1/_4$ molekulare Weglänge (Luftmoleküle, Atmosphärendruck) nur 5,5 Proz. der Elektronen hindurch, in diesem Abstand beträgt aber das Feld des elektrischen Spiegelbildes bereits 8000 Volt/cm.[2]) Dazu kommt noch, daß das in die Oberflächenschichten der Platten eingedrungene Gas bei der Absorption mitwirkt. Die Dicke der Gasschicht hängt nun nicht vom äußeren Feld ab, ihre Dichte vermindert sich ferner nach außen hin rasch, so daß die Absorption in Abständen von der Platte, wo das äußere Feld nicht mehr gegen das Spiegelbildfeld klein bleibt, nicht mehr wesentlich in Betracht kommt. Unter diesen Umständen kann das oben genannte Verhältnis i_1/i_2 auch bei so beträchtlicher Abnahme der beiden i, wie sie durch das Ozon bewirkt werden, konstant bleiben, wenn sich die Wirkung des Ozons wesentlich auf die unmittelbarste Nachbarschaft der Plattenoberfläche beschränkt. Man braucht nnr anzunehmen, daß es in diese Schichten eindringt und ein besonders großes Absorptionsvermögen für langsame Elektronen besitzt. Wenn es gelingen wird, dieses direkt zu bestimmen, so wäre damit die Entscheidung für die hier entwickelte Anschauung zu gewinnen. Daß das Ozon ein großes Absorptionsvermögen für die Elektronen hat, liegt nicht ganz fern zu vermuten, denn einerseits spricht es selbst auf Schwingungen ultravioletten Lichtes sehr stark an, 3×10^{-3} Volumprozent

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 732. 1903.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 187. 1902.

Ozon absorbieren auf 15 cm Länge $^1/_4$ des bei meinen Versuchen angewendeten, lichtelektrisch wirksamen, ultravioletten Lichtes; daß aber andererseits die Elektronen auf dieselben ultravioletten Schwingungen ansprechen, zeigen die lichtelektrischen Erscheinungen. Es liegt also nahe zu vermuten, daß auch beide aufeinander ansprechen. Vielleicht könnte es sogar sein, daß das Ozon, wenn es dem Metall sehr nahe anliegt oder in dasselbe eindringt, die Schwingungen der Elektronen in denselben dämpft und dadurch auf die direkteste Weise die lichtelektrische Empfindlichkeit herabsetzt.

Hierdurch würde sich auch die p. 464 u. 465 erwähnte Tatsache, daß die Ermüdung von der Lichtsorte, mit welcher man mißt, stark abhängig ist, erklären. Licht, welches nur wenig ultraviolett ist, wird nur eine geringe Zahl der Elektronen, nur z. B. solche, die größte Schwingungsenergie haben, auslösen können. Geringe Verminderung der Schwingungsenergie wird die größte Zahl derselben unauslösbar machen, während dieselbe Energieeinbuße die Zahl der durch *stark* ultraviolettes Licht auslösbaren Elektronen, die eben dafür nicht so große Schwingungsenergie zu haben brauchen, viel weniger prozentuell zu vermindern vermöchte.

Die entwickelte Anschauung würde auch, abgesehen von der Ermüdung, die Grunderscheinung der lichtelektrischen Entladung in einem ihrer auffälligsten Punkte erklären, nämlich ihrer verhältnismäßig geringen Stärke im Vergleich zu derjenigen, welche Hr. Lenard im äußersten Vakuum unter Anwendung aller Mittel zur Entfernung der Gasreste[1]) von der Platte erhielt. Er fand, daß von der im letzteren Fall im Vakuum ausgestrahlten Elektrizitätsmenge bei Atmosphärendruck und einem Feld von 83 Volt/cm nur $^1/_4$ Proz., bei 2780 Volt/cm nur 4,7 Proz. herauskommen.[2]) Stoletow[3]) fand in einem Vakuum von 0,003 mm, wo die Stärke des lichtelektrischen Stromes wegen der mitwirkenden Ionisation durch Stoß nach den Versuchen von Lenard eher etwas größer ist

1) P. Lenard, Wiener Ber. 108. IIa. p. 1652 (§ 3). 1899; Ann. d. Phys. 2. p. 361 (§ 3). 1900.

2) P. Lenard, l. c. p. 1655, Tab. II bez. p. 365, Tab. II; vgl. auch Ann. d. Phys. 8. p. 196. 1902.

3) A. G. Stoletow, Journ. de Phys. (2) 9. p. 468. 1890.

als im absoluten Vakuum, diese bei einem Feld von etwa 240 Volt/cm nur 6 mal so stark wie bei Atmosphärendruck; Righi[1]) fand noch kleinere Verhältnisse. Die Verschiedenheit der genannten Ergebnisse würde sich nach dem obigen dadurch erklären, daß bei Stoletow und Righi die Elektrode Gase absorbiert enthielt, welche auch nach Herabgehen des Druckes auf 0,003 mm die aus einer gasfreien Elektrode, wie sie Hr. Lenard hatte, herausführbaren Elektronen größtenteils absorbierte. Andererseits hätte man das von dem letztgenannten untersuchte „normale" Absinken des lichtelektrischen Stromes beim Übergang zum Atmosphärendruck auf Eindringen des Gases in die Platte und Bildung einer adhärierenden kondensierten Gasschicht größtenteils zurückzuführen. Ferner würde sich dadurch erklären, daß die Untersuchung der lichtelektrischen Empfindlichkeit in verschiedenen Gasen Widersprüche zwischen den Beobachtern geliefert hat. Versuche mit Wasserstoff, die während dieser Untersuchung angestellt und bei denen die Empfindlichkeiten unter öfteren Neufüllungen bestimmt wurden, ergaben Resultate, die keine schöne Übereinstimmung miteinander zeigten, so daß man nur oberflächliche Angaben darüber machen kann (vgl. p. 491). Da es offenbar darauf ankommt, daß die Oberfläche des Metalles selbst mit dem betreffenden Gas und nicht mit einem anderen gesättigt ist, müßten bei solchen Bestimmungen in der Art, wie es Hr. Lenard mit offenbarem Erfolg getan hat, zunächst die Platten von Gasresten befreit und erst dann die zu untersuchenden Gase eingelassen werden. Auch bei der Vergleichung verschiedener Metalle auf ihre lichtelektrische Empfindlichkeit müßten die Oberflächen, insofern man auf spezifische Metallkonstanten kommen will, möglichst von Gas befreit und müßte im Vakuum gearbeitet werden.

Die gewonnene Anschauung führt die Ermüdungen in und außerhalb der Gefäße, welche bei der Untersuchung zunächst getrennt behandelt werden mußten, schließlich auf dieselbe Grundwirkung, die Absorption der Elektronen durch Gase,

---

1) A. Righi, Mem. di Bologna (4) **10.** (seduta 27. IV. 1890); La Lumière électrique **37.** p. 654, zitiert nach einem kurzen Selbstreferat von Righi, Nuovo cimento **30.** p. 198. 1891/92.

zurück, außerdem stellt sich letztere nur als ein auch beim lichtelektrischen Grundphänomen stets wesentlich beteiligter Faktor dar. Die dadurch gegebene Vereinfachung läßt die Erklärung an Halt gewinnen und liefert eine spezielle Anregung, sie bei den ferneren Untersuchungen der lichtelektrischen Erscheinungen zugrunde zu legen und ihre Weiterprüfung zu veranlassen.

Bezüglich der p. 509 erwähnten Formel würde unsere Anschauung darauf hinauslaufen, daß J die Größe ist, auf welche sich der Einfluß der im Oberflächengebiet kondensierten Gase erstreckt, wenigstens bei dem in der vorliegenden Untersuchung benutzten Größengebiete des Feldes. Für die Bildung von J käme dann nicht die Gesamtheit der aus dem gasfreien Metall herauszubringenden Elektronen in Betracht, sondern nur die aus der Absorptionsschicht herauskommenden. Man hätte so zwei Streckengebiete für die Erscheinung zu unterscheiden, denen sich nach außen hin als drittes dasjenige anschlösse, in welchem die den Rücktransport von Elektrizität nach der Ausgangsplatte bewirkenden Kräfte unmerklich geworden sind. Ein Wechsel des Gases allein in diesem dritten Gebiete würde den lichtelektrischen Strom nur unwesentlich beeinflussen.

Eine Nebenerscheinung, an deren weitere Bearbeitung ich bisher noch nicht herantreten konnte, möge noch Erwähnung finden. Platten, welche längere Zeit in einem Gefäße gelagert haben, ermüden, wenn man sie herausnimmt und vor der Lampe untersucht, schneller, sowohl wie eine außerhalb eines Gefäßes auf denselben Betrag gealterte, als auch wie eine ganz frisch polierte Platte. Bei gelegentlich nebenher gemachten Versuchen schien es so, als ob, im Gegensatz zu frischen oder offen gealterten, die Platten in diesem Fall tangential zum Lichte aufgehängt weniger ermüdeten, wie normal dazu. Eventuell handelt es sich also hier um eine Mitwirkung des Lichtes, die vielleicht in einer Ozonisierung der während der Lagerungsperiode im Gefäß aufgenommenen Luft bestehen könnte.

Schluß.

Weder die Korrosion der Oberfläche, noch das Licht oder andere Strahlungen, oder die Oxydation, noch auch elektrische

Ursachen, seien es Einflüsse auf das Medium oder Ausbildung von Doppelschichten, liefern die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung.

Die übrigens schwache Ermüdung in Gefäßen läßt sich auf die Vermehrung der Elektronenabsorption durch die Zunahme der Gasbeladung der Platten zurückführen. Die Wirkung des Ozons, welches im freien Raum die Hauptursache der dort stattfindenden, starken, lichtelektrischen Ermüdung bildet, beruht weder auf Oxydation noch auf Änderung des Kontaktpotentials. Sie läßt sich analog wie die Gefäßermüdung auf Elektronenabsorption in der Gasbeladung der Platten zurückführen, wenn man die aus verschiedenen angegebenen Gründen naheliegende Annahme macht, daß dem Ozon ein hervorragender Einfluß auf die Elektronenbewegung zukommt (starke Absorption langsamer Elektronen, eventuell Verminderung ihrer Schwingungsenergie im Metall).

Das zur Untersuchung kleinster Mengen, z. B. in der Radioaktivität erprobte Elektroskop liefert auf dem Wege über die lichtelektrische Ermüdung, wie schon in der früheren Arbeit erwähnt, ein Mittel zum Studium langsamer Oberflächenänderungen und möchte insbesondere auf diese Weise einen Zugang zur Untersuchung sich ausbildender, geringerer Gasbeladungen ergeben.

Auch bei der Ausbildung der Kontaktpotentiale möchten vielleicht vom aufgenommenen Gase absorbierte, aus den Substanzen heraus diffundierte Elektronen eine wesentliche Rolle spielen. Diese Vermutung haben die Versuche der vorliegenden Arbeit bei mir bestärkt, die Verfolgung derselben dürfte, wie mir scheint, durch den Versuch entscheidbare Fragen über die Ausbildung der Kontaktpotentiale an die Hand geben und so vielleicht die Lösung dieses alten Problems weiter zu fördern vermögen.[1])

Dresden, Physik. Institut der Techn. Hochschule.

1) Die Angaben über die lichtelektrische Ermüdung in einigen Gesamtdarstellungen sollten einer Revision unterzogen werden. p. 489 bis 490 wurde schon erwähnt, daß die am dort zitierten Ort vorkommende Angabe, im Wasserstoff finde keine Ermüdung statt, nicht zutrifft. Dasselbe gilt für die am gleichen Ort stehende Angabe, daß Pt keine Ermüdung zeige. Zwar ermüdet Pt nicht so schnell wie Zn unter

gleichen Verhältnissen, aber doch so, daß ich diese Ermüdung bei einem großen Teil meiner Versuche benutzen konnte. Ebenso ist es unzutreffend, daß das Ermüden wahrscheinlich einer Oxydation zuzuschreiben sei, ein Schluß, der sich am zitierten Ort wesentlich auf die beiden gerade erwähnten irrtümlichen Angaben gründet. Gerade bei einem Buche von so hohem Rang wie das Thomsonsche (Marx) ist der Wunsch, gelegentliche Irrtümer beseitigt zu sehen, besonders lebhaft. Auch die Angaben über die lichtelektrische Ermüdung in Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl., 4. p. 487—489, führen zu einem unzutreffenden Urteil. Z. B. heißt es: „Metallflächen, welche durch Liegen an der Luft sich mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt haben, sind ebenfalls wenig wirksam.“ Metallflächen, welche längere Zeit an der Luft gelegen haben, sind zwar wenig wirksam, aber Metallflächen, welche lediglich mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt sind, sind meist recht wirksam. Namentlich von CuO ist dies schon sehr lange bekannt und auch für PbO_2 habe ich es früher gelegentlich gefunden. Vielleicht darf ich die Gelegenheit benutzen, um den Wunsch auszusprechen, es möchten die einzelnen Angaben durch direkt beigegebene Zitate, Einzelzitate, belegt werden. Die Brauchbarkeit für den arbeitenden Physiker wird hierdurch doch wesentlich mitbestimmt, Aufführen der gesamten Literatur über einen Gegenstand hilft bei der Prüfung der Angaben auf ihre Richtigkeit, zu der man doch verpflichtet ist, nicht genügend.

(Eingegangen 29. Mai 1907.)

Anmerkung bei der Korrektur. **Für die Zurückführung der Ermüdung auf die Gasabsorption liefert eine inzwischen erschienene Arbeit von Hrn. Bergwitz (Phys. Zeitschr. 8. p. 373. 1907) eine weitere wertvolle Stütze. Er zeigt, daß in Elster-Geitelschen Vakuumzellen keine Ermüdung eintritt. Bis zu gewissem Grad war dies zwar schon bekannt, aber noch nicht durch besondere Versuche nachgewiesen. Allerdings betragen die längsten Ermüdungsperioden bei Hrn. Bergwitz, soviel sich aus der Arbeit ersehen läßt, nur 3 Stunden, so daß es wünschenswert bleibt, dieselben zu verlängern.**

7. *Wann und auf welchem Wege beeinflussen suspendierte Teilchen Gewicht und Auftrieb einer Flüssigkeit?*

von Bernhard Löffler.

(Auszug aus der Marburger Dissertation 1906.)

I. Grundlegende Erörterungen.

Die Frage nach dem Einfluß suspendierter Teilchen auf den Auftrieb einer Flüssigkeit ist zum ersten Male im Jahre 1847 durch Brücke[1]) bei Gelegenheit der Untersuchung des spezifischen Gewichtes der Milch mit Hilfe des Aräometers angeregt worden. Brücke nimmt als selbstverständlich an, daß zwischen den Angaben des Pyknometers und des Aräometers Unterschiede bestehen, wenn sie auch nach seiner Meinung vielleicht nicht groß genug sind, um mit Sicherheit wahrgenommen zu werden. Nach seiner Ansicht wirken die suspendierten Körperchen nicht auf das Aräometer. Die Frage blieb unentschieden, bis sie im Jahre 1865 von Camillo Bondy und E. Mach[2]) wieder aufgenommen wurde. Bondy fand experimentell, daß suspendierte Teilchen einen ziemlich bedeutenden Einfluß auf die Aräometerangabe hatten.

Die Frage: „Wie hängt die Wirkung der Körper auf das Aräometer von der Feinheit der Verteilung ab?“ hat er experimentell nicht gelöst. Diese Frage hat zunächst Hr. K. v. Plessen in seiner Greifswalder Doktorarbeit[3]) untersucht, deren Resultate kurz angegeben werden sollen:

K. v. Plessen stellte sich Suspensionen von verschiedener Feinheit her, vornehmlich durch Fällung von Baryumsulfat bei verschiedenen Temperaturen. Eine solche Fällung erhält man beim Zusammengießen wässeriger Lösung von Chlorbaryum mit Natriumsulfat. Und zwar werden bei gewöhnlicher Tem-

1) Brücke, Müllers Arch. p. 409. 1847.

2) Camillo Bondy u. E. Mach, Pogg. Ann. 126. p. 314—330. 1865.

3) Karl v. Plessen, Inauguraldissertation, Greifswald 1901, bei F. W. Kunicke.

peratur, die aber durch die Reaktionswärme steigt, gröbere Teilchen in Suspension abgeschieden, feinere Teilchen dagegen bei niedrigerer Temperatur, welche durch Vorkühlen der Lösungen mit Kältemischung auch bei der Reaktion erhalten bleiben kann. Hr. v. Plessen konstatierte, daß, je feiner die Teilchen waren, diese um so vollkommener wirkten in Bezug auf Bodendruck (Pyknometer) und Auftrieb (Aräometer), so, als ob sie gelöst wären. Und zwar ergaben sich die Werte des spezifischen Gewichtes für eine bestimmte Suspension, in beiderlei Weise ermittelt, fast stets sehr nahe einander gleich. Etwas höhere Werte als das Aräometer gibt das Pyknometer nur bei den allergröbsten Suspensionen, die sich sehr schnell setzten.

Die Ansicht, die Bondy sich von der Wirkung der suspendierten Teilchen gebildet hatte, führte ihn zu dem Ausspruch: „Fein und gleichförmig verteilte in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen affizieren das nach irgend einer Methode bestimmte spezifische Gewicht und den Auftrieb desto mehr in derselben Weise wie gelöste Körper, je langsamer sie in der Flüssigkeit fallen oder steigen.“ — Er ist also der Ansicht, daß die Einwirkung auf den Auftrieb von dem Mangel an Geschwindigkeit der suspendierten Partikelchen abhänge. Sein Lehrer Ernst Mach weist dagegen in seinen Bemerkungen zu Bondys Arbeit darauf hin, daß es auf die vernichtete Beschleunigung ankomme in umgekehrter Anwendung des Prinzipes: „ein fallender Körper ist nicht schwer“. Indem wir vorläufig die zu ihr erforderliche Ergänzung, wie sie sich uns ergeben hat, zur Besprechung im III. Teile aufheben, wollen wir zunächst das Prinzip von Machs Erklärung näher ausführen.

Wir wollen unter „Gewicht“ den Druck verstehen, den ein Körper auf eine Unterlage ausübt, oder den Zug, mit dem er einen Faden spannen würde. Es ist also Gewicht hier in demselben Sinne zu nehmen, wie bei dem Archimedischen Prinzip. In diesem Sinne verliert ein fallender Körper um so mehr von seinem Gewicht, je mehr sich seine Beschleunigung der des freien Falles nähert. Fällt der Körper mit *dieser* Beschleunigung, so verliert er sein ganzes Gewicht. Fällt er mit konstanter Geschwindigkeit, so drückt er mit seinem vollen Gewicht auf die Unterlage, er wiegt dann also gerade so viel wie im Zustand der Ruhe. Fällt er mit Verzögerung, so wird

er stärker auf die Unterlage drücken, also mehr wiegen als im Zustand der Ruhe.

Eine neue Demonstrationsvorrichtung für dieses Prinzip, die zugleich die Verhältnisse bei suspendierten Teilchen nachahmt, ist folgende: Sie besteht aus einer an einem Kautschukfaden aufgehängten etwa 2 m langen Stange, an der ein Messingstück hinabgleitet. Je nach der Größe der Reibung, die durch eine schleifende Feder reguliert werden kann, fällt das Messingstück mit oder ohne Beschleunigung. Vor Beginn des Versuches ist das Messingstück durch einen Bindfaden am oberen Ende der Stange befestigt. Dann wird der Bindfaden durchgebrannt. Fällt nun das Messingstück mit starker Reibung, also mit nahezu konstanter Geschwindigkeit, so bleibt die Stange in Ruhe. Fällt es bei geringer Reibung, also mit Beschleunigung, so bewegt sich die Stange aufwärts, im Sinne einer Gewichtsverminderung. Noch vollständiger gleicht folgende auf Vorschlag von Dr. M. Seddig durch Institutsmechaniker P. Görs ausgeführte Anordnung den sich setzenden Teilchen. Einen Messingzylinder etwa von der Größe eines Fingers kann man in derselben Weise fallen lassen in einer nur etwas weiteren 2 m langen Glasröhre. Diese ist einmal mit Wasser gefüllt: dann wägt der fallende Zylinder mit; ein zweites Mal ist sie mit Luft gefüllt: dann wägt er während des Falles fast gar nicht mit. Beim letzteren Versuch kann die Röhre unten offen bleiben, um den störenden Aufprall auf den Boden zu vermeiden.

Ganz analog dem Gleitstück bez. dem Fallzylinder verhalten sich in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen. Die Reibung an der Flüssigkeit verhindert sie, mit voller Schwerebeschleunigung zu fallen. Entsprechend dem Beschleunigungsmanko üben die Teilchen auf die Flüssigkeit einen Druck aus. Dieser Druck muß sich sowohl auf den Boden des Gefäßes, wie auch auf hineintauchende Schwimmkörper übertragen.

Die suspendierten Partikelchen werden dann mit ihrer vollen Schwere auf die Flüssigkeit drücken, also „Gewicht" der Flüssigkeit (d. h. ihren Bodendruck) und Auftrieb dann am vollkommensten beeinflussen, wenn die gesamte Beschleunigung der Teilchen durch die Reibung an der Flüssigkeit aufgezehrt ist, d. h. wenn die Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit fallen.

Ein Unterschied in den Angaben des Aräometers und des

Pyknometers sollte also gar nicht vorkommen. Wenn Hr. v. Plessen, wie oben erwähnt, doch einen solchen fand bei den gröbsten Suspensionen, so setzten sich letztere außerordentlich schnell. Bis zur ersten Ablesung am Aräometer waren bereits Teilchen zu Boden gesunken, während sich auch schon von der Oberfläche her eine klare Schicht bildete. Für den Bodendruck muß dies ohne Einfluß gewesen sein; das Aräometer muß dann aber in der Tat ein etwas niedrigeres spezifisches Gewicht angeben. Von einem solchen, nur bei den allergröbsten Suspensionen vorkommenden Ausnahmefall soll im folgenden stets abgesehen werden.

Nach Machs einleuchtender Betrachtungsweise der Wirkung suspendierter Teilchen wird man nicht mehr im Zweifel sein, daß in der Tat die Beschleunigungsverminderung die Hauptsache für die Druckwirkung am Teilchen ist. Es drängen sich dann aber auch sogleich zwei Schlußfolgerungen aus dieser Betrachtung auf. Erstens wird dem Fallen der Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit eine kurze Epoche der Beschleunigung voraufgehen, etwa nach frischem Aufrühren der Suspension; in dieser Beschleunigungsepoche muß die Suspension leichter erscheinen als später, wenn die Teilchen sich mit konstanter Geschwindigkeit setzen. Zweitens kommen die Teilchen mit einer gewissen, wenn auch sehr kleinen Geschwindigkeit am Boden an; sie stoßen gegen den Boden und müssen dadurch eine Gewichtsvermehrung erzeugen. Ob beide Einflüsse meßbar sind, und wann, ist von vornherein fraglich. Es ist aber von der größten Wichtigkeit, sie ins Auge zu fassen; denn sie können Gewichtsänderungen ein und derselben Gesamtmasse erzeugen. Es ist daher im Folgenden zunächst versucht worden, solche Einflüsse nachzuweisen.

II. Versuche über Gewichtsänderung von Körpern, die mit Reibung fallen.

1. Versuche an Suspensionen.

Die Gewichtsverminderung unmittelbar nach dem Aufschütteln einer Suspension wird durch den zweiten der eben erwähnten Einflüsse verstärkt werden; denn auch die Teilchen, die den Boden erreichen, werden während jener Beschleunigungs-

epoche noch nicht mit voller Endgeschwindigkeit aufprallen. Es war also nicht von vornherein aussichtslos, diese Gewichtsverminderung nachweisen zu können. Zur Ermittelung der günstigsten Bedingungen stellte Hr. K. v. Plessen weiterhin Versuche über Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Setzen der Suspensionen an (Dissertation p. 10 bis 26). Die wesentlichen Versuche wurden angestellt durch beständige wägende Verfolgung des kontinuierlich anwachsenden Bodensatzes, indem dieser sich direkt auf eine Platte niederschlug, die an dem einen Arm einer nicht arretierten Wage hing. Inwieweit unter diesen Umständen die augenblickliche Lage der Wage der im gleichen Augenblick vorhandenen Belastung entspricht, ergibt eine theoretische Ableitung, die Hr. Prof. Richarz Hrn. v. Plessen zur Verfügung stellte (dessen Dissertation p. 18 bis 19), bei welcher die auftretende Differentialgleichung mit Hilfe eines Integrales ähnlich dem Fourierschen gelöst wird. Hr. v. Plessen ermittelte durch seine Versuche, bei welchen Suspensionen die Epoche der Beschleunigung nach dem Aufrühren am längsten dauerte. Ich habe vergeblich versucht, bei eben denselben einen Gewichtsverlust in dieser Epoche zu konstatieren. Dabei stand mir eine Bungesche Wage zur Verfügung, die auf 150 g Belastung noch 0,02 mg angibt. Ein überschläglicher Vergleich mit den im folgenden Abschnitt berichteten geringen, aber noch nachweisbaren Wirkungen läßt dies negative Resultat in der Tat erwarten. Vielleicht wird man mit sehr viel empfindlicheren Wagen aber auch diese Gewichtsverminderung von Suspensionen nach dem Aufschütteln nachweisen können.

2. Versuche mit einem einzelnen in einer Flüssigkeit fallenden Körper.

Eine Möglichkeit, ein Analogon zu einer sich setzenden Suspension herzustellen, bei welchem die Beschleunigungsdifferenzen und damit die Gewichtsdifferenzen stärker sein mußten, war, statt relativ leichter Teilchen *einen schweren Körper* zu nehmen, ihn durch starke Reibung zu langsamem Fall zu zwingen und dann während des Fallens durch Änderung der Reibung Beschleunigung oder Verzögerung zu bewirken.

Zu diesem Zweck benutzte ich eine Versuchsanordnung,

der sich schon Hr. F. E. Wolff bei früheren Versuchen, die er als Privatassistent von Prof. Richarz anstellte, bedient hat.

Eine Glasröhre von 14,5 cm Höhe und ungefähr 1,3 cm Durchmesser wurde mit destilliertem Wasser gefüllt.

In diese Glasröhre war ein massiver zylindrischer Messingkörper von 28,5 g Gewicht eingepaßt. Oben und unten war die Glasröhre dicht verschlossen, und zwar so, daß sich innerhalb der Glasröhre keine Luftblase mehr befand. Zum Durchfallen dieser Glasröhre brauchte der Messingkörper ungefähr eine Minute. Am oberen Ende war die Glasröhre so eng, daß der Messingkörper genau hineinpaßte; die Reibung war daher außerordentlich groß, weshalb der Messingkörper anfangs nur mit ganz geringer Beschleunigung fiel. Etwas unterhalb der Mitte war die Glasröhre ein wenig weiter, so daß der Messingkörper nun plötzlich eine bedeutend größere Beschleunigung erhielt. Da die Röhre nach unten nicht mehr schmäler wurde, so war der Messingkörper nach Passieren der Erweiterung bald unten angelangt. Die Glasröhre wurde an der Wage aufgehängt, gewartet, bis alle Luftströmungen, die durch Öffnen der Seitentüren des Wagekastens und durch Erwärmen entstanden waren, sich ausgeglichen hatten, dann endgültig äquilibriert. Vermittelst eines besonderen Mechanismus wurde ohne Öffnen der Türen des Wagekastens die Glasröhre von der Wageschale abgehoben, um 180° gedreht, bis der Messingbolzen die Röhre durchfallen hatte, dann wieder in der ursprünglichen Stellung an der Wageschale aufgehängt und jetzt die Arretierung sofort gelöst. Während des Fallens des Bolzens konnte dann eine Reihe von Umkehrpunkten der Wage abgelesen und das Gewicht berechnet werden.

Es ist bereits erwähnt, daß der Messingbolzen von Anfang an schon vor der erweiterten Stelle in der Glasröhre mit geringer Beschleunigung fällt; wie zu erwarten, zeigen die Versuche, daß der ganze Apparat während dieser Zeit leichter ist als im Zustand der Ruhe nach dem Auftreffen des Messingbolzens. Die Gewichtsverminderung beträgt 0,14 mg. *Außer dieser tritt aber mit voller Regelmäßigkeit ein stärkerer Gewichtsverlust auf, den der Messingbolzen nach Passieren der Erweiterung erleidet, d. h. während der Zeit, in der er mit vermehrter Beschleunigung fällt, und zwar im Betrage von etwa 0,2 mg.*

Der Augenblick des Aufschlagens des Bolzens auf den Boden ergab dann noch eine momentane Gewichtsvermehrung. Bei einer zweiten Versuchsreihe wurde eine Glasröhre von 17,5 cm Länge und 1,3 cm Durchmesser benutzt, die oben etwas weiter, wenig unterhalb der Mitte dagegen enger war. In der oberen Hälfte der Glasröhre fiel der Messingbolzen daher ziemlich schnell, wurde dann aber in der Mitte plötzlich gehemmt und fiel nun ganz langsam mit immer größer werdender Reibung, so daß dann auch der Anprall auf dem Boden viel geringer war als in der vorigen Versuchsreihe.

Diese Versuche zeigen, daß der Messingkörper schwerer wird in demselben Augenblick, in dem eine plötzliche Abnahme seiner Geschwindigkeit eintritt.

Da der Messingkörper zu Beginn eines jeden dieser zweiten Versuche mit geringer Verzögerung fällt, so ist der ganze Apparat während dieser Zeit etwas schwerer als im Zustand der Ruhe nach dem Auftreffen des Messingbolzens.

Die Gewichtsvermehrung bez. -verminderung durch Beschleunigungsverminderung bez. -vermehrung war bei diesem relativ schweren „sich setzenden" suspendierten Messingbolzen nur gering, aber doch noch nachweisbar. Der Vergleich mit den Suspensionen läßt sofort erkennen, daß mit der zur Verfügung stehenden Wage an ihnen keine Gewichtsdifferenzen konstatierbar sein konnten.

3. Gewichtsänderung von „Sanduhren" während des Fallens der Sandteilchen.

Zu den nun folgenden Berechnungen und Versuchen führte die Überlegung, man müsse die Reibung der sich setzenden Suspension stark verringern, um eine größere Beschleunigung im Fallen der suspendierten Teilchen und dadurch einen erheblicheren Gewichtsverlust zu erzielen, der mit unserer Wage noch meßbar wäre. Als extremen Fall kann man sich dann ein Fallen von Teilchen in Luft denken: eine „Sanduhr". Die im Fallen begriffenen Teilchen werden nicht mitwiegen, wenn sie die volle Schwerebeschleunigung haben; fallen sie mit Reibung, so wird ein Teil der Beschleunigung aufgezehrt; es findet dann Druckübertragung durch Vermittelung der Luft statt; die Teilchen werden in diesem Falle mitwiegen, aller-

dings nicht mit ihrem vollen Gewicht. Andererseits ist zu berücksichtigen, daß die auf den Boden der Sanduhr auftreffenden Teilchen durch ihren Stoß so wirken wie eine Gewichtsvermehrung.

Man kann den Extremwert der Gewichtsverminderung während des Fallens der Teilchen, wenn es mit Beschleunigung geschieht, berechnen, ebenso den Extremwert der Gewichtsvermehrung durch den Aufprall der Teilchen auf den Boden. Welcher von beiden Einflüssen überwiegt, hängt von der Größe der Reibung ab. Diese Überlegungen konnten experimentell geprüft werden an verschiedenen Glasapparaten, die hohen Sanduhren ähnlich waren. Dabei fanden sich alle Möglichkeiten auch in der Tat bei einer oder der anderen der „Sanduhren" verwirklicht, und die Resultate lagen auch der Größe nach innerhalb der berechneten Grenzen. Eine erste Gruppe von Versuchen wurde dabei einfach mit luftgefüllten „Sanduhren" angestellt, weiter dann aber auch Versuche an ein und derselben „Sanduhr" zuerst in luftgefülltem, dann in evakuiertem Zustande. Dabei ergaben sich in beiden Zuständen dieselben Resultate für die auftretenden Gewichtsänderungen während des Fallens der Sandteilchen, was auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen kann. Indessen ist ja aber nach unserer Auffassung die Reibung das Wesentliche. Diese ist für Gase jedoch nach Kundt und Warburg[1]) bis zu sehr kleinen Drucken von letzteren unabhängig, so daß hiernach jenes Resultat vielmehr eine Bestätigung unserer Auffassung liefert.

Wenn aber eine der „Sanduhren" mit Wasser statt mit Luft gefüllt wurde, ergaben sich fast ganz dieselben Verhältnisse wie bei einer sich setzenden Suspension; ein Gewichtsunterschied bei ruhendem und bei fallendem Sand ist nicht mehr vorhanden; die Teilchen drücken also infolge vollständig aufgezehrter Beschleunigung mit ihrem vollen Gewicht.

Die theoretischen Überlegungen über „Sanduhren" und eine kurze Darstellung dieser Versuche hat Hr. F. Richarz an anderem Orte gebracht.[2])

---

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337 u. 525. 1875.
2) F. Richarz, Sitz.-Ber. d. Marburger Gesellsch. vom 8. Mai 1907.

Somit haben wir durch die im Vorstehenden erwähnten Versuche mit dem in Wasser fallenden Messingbolzen und den luft- bez. wassergefüllten Sanduhren eine vollständige Bestätigung der Vorstellung gewonnen, daß bei sich setzenden Suspensionen die Teilchen soweit und deswegen ihren Gewichtsdruck auf die Flüssigkeit übertragen, als ihre Beschleunigung durch die Reibung der Flüssigkeit aufgezehrt wird.

Wenn man sich nun weiter fragt, wie man sich die Übertragung des Gewichtsdruckes der suspendierten Teilchen durch die Flüssigkeit hindurch auf den Boden vorzustellen habe, so könnte man sich zunächst folgende hydrostatische Erklärung machen. Durch jenen Gewichtsdruck wird die Flüssigkeit komprimiert, wenn auch äußerst wenig; aber um gerade so viel, daß der komprimierende Druck auch wieder auf den Boden ausgeübt wird. Dieselbe Vorstellung der Druckübertragung kann auch angewendet werden auf den Auftrieb, den ein Schwimmkörper erfährt. Indessen führt für letzteren Fall eine hydrodynamische Auffassung anschaulicher zum Verständnis, und zwar nicht nur des Einflusses suspendierter Teilchen auf den Auftrieb, sondern allgemeiner des Einflusses von einem bewegten Körper auf einen anderen ruhenden in einer reibenden Flüssigkeit.

III. Auf welche Weise vollziehen Körper, die in einer Flüssigkeit sich mit großer Reibung bewegen, ihren Einfluß auf den Auftrieb?

Der durch Reibung verursachte Mangel an Beschleunigung genügt nicht zur vollen Erklärung des Zustandekommens der Auftriebs- und Bodendruckbeeinflussung. Es muß noch eine übrigbleibende Bewegung der Teilchen vorhanden sein. Würden die Teilchen sich überhaupt nicht in der Flüssigkeit bewegen, so ist das nur dann denkbar, wenn das spezifische Gewicht des Suspensionsmittels gleich dem spezifischen Gewicht der suspendierten Substanz ist; dann wird natürlich keine Einwirkung der suspendierten Teilchen auf den Auftrieb der Flüssigkeit stattfinden. Damit eine Einwirkung auf den Auftrieb stattfindet, muß vielmehr Geschwindigkeit vorhanden sein, mit der die Teilchen in der Flüssigkeit fallen. Die Einwirkung der suspendierten Teilchen auf den Auftrieb und

Bodendruck ist also nicht nur von einem Defizit an Beschleunigung, sondern auch von einer vorhandenen Geschwindigkeit abhängig. Ein Unterschied in der Wirkungsweise auf Bodendruck und Auftrieb ist nicht anzunehmen. Der Einfluß der Beschleunigung ist besser nachweisbar beim Bodendruck, der Mechanismus der Übertragung und die Bedeutung der Geschwindigkeit für ihn sind besser zu ersehen aus den folgenden Versuchen über die Änderung des Auftriebes.

1. Versuche mit *einem* sich bewegenden Körper.

Wenn die Erklärung richtig ist, wonach die suspendierten Teilchen durch das Fallen mit großer Reibung auf die Flüssigkeit einen Druck ausüben und dadurch sowohl auf Gewicht wie auf den Auftrieb der Flüssigkeit wirken, so ist zu erwarten, daß auch ein einzelner, mit großer Reibung in Wasser fallender Körper, wenn auch nicht stationär, so doch stoßweise den Auftrieb erhöht. Zugleich gelangen wir durch die Betrachtung dieses Falles zu dem Verständnis, wie überhaupt die fallenden Teilchen einer Suspension ihre Wirkung auf den Auftrieb bewerkstelligen.

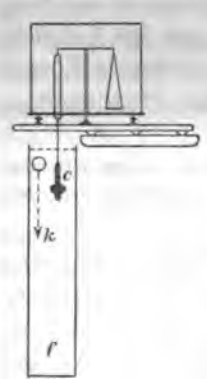


Fig. 1.

Ein diesbezüglicher Versuch des Hrn. K. v. Plessen[1]) wurde wiederholt und erweitert.

Zu diesem Zweck wurde die zu den bisherigen Versuchen benutzte feine Bungesche Wage umgebaut in einer Weise, die fast ohne Erläuterung aus Fig. 1 verständlich ist.

An dem einen Gehänge hing der Senkkörper c in Wasser hinein. Der Wasserbehälter f war 95 cm hoch, 20 cm breit und 30 cm lang. Durch ein seitliches Fenster war es möglich, zu kontrollieren, ob die fallende Kugel in der richtigen Entfernung vom Senkkörper vorbeifiel.

Als Fallkörper k wurde ein ausgehöhlter Kork benutzt, der mit Eisenstückchen gefüllt und mit Filz umwickelt war, so daß das Ganze eine Kugel von 6,5 cm Durchmesser bildete.

1) K. v. Plessen, Greifswalder Dissertation. p. 37. 1901.

Mittels eines Drahtes und eines Hakens konnte der Fallkörper an einem quer über die Öffnung des Wasserbehälters gespannten Bindfaden aufgehängt werden. An einem zweiten Haken an der Kugel konnte man Drahtstücke beliebig aufhängen, wodurch das Gewicht der Kugel, die, unbeschwert, in Wasser emporstieg, vergrößert werden konnte.

Bei den verschiedenen Versuchen hing der Senkkörper bald in der oberen Hälfte des Wasserbehälters (vgl. Fig. 1), bald in der unteren, bald in der Mitte. Da bei diesen Versuchen die Ausschläge oft so groß waren, daß zu befürchten war, die beiden Enden des Wagebalkens würden an die Arretierungsvorrichtung anstoßen, wurde eine Flüssigkeitsdämpfung an der rechten Wageschale angebracht.

Nachdem der Fallkörper an dem Bindfaden aufgehängt und das Wasser in dem Behälter vollständig zur Ruhe gekommen war, wurde die Arretierung der Wage gelöst und äquilibriert. Dann wurde der Bindfaden durchschnitten; der Körper fiel in einem Abstand von 17 cm am Senkkörper vorbei; der Zeiger der Wage bewegte sich sofort nach dem Durchschneiden des Bindfadens langsam im Sinne einer Gewichtsverminderung des Senkkörpers und gab dann einen großen ebenso gerichteten Ausschlag in dem Augenblick, als die fallende Kugel an dem Senkkörper vorbeifiel; die Wage ging auf die ursprüngliche Einstellung zurück, nachdem der Körper am Boden angelangt und das Wasser wieder zur Ruhe gekommen war.

Diese oft wiederholten Versuche zeigen also, daß der Auftrieb auch durch einen einzelnen mit genügend großer Reibung fallenden Körper vergrößert wird. Die Größe der Wirkung wächst mit der Geschwindigkeit, welche die fallende Kugel beim Vorbeigehen am Senkkörper erlangt hat. Dies wurde nachgewiesen durch eine Reihe von Versuchen, bei denen in der beschriebenen Weise das Gewicht des Fallkörpers so variiert wurde, daß die Fallzeit bis zum Boden sich zwischen 12,2 und 2,6 Sek. änderte.

Es liegt nun die Frage nahe: wird der Auftrieb verringert, wenn die Kugel emporsteigt?

Um dies zu untersuchen, wurde das Gewicht der Kugel durch Wegnahme einiger der erwähnten Beschwerungsstücke

so lange vermindert, bis sie im Wasser langsam emporstieg. Der Wasserbehälter wurde hohl gestellt, so daß ein Elektromagnet unter dem Boden die Kugel bis zum Versuch festhalten konnte. Wie erwartet, wurde der Senkkörper scheinbar schwerer, sobald die emporsteigende Kugel an ihm vorbeipassierte. *Durch die emporsteigende Kugel wird also der Auftrieb verringert.* Die Größe dieser Verringerung hängt, wie die Versuche ebenfalls erkennen lassen, von der im Augenblick des Vorbeiganges der Kugel am Senkkörper erlangten Geschwindigkeit der ersteren ab.

Versuche mit einer fallenden, an der Stelle des Senkkörpers durchlochten Platte oder einem ebensolchen Sieb hatten, abgesehen von Komplikationen, dieselben Resultate.

2. Erklärung dieser Versuche.

Wie sind die Veränderungen des Auftriebes bei der Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit zu erklären? Hydrodynamisch, durch das Auftreffen der Stromlinien der Flüssigkeit auf den Senkkörper und Mitnahme desselben infolge der Reibung.

Der Verlauf der Stromlinien für den Fall, daß eine Kugel sich in einer Flüssigkeit gleichförmig bewegt, läßt sich ableiten in weiterer Verfolgung der Entwickelungen Kirchhoffs in seinen Vorlesungen über Mechanik, 18. Vorlesung, § 3. p. 222. 2. Aufl. Diese Ausführung, die mir Hr. Prof. Richarz zur Verfügung gestellt hat, habe ich in meiner Dissertation auf p. 77—84 gebracht. Das Resultat ergibt Kurven, die außer den physikalischen Stromlinien in der Flüssigkeit auch deren analytische Fortsetzungen im Inneren der Kugel darstellen. Die letztere ist in Fig. 2 als Kreis um den Mittelpunkt der ganzen Zeichnung angegeben, z als ihre Bewegungsrichtung. Die Stromlinien sind Kreisen ähnlich, deren Mittelpunkte auf der $\pm\,\varrho$-Achse liegen, und die alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, die aber in der z-Richtung etwas zusammengedrückt sind. Im wesentlichen wird der Verlauf der Stromlinien auch derselbe sein, wenn der Senkkörper c in der Flüssigkeit hängt. Auf ihn treffen dann die Stromlinien von unten her, gehen um ihn herum und treiben ihn vermöge der Reibung in die Höhe, wodurch der Auftrieb scheinbar ver-

größert wird. Dies gilt aber nur für die Zeit des Vorbeigehens der Kugel am Senkkörper und später. Denn solange der Senkkörper sich noch unterhalb der fallenden Kugel be-

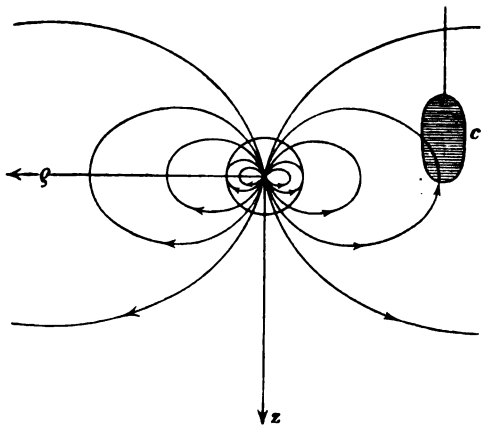


Fig. 2.

findet, kann er von oben her durch Stromlinien getroffen werden, die eine Wirkung im entgegengesetzten Sinn hervorrufen würden.

Nun ist aber die Dichtigkeit der Stromlinien nahe an der sich bewegenden Kugel größer, als in weiterer Entfernung von ihr. Infolgedessen ist für die Gesamtwirkung der sich bewegenden Kugel auf den Senkkörper maßgebend die Wirkung um die Zeit des Vorbeigehens bei größter Annäherung beider. Aus demselben Grunde treffen auch die vorstehenden Überlegungen zu, obwohl die Stromlinien nur für einen Augenblick gelten; sie wandern mit der Kugel. Die *Bahnen* sind andere und müßten nach der Lagrangeschen Hydrodynamik ermittelt werden.[1])

Wenn wir uns zum Schlusse fragen: Wieweit stimmt die Analogie einer fallenden Kugel mit einer sich setzenden Suspension, so ist zu bemerken: Alles Nichtstationäre in der Erscheinung ist nur ein hinkender Vergleich mit den Suspen-

1) Man vgl. V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. p. 51. Leipzig 1900.

sionen. Die durch *eine* fallende Kugel erzielte momentane Änderung des Auftriebes könnte aber annähernd stationär gemacht werden dadurch, daß man schnell wiederholt einzelne Kugeln fallen ließe. Solche Versuche wurden nicht ausgeführt, weil sich ihr Resultat mit Sicherheit voraussagen läßt, daß nämlich statt eines einzelnen aufwärts gerichteten Stoßes auf den Senkkörper eine konstante Auftriebsvermehrung eintreten muß.

Bei einer kontinuierlichen Reihe von vielen über- und nebeneinander befindlichen Kugeln, welche mit Reibung in einer Flüssigkeit fallen, ist der aufwärts gerichtete Druck auf eine ruhende Kugel (welcher Druck auch nur vermöge der Reibung zustande kommt) berechenbar.[1]) Das Resultat *muß*, vorausgesetzt, daß nicht ein wesentlicher Umstand außer acht gelassen wäre, mit dem Vorstehenden übereinstimmen. Die Durchführung dieser Theorie ist in Aussicht genommen. Ein Zusammenhang ist schon angedeutet in dem Resultat von Einstein[2]), daß die innere Reibung einer Flüssigkeit abhängig ist von dem Vorhandensein suspendierter Teilchen.

3. Schluß auf Suspensionen.

Wir wollen nun die durch diese Versuche gelieferte Erkenntnis dazu benutzen, die Art und Weise des Zustandekommens der *Einwirkung suspendierter Teilchen auf den Auftrieb zu erklären:*

Die einzelnen Teilchen fallen langsam und mit großer Reibung in der Flüssigkeit; sie drücken dadurch auf das darunter befindliche Suspensionsmittel, das durch die Zwischenräume, die die Teilchen zwischen sich lassen, auszuweichen sucht. Es entsteht dabei in der Flüssigkeit eine kontinuierliche Strömung nach oben, die vermöge der Reibung das Aräometer erfaßt und dauernd in die Höhe drückt, so daß es

---

1) Lamb-Reiff, Einleitung in die Hydrodynamik. p. 317 bez. 320ff.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 19. p. 300. 1906: „Werden in einer Flüssigkeit sehr kleine starre Kugeln suspendiert, so wächst dadurch der Koeffizient der inneren Reibung um einen Bruchteil, der gleich ist dem Gesamtvolumen der in der Volumeinheit suspendierten Kugeln, vorausgesetzt, daß dieses Gesamtvolumen sehr klein ist."

nicht so tief einsinkt wie in reines Wasser, frei von suspendierten Teilchen.

Bewegen sich die suspendierten Teilchen aufwärts, wie die Butterkügelchen in der Milch, so bleiben die Überlegungen prinzipiell dieselben; die Einwirkung auf den Auftrieb wird dann im entgegengesetzten Sinn stattfinden.

Zum Mechanismus der Druckübertragung von den Teilchen auf den Senkkörper ist mithin in der Tat Bewegung der Teilchen erforderlich. Die vorhandene Bewegung tritt also noch als wesentliches Moment hinzu zu der vernichteten Beschleunigung, deren ursächliche Bedeutung für den Druck der Teilchen auf die Flüssigkeiten in den Abschnitten I und II erkannt und nachgewiesen wurde.

Nachdem so unsere Fragen eine vollständige Beantwortung gefunden haben, wollen wir zum Schluß noch eine ganz allgemeine Überlegung anstellen, die uns ebenfalls wieder zeigt, wie die Reibung der maßgebende Faktor ist. Wir können unsere Frage dahin stellen: Welches spezifische Gewicht muß ein fester Körper haben, damit er im Inneren einer Suspension schwebt? Diese Gleichgewichtsfrage können wir nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen beantworten. Verschieben wir den festen Körper in der Flüssigkeit, so kommt für die Arbeit der Schwere alles darauf an, ob die suspendierten Teilchen völlig *mit* der Flüssigkeit sich verschieben und an Stelle des festen Körpers treten, oder nicht. Ersteres ist der Fall bei hinreichend großer Reibung; bei ihr also kommen die Teilchen mit ihrem vollen Gewicht in Betracht.

Marburg i. H., Physik. Institut, April 1907.

(Eingegangen 9. Mai 1907).

---

8. *Theorie der gekrümmten Kapillarschicht; von G. Bakker.*

§ 1. Die Gleichungen von Lord Kelvin.

In diesen Annalen [1]) habe ich gezeigt, daß in einer *ebenen* Kapillarschicht einer Flüssigkeit, welche nur in Berührung mit ihrem gesättigten Dampf ist, der hydrostatische Druck in einer Richtung *senkrecht* zu ihrer Oberfläche dem Dampfdruck (p_1) gleich ist. Der hydrostatische Druck p_2 in einer Richtung *parallel* ihrer Oberfläche änderte sich dagegen von Punkt zu Punkt und hätte also einen Gradient. Die Ab-

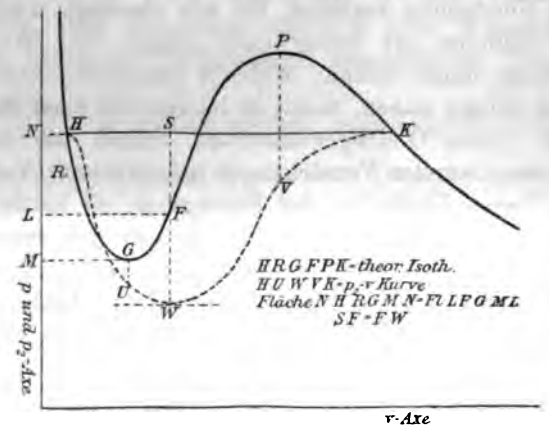


Fig. 1.

hängigkeit zwischen diesem Druck p_2 und $1/\varrho$, wenn ϱ die Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht darstellt, würde gegeben durch die Kurve $HUWVK$ der Fig. 1, wo die Kurve $HGFPK$ die theoretische Isotherme von Thomson-van der Waals darstellt. Wir wollen nun diese Betrachtungen ausdehnen auf eine *kugelschalförmige* Kapillar-

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 40 u. 61. 1906.

schicht. Hierzu können wir z. B. erstens eine kugelförmige Dampfblase im Innern einer Flüssigkeit betrachten. Die Kapillarschicht ringsum des Dampfes ist in diesem Falle eine kugelförmige Schale. Die Oberfläche der Kapillarschicht ist deshalb *konkav nach der des Dampfes hin.* Da die Kapillarkräfte nur auf unmeßbar kleine Abstände wirken, so soll das Potential in einem Punkte im Innern der Flüssigkeit nur abhängen von der Materie innerhalb einer Wirkungssphäre, deren Zentrum der betrachtete Punkt ist. In einem Punkt eines homogenen Teiles der Flüssigkeit ist also das Potential der Dichte in dem betrachteten Punkte proportional, und ist für die Potentialfunktion der Kräfte zwischen den *Elementen* des betrachteten Agens die Funktion:

$$-f\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$$

angewiesen. Das habe ich früher[1]) auf folgende Weise gezeigt. Da das Potential V der Dichte in dem betrachteten Punkt proportional ist, so haben wir im Inneren der Flüssigkeit:

$$V = -C\varrho,$$

wo C eine Konstante und ϱ die Dichte in dem betrachteten Punkt darstellt. Sind q und f neue Konstanten, so können wir auch setzen:

$$q^2 V = -4\pi f\varrho,$$

was für die folgenden Rechnungen bequemer ist.

Die Kraft ist im Inneren des homogenen Agens (wir wollen es in der Folge Flüssigkeit nennen) Null, deshalb:

$$-\frac{dV}{dx} = 0, \quad -\frac{dV}{dy} = 0, \quad -\frac{dV}{dz} = 0,$$

und auch:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta^2 V = 0.$$

Denken wir uns, daß die Flüssigkeit die Gestalt eines Würfels hat, und wählen wir ein Koordinatensystem, dessen Achsen durch den Mittelpunkt des Würfels gehen, während sie den Kanten parallel laufen. Dann können wir für einen Punkt

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 33. p. 485 u. 486. 1900.

außerhalb des Würfels über eine bestimmte Entfernung von der Kante die Kraftlinien als parallel und senkrecht zu den Seitenflächen betrachten. Wir haben also z. B. für einen Punkt auf der positiven Seite der X-Achse in unmittelbarer Nähe außerhalb des Würfels:

$$-\frac{dV}{dy}=0 \quad \text{und} \quad -\frac{dV}{dz}=0 \quad \text{und} \quad -\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

In einer Richtung parallel der positiven X-Achse muß das Potential schnell bis zu Null abnehmen. Eine einfache (vielleicht die einfachste) Funktion, welche dieser Forderung genügt, ist Ae^{-qx}, wenn nur q groß genug gewählt wird. Also haben wir, wenn

$$\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0 \quad \text{und} \quad \varrho=0$$

$$V=Ae^{-qx},$$

oder durch zweimalige Differentiation:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=q^2V.$$

Auf ähnliche Weise zeigen wir, wenn

$$\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{d^2V}{dx^2}=0 \quad \text{und} \quad \varrho=0,$$

daß

$$\frac{d^2V}{dy^2}=q^2V \text{ etc.}$$

Weiter fanden wir schon, daß, wenn ϱ von Null verschieden ist, und

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

$$q^2V=-4\pi f\varrho.$$

Alle diese Forderungen lassen sich nun als eine einzige Differentialgleichung schreiben:

$$\Delta^2V=q^2V+4\pi f\varrho. \tag{1}$$

L. c. habe ich nun folgenden Satz bewiesen:

Ist irgend ein homogenes Massensystem gegeben, und ist ferner V eine im ganzen Raume gegebene Funktion von x, y, z, welche folgenden drei Bedingungen genügt:

1. V und seine ersten Derivierten nach x, y, z **sind überall stetig;**

2. mit Ausnahme gewisser Stellen (die aber keine *räumliche* Ausdehnung haben) ist im ganzen Raum:

$$\Delta^2 V = q^2 V + 4\pi f \varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Massensystems im Punkte x, y, z bezeichnet;

3. die Produkte

$$xV, \quad yV, \quad zV, \quad x^2\frac{dV}{dx}, \quad y^2\frac{dV}{dy}, \quad z^2\frac{dV}{dz}$$

werden nirgends unendlich, so ist V das Potential des Massensystems in bezug auf den Punkt x, y, z, wenn

$$-f\frac{e^{-qr}}{r}$$

die Potentialfunktion darstellt.

In der Theorie der Kapillarität gibt es kein Agens, das über Flächen zerstreut oder in Punkten konzentriert ist. Ich habe aber dem Satz in seiner allgemeineren Fassung den Vorzug gegeben.

Auf die durch C. Neumann gefundene Eigenschaft dieser Potentialfunktion und das von mir umgekehrte Problem habe ich bereits verwiesen; ebenfalls auf die van der Waalsschen Betrachtungen.[1]) Alle diese Betrachtungen zusammen weisen die Funktion

$$-f\frac{e^{-qr}}{r}$$

an als Potentialfunktion der Kräfte zwischen den *Volumelementen* des Agens, das die Materie repräsentiert.

In der Gleichung (1) sind die Größen V und ϱ (Potential und Dichte) als Funktionen rechtwinkliger Koordinaten betrachtet. Indessen ist es bei verschiedenen Untersuchungen von Interesse, diese Gleichung auf folgende Weise durch eine andere zu ersetzen. Dazu leiten wir aber vorher eine Form ab für die potentielle Energie der Volumkräfte. Ist V das Potential, so wird die fragliche Größe:

$$2) \qquad W = \tfrac{1}{2}\int V\varrho\, d\tau \quad (d\tau = \text{Volumelement}).$$

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 43 u. 44. 1906.

Das Integral betrachten wir als eins über den ganzen Raum. Unsere Differentialgleichung

(1) $$\Delta^2 V = q^2 V + 4\pi f \varrho$$

gibt:

$$\varrho = \frac{\Delta^2 V - q^2 V}{4\pi f}.$$

Durch Substitution in (2) also:

$$W = \frac{1}{8\pi f}\int V \Delta^2 V \, d\tau - \frac{q^2}{8\pi f}\int V^2 \, d\tau.$$

Weiter ist:

$$\int V \Delta^2 V \, d\tau = \int V \frac{d^2 V}{dx^2} d\tau + \int V \frac{d^2 V}{dy^2} d\tau + \int V \frac{d^2 V}{dz^2} d\tau.$$

Durch partielle Integration wird:

$$\int V \frac{d^2 V}{dx^2} d\tau = \iint \frac{dV}{dx} V \, dy \, dz - \int \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Da V und dV/dx für unendliche Entfernung gleich Null werden, so können wir auf bekannte Weise zeigen, daß das Flächenintegral:

$$\iint \frac{dV}{dx} V \, dy \, dz$$

gleich Null ist.

$$\int V \frac{d^2 V}{dx^2} d\tau = -\int \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes und des analogen für

$$\int V \frac{d^2 V}{dy^2} d\tau \quad \text{und} \quad \int V \frac{d^2 V}{dz^2} d\tau$$

erhält man:

(2) $$W = -\frac{1}{8\pi f}\int \left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\} d\tau - \frac{q^2}{8\pi f}\int V^2 d\tau.$$

Die Energie pro Volumeinheit wird daher:

$$W_1 = -\frac{R^2 + q^2 V^2}{8\pi f},$$

wo R die Kraft auf die Masseneinheit bedeutet.

Die Größe q ist der reziproke Wert einer Linie. Setzen wir also $q = 1/\lambda$, dann geht die letzte Formel über in:

$$W_1 = -\frac{1}{8\pi f}\left(R^2 + \frac{V^2}{\lambda^2}\right).$$

Für $q=0$ oder $\lambda=\infty$ wird die Potentialfunktion $-f(e^{-qr}/r)$ die Newtonsche Funktion $-(f/r)$, und wir erhalten die bekannte Maxwellsche Formel

$$W_1 = -\frac{R^2}{8\pi f}$$

für ein elektrostatisches Feld.

Um nun Gleichung (1) durch eine andere zu ersetzen, zerteilen wir den ganzen Raum durch drei Systeme orthogonaler Flächen in Zellen. Diese Flächensysteme schneiden einander bekanntlich nach dem Satz von Dupin in Krümmungslinien.[1]) Nennen wir die Differentialen der Bogen dieser Krümmungslinien du, dv und dn. Für die Energie des betrachteten Agens

$$(2) \qquad W = -\frac{1}{8\pi f}\int R^2 d\tau - \frac{q^2}{8\pi f}\int V^2 d\tau$$

können wir auch schreiben:

$$W = -\frac{1}{8\pi f}\iiint\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2\right\} du\,dv\,dn$$
$$-\frac{q^2}{8\pi f}\iiint V^2\,du\,dv\,dn.$$

Die Variation der Energie wird also:

$$(3) \quad \begin{cases} \delta W = -\frac{1}{4\pi f}\iiint\left\{\frac{\partial V}{\partial u}\delta\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\delta\frac{\partial V}{\partial v}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\partial V}{\partial n}\delta\frac{\partial V}{\partial n}\right\} du\,dv\,dn \\ \qquad -\frac{q^2}{4\pi f}\iiint V\delta V\,du\,dv\,dn. \end{cases}$$

Setzen wir:

$$du\,dv = dS_1, \quad du\,dn = dS_2, \quad dv\,dn = dS_3,$$

so ist:

$$\iiint\frac{\partial V}{\partial u}\delta\frac{\partial V}{\partial u}\,dS_3\,du = \iiint\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial\delta V}{\partial u}\,du\,dS_3$$
$$= \iint\frac{\partial V}{\partial u}dS_3\,\delta V - \iiint\delta V\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial u}dS_3\right)}{\partial n}du.$$

---

1) Vgl. z. B. F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. 2. Aufl. p. 117.

Die Integrale beziehen sich auf den ganzen Raum, und das Flächenintegral wird deshalb Null. Durch Entwickelung der anderen Glieder des ersten Raumintegrals von (3) erhält man:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{4\pi f}\iiint \delta V \left\{ \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial u}\, dS_2\right)}{\partial u}\, du + \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial v}\, dS_3\right)}{\partial v}\, dv \right. \\ \left. + \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial n}\, dS_1\right)}{\partial n}\, dn \right\} \\ - \frac{q^2}{4\pi f}\iiint V\delta V\, du\, dv\, dn. \end{aligned}\right.$$

Betrachten wir nun das krummlinige Parallelepipedon, welches über den durch einen betrachteten Punkt gehenden Differentialen du, dv und dn konstruiert ist, und dessen Grundfläche $dS_1 = du\, dv$ zwischen vier Elementen von Krümmungslinien enthalten ist. Nennen wir das gegenüber dS_1 liegende Flächenelement dS_1', so wird, wenn man kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt:

$$\frac{\partial}{\partial n}(dS_1) = \frac{dS_1' - dS_1}{\partial n}.$$

Man erhält also:

$$(5)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial n}\, dS_1\right)}{\partial n}\, dn = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial n}}{\partial n}\, dS_1\, dn + \frac{\partial V}{\partial n}(dS_1' - dS_1).$$

Nun sind du, dv Elemente der Krümmungskurven im betrachteten Punkt der Fläche S_1. Deshalb:

$$(6)\quad dS_1 = du\, dv\left(1 + \frac{dn}{R_1}\right)\left(1 + \frac{dn}{R_2}\right) = dS_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) du\, dv\, dn.$$

Sind ferner dS_1 Elemente von Niveauflächen und dn Differentiale von Kraftlinien, so wird:

$$\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial v}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$

und man erhält aus (4) mittels (5) und (6):

$$(7)\quad \delta W = \frac{1}{4\pi f}\int \delta V \left\{ \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial n}}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - q^2 V \right\} d\tau$$

($d\tau$ = Raumelement).

Für die potentielle Energie hat man allgemein den Ausdruck:

$$W = \tfrac{1}{2}\int V\varrho\, d\tau .$$

Variiert man nun allein die Dichte, so ist:

$$\int V\partial\varrho\, d\tau = \int \varrho\,\partial V d\tau,$$

und

$$\delta W = \tfrac{1}{2}\int V\delta\varrho\, d\tau + \tfrac{1}{2}\int \varrho\,\delta V d\tau = \int \varrho\,\delta V d\tau. \tag{8}$$

Durch Gleichsetzung von (7) und (8):

$$\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial n}}{\partial n} + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n} = q^2 V + 4\pi f\varrho . \tag{9}$$

Für eine *homogene* Phase wird:

$$\frac{d^2V}{dh^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dh} = 0.$$

Deshalb ändert sich die Differentialgleichung für solch eine *homogene* Phase in:

$$V + 4\pi f\lambda^2\varrho = 0 .$$

Nach Gauss und van der Waals ist aber in diesem Falle:

$$V = -2a\varrho,$$

wo a den Koeffizient des Laplaceschen Ausdruckes für die (innere) Kohäsion (Molekulardruck) bedeutet. Deshalb:

$$2\pi f\lambda^2 = a.$$

Wir haben also für eine kugelförmig *konkave* Kapillarschicht:

$$\lambda^2\frac{d^2V}{dh^2} - \frac{2\lambda^2}{R}\frac{dV}{dh} = V + 2a\varrho, \tag{10}$$

wenn R der Radius der durch den betrachteten Punkt gelegten Kugelfläche von konstanter Dichte bedeutet und dh die Differentiale einer Strecke senkrecht auf die Oberfläche der kugelschalförmigen Kapillarschicht darstellt; positiv gerechnet in der Richtung:

Flüssigkeit ⟶ Dampf.

Ist $\mu = \int v\, dp$, wo p den Druck der *theoretischen Isotherme* bedeutet, für einen Punkt, welcher korrespondiert[1]) mit der

1) Ein Punkt der theoretischen Isotherme soll korrespondieren mit einem Punkt der Kapillarschicht, wenn das spezifische Volum des ersten Punktes denselben Wert hat als der reziproke Wert der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht.

Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht, so wird μ das thermodynamische Potential genannt; und ist μ_1 ihr Wert in der homogenen flüssigen Phase, welche die kugelschalförmige Kapillarschicht an der äußeren Seite begrenzt, so hat man auch hier wieder, wie schon früher von mir gezeigt worden ist[1]):

(11) $$V + 2a\varrho = \mu_1 - \mu,$$

und deshalb:

(10a) $$\lambda^2 \frac{d^2V}{dh^2} - \frac{2\lambda^2}{R}\frac{dV}{dh} = \mu_1 - \mu.$$

Da für die *homogenen* Phasen (Flüssigkeit und Dampf), welche die kugelschalförmige Kapillarschicht bez. an der äußeren und inneren Seite begrenzen, d^2V/dh^2 und dV/dh verschwinden, so sind bei Gleichgewicht und bei quasi-stationären Zuständen die Werte von μ in der flüssigen bez. dampfförmigen Phase einander gleich.

In Fig. 2 ist wieder $HGPK$ die theoretische Isotherme, und die rechtlinige Strecke HK ist die sogenannte empirische

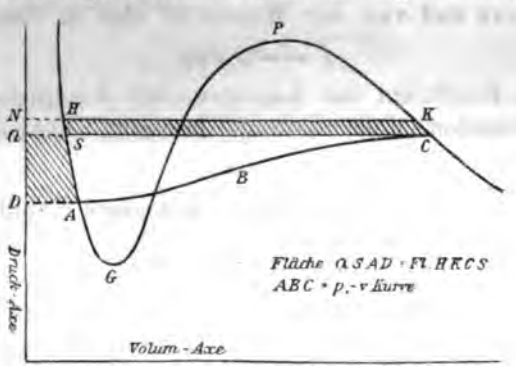


Fig. 2.

Isotherme. Fläche $NHADN$ stellt also für den Punkt A (mit dem entsprechend gesetzten Zeichen) den Wert von $\int v\,dp$ dar. Korrespondieren also die Punkte A und C mit den Punkten in den Grenzflächen der kugelschalförmigen Kapillarschicht, welche sie bez. an der äußeren und inneren Seite be-

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 49. 1906.

grenzen (die Kapillarschicht *umschließt* die Dampfblase), so hat man also:

$$\text{Fläche } NHADN = \text{Fläche } NKCQN.$$

(Weiter unten soll gezeigt werden, daß die Kurve, welche in der kugelschalförmigen Kapillarschicht die Beziehung zwischen p_1 und $v = 1/\varrho$ darstellt, wirklich eine Gestalt hat, wie durch Kurve ABC angedeutet ist. Ist die Kapillarschicht eben, so sind die Drucke senkrecht auf ihrer Oberfläche überall dem gewöhnlichen Dampfdruck gleich; A fällt in diesem Falle mit H, und C mit K zusammen.)

Setzen wir:

$$NH = v, \quad NK = v_2, \quad DA = v_1', \quad QC = v_2'$$

und betrachten wir angenähert $NHAD$ als ein Trapez, so hat man deshalb:

$$(12) \qquad (v_1 + v_1')(v_1 - p_{fl.}) = (v_2 + v_2')(p_1 - p_{df.}),$$

wo $p_{fl.}$ und $p_{df.}$ bez. die Drucke in den flüssigen und dampfförmigen Phasen in der Nähe der kugelschalförmigen Kapillarschicht bedeuten.

Durch Differentiation von (10a) erhält man weiter:

$$\lambda^2 d\frac{d^2V}{dh} - \frac{2\lambda^2}{R} d\frac{dV}{dh} = -v\,dp,$$

woraus, nach Substitution des Wertes von ϱ aus (11):

$$dp = -\frac{\lambda^4}{4a} d\left\{\frac{d^2V}{dh^2}\right\}^2 - \frac{\lambda^4}{2aR} d\left\{\frac{dV}{dh}\frac{d^2V}{dh^2}\right\} + \frac{\lambda^4}{aR^2} d\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2a} V d\frac{d^2V}{dh^2} + \frac{\lambda^2}{aR} V d\frac{dV}{dh}.$$

Nach Integration:

$$(13) \qquad p_{df.} - p_{fl.} = \frac{2}{R}\frac{\lambda^2}{2a}\int_1^2 \left(\frac{dV}{dh}\right)^2 dh,$$

wo nun aber R ein Mittelwert ist zwischen dem Wert des kleinsten und größten Radius der kugelförmigen Fläche, welche die kugelschalförmige Kapillarschicht begrenzen.

Für die Kohäsion, bez. *in der Richtung* und *senkrecht auf* der Richtung der Kraftlinien, fand ich[1]):

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 42. 1906.

$$S_1 = -\frac{1}{8\pi f}\left\{\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 - \frac{V^2}{\lambda^2}\right\},$$

$$S_2 = \frac{1}{8\pi f}\left\{\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 + \frac{V^2}{\lambda^2}\right\},$$

wo q durch $1/\lambda$ ersetzt ist (λ ist deshalb eine Strecke).

Da nun weiter:

$$S_2 - S_1 = p_1 - p_2 \text{ [1]},$$

so haben wir auch:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4\pi f}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2. \tag{14}$$

Nun war die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz oder dem Integral:

$$\int_1^2 (p_1 - p_2)\, dh,$$

die Oberflächenspannung oder die Kapillarkonstante H von Laplace.[2]) Wir können deshalb statt (13) schreiben:

$$p_{\text{df.}} - p_{\text{fl.}} = \frac{2H}{R}. \tag{15}$$

und erhalten mit Hilfe von (12) die Gleichungen von Lord Kelvin in der Gestalt:

$$p_{\text{df.}} = p_1 - \frac{v_1 + v_1'}{(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1')}\,\frac{2H}{R} \tag{16a}$$

und

$$p_{\text{fl.}} = p_1 - \frac{v_2 + v_2'}{(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1')}\,\frac{2H}{R}. \tag{16b}$$

§ 2. Die Kurven, welche den hydrostatischen Druck p_1 [3]) bez. p_2 darstellen in ihrer Abhängigkeit von einer Strecke h in der Richtung des Radius und in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert $v = 1/\varrho$ der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht.

Bestimmen wir nun erstens die Gestalt der Kurve, welche für die kugelschalförmige Kapillarschicht den hydrostatischen Druck p_1 in einer Richtung senkrecht auf die Oberfläche der

1) G. Bakker, l. c. p. 44.

2) G. Bakker, Ann. d. Phys. **14.** p. 612. 1904.

3) Also der Druck in der Richtung des Radius oder „in der Richtung der Dicke" der kugelschalförmigen Kapillarschicht, eine Größe, welche für eine *ebene* Kapillarschicht dem gewöhnlichen Dampfdruck gleich ist.

Schicht (in der Richtung des Radius also) darstellt in ihrer Abhängigkeit von einer Strecke h in derselben Richtung. Wir denken uns, daß die Kapillarschicht eine kugelförmige Dampfblase umhüllt, während sie selbst durch Flüssigkeit umgeben ist. Diese Strecke soll anfangen am Ende des äußeren Radius der kugelschalförmigen Kapillarschicht und enden am Ende des inneren Radius. Die ganze Strecke ist also die Dicke der Kapillarschicht und ihre Differentiale dh ist positiv in der Richtung Flüssigkeit–Dampf.

Bedeutet θ den thermischen Druck in einem Punkt der Kapillarschicht, so ist in jeder Richtung der hydrostatische Druck die Differenz zwischen θ und der Kohäsion. Senkrecht zur Kapillarschicht (also radial) hat man deshalb:

$$p_1 = \theta - S_1 .$$

Nun ist in der Richtung der Kraftlinien (vgl. oben):

$$S_1 = \frac{V^2}{4a} - \frac{\lambda^2}{4a}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 .$$

Also:

$$p_1 = \theta + \frac{\lambda^2}{4a}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 - \frac{V^2}{4a} .$$

Durch Differentiation:

$$\frac{dp_1}{dh} = \frac{d\theta}{dh} + \frac{\lambda^2}{2a}\frac{dV}{dh}\frac{d^2V}{dh^2} - \frac{V}{2a}\frac{dV}{dh} .$$

Weiter ist:

$$d\theta = -\varrho\, dV$$

und

$$\lambda^2 \frac{d^2V}{dh^2} - V - 2a\varrho = \frac{2\lambda^2}{R}\frac{dV}{dh} \quad \text{(vgl. oben)}. \tag{10}$$

Deshalb:

$$\frac{dp_1}{dh} = \frac{\lambda^2}{a}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi f}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 \cdot \frac{2}{R} = \frac{2(p_1 - p_2)}{R} . \tag{17}$$

Wir erhalten also den einfachen Satz:

Der Gradient des hydrostatischen Druckes p_1 in einem Punkt einer kugelschalförmigen Kapillarschicht, in einer Richtung senkrecht zu ihrer Oberfläche, ist das Produkt der Abweichung von dem Pascalschen Gesetz mit der Krümmung.

Ist die Krümmung Null, und die Kapillarschicht also eben, so erhält man das bekannte Resultat für eine *ebene* Kapillarschicht:

$$\frac{dp_1}{dh} = 0 \quad \text{oder} \quad p_1 = \text{Konstante} = \text{Dampfdruck}.$$

Durch Integration von (17) erhält man unmittelbar den Satz von Lord Kelvin:

$$p_{df.} - p_{fl.} = \frac{2}{R}\int_1^2 (p_1 - p_2)\, dh = \frac{2H}{R}.$$

Nun ist für jeden Punkt in der Kapillarschicht:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4\pi f}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2$$

und also:

$$p_1 > p_2$$

und deshalb immer:

$$\frac{dp_1}{dh} > 0.$$

Der hydrostatische Druck p_1 nimmt also von der flüssigen Phase bis zu der dampfförmigen Phase immer zu. Der Anfangswert $p_{fl.}$ wird gegeben durch die Ordinate von dem Punkt A, während der Endwert $p_{df.}$ durch die Ordinate von C gegeben ist (Fig. 3).

Ganz auf dieselbe Weise, wie ich früher für eine ebene Kapillarschicht gezeigt habe [1]), kann man wieder beweisen,

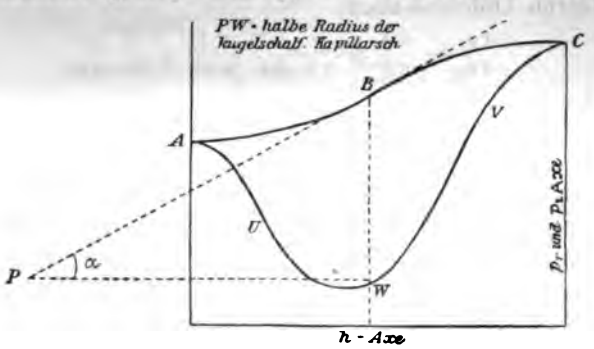


Fig. 3.

daß die Kurve, welche das Potential V als Funktion von h darstellt, *einen* Wendepunkt hat, oder daß dV/dh *ein* Maximum hat. Da nun dp_1/dh zu $1/R\,(dV/dh)^2$ proportional ist (vgl. die Gleichung (17)), so soll also die Kurve, welche p_1 als Funktion von h darstellt, ebenso einen Wendepunkt haben,

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 15. p. 545. 1904.

und die $p_1 - h$-Kurve hat eine Gestalt, wie in Fig. 3 die Kurve $A\,B\,C$.

Durch Multiplikation mit dh/dv, wo $v = 1/\varrho$ gleich den reziproken Wert der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht bedeutet, findet man aus (17)

$$\frac{dp_1}{dv} = \frac{1}{4\pi f}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 \cdot \frac{2}{R}\frac{dh}{dv}.$$

Wie ich in diesen Annalen[1]) zeigte, ist es wahrscheinlich (fast selbstverständlich), daß für alle Punkte einer Kapillarschicht

$$\frac{dv}{dh} = \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dh}$$

dasselbe Zeichen hat. Die Natur der Kurve, welche p_1 in ihrer Abhängigkeit von $v = 1/\varrho$ darstellt, ist also dieselbe wie für die zuletzt betrachtete Kurve, und auf diese Weise findet man die Kurve $A\,B\,C$ in Fig. 2. Die p_1-Kurve ist also in Zusammenhang gebracht mit der theoretischen Isotherme $HGVK$; HK ist die sogenannte empirische Isotherme.

§ 3. Die Kurve, welche den hydrostatischen Druck p_2 in einer kugelschalförmigen Kapillarschicht, in einer Richtung senkrecht zu dem Radius, in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte ($v = 1/\varrho$) in dem betrachteten Punkt darstellt.[2])

Der Radius der kugelschalförmigen Kapillarschicht gibt die Richtung der Kraftlinien an. Der Druck p_2 ist deshalb in einer Richtung senkrecht auf die Kraftlinien. Ist θ der thermische Druck und S_2 die Kohäsion in der angedeuteten Richtung, so hat man wieder:

$$p_2 = \theta - S_2.$$

Nun ist in einer Richtung senkrecht zu den Kraftlinien die Kohäsion gegeben durch die Formel:

$$S_2 = \frac{1}{8\pi f}\left\{\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 + \frac{V^2}{\lambda^2}\right\}.$$ [3])

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 17. p. 478. 1905.

2) In dem Falle, wo der Radius der Oberfläche der Kapillarschicht „unendlich" groß wird, und deshalb die Schicht als eben betrachtet werden kann, wird p_2 also der hydrostatische Druck parallel ihrer Oberfläche.

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 14. p. 619. 1904.

Also:

$$p_2 = \theta - \frac{1}{8\pi f}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 - \frac{V^2}{8\pi f\lambda^2}. \tag{18}$$

Weiter war *in* der Richtung der Kraftlinien[1]):

$$S_2 = \frac{1}{8\pi f}\left\{\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 + \frac{V^2}{\lambda^2}\right\}.$$

Für den hydrostatischen Druck in dieser Richtung hat man deshalb:

$$p_1 = \theta + \frac{\lambda^2}{4a}\left(\frac{dV}{dh}\right)^2 - \frac{V^2}{4a}, \tag{19}$$

denn:

$$a = 2\pi f\lambda^2 \text{ (vgl. oben p. 539).}$$

Wir erhalten also:

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = \theta - \frac{V^2}{4a}. \tag{20}$$

$p_1 + p_2/2$ ist die halbe Summe der hydrostatischen Drucke bez. *in* der Richtung und *senkrecht zu* der Richtung der Kraftlinien.[2]) Wir wollen diese Größe durch $\mathfrak{p}$ andeuten. Also:

$$\mathfrak{p} = \theta - \frac{V^2}{4a}. \tag{20a}$$

Durch Differentiation von (20a):

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dv} = \frac{d\theta}{dv} - \frac{2V}{4a}\frac{dV}{dv} = \frac{d\theta}{dv}\left(1 + \frac{Vv}{2a}\right),$$

denn:

$$d\theta = -\varrho\, dV.$$

Weiter ist (vgl. oben Gleichung (11)):

$$V + 2a\varrho = \mu_1 - \mu. \tag{11}$$

Also:

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dv} = \frac{d\theta}{dv}\frac{\mu_1 - \mu}{2a\varrho}.$$

μ ist das thermodynamische Potential der homogenen Phase, welche mit der Densität in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht korrespondiert. Wenn der Index 1 Bezug hat auf die homogene Phase der Flüssigkeit, so ist also:

$$\mu - \mu_1 = \int_1 v\, dp.$$

---

1) Vgl. oben § 2.

2) p_1 und p_2 können auch bez. betrachtet werden als der Maximalwert und der Minimalwert des hydrostatischen Druckes in dem betrachteten Punkt.

Konstruieren wir also in Fig. 4 die Kurve, welche den Mittelwert $\mathfrak{p}$ in ihrer Abhängigkeit zu $v = 1/\varrho$ darstellt, so hat diese Kurve AEC ihr Minimum gerade unter dem Punkt E der theoretischen Isotherme von James Thomson, wo $\mu = \mu_1$ oder Fläche $DAGM$ gleich Fläche $LEFGM$. Man kann aber noch weiter gehen und zeigen, daß das Minimum der Kurve AEC zusammenfällt mit dem genannten Punkte der theoretischen Isotherme. Wenn n. l. $\mu = \mu_1$, so ist zufolge Gleichung (11):

$$V = -2a\varrho$$

und Gleichung (20a) wird:

(21) $$\mathfrak{p} = \theta - a\varrho^2.$$

Andererseits ist aber für die theoretische Isotherme:

$$p = \theta - a\varrho^2.$$

Deshalb:

$$\mathfrak{p} = p.$$

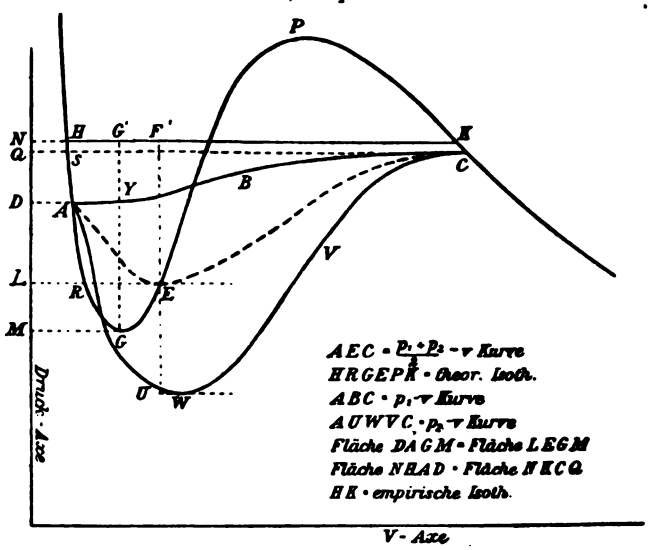


Fig. 4.

Für die Abhängigkeit von p_2 und k erhalten wir eine ähnliche Kurve, wie die Kurve $AUWVC$ in Fig. 4. Die entsprechende Kurve ist in Fig. 3 durch dieselben Buchstaben angedeutet. In dieser Fig. 3 ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BW}{PW} = \frac{p_1 - p_2}{PW}.$$

Andererseits haben wir:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dp_1}{dh} = \frac{2(p_1 - p_2)}{R}.$$

Deshalb:

$$R = \tfrac{1}{2} PW.$$

PW ist also der „Durchmesser" der kugelschalförmigen Kapillarschicht, welche zu dem Punktepaar A, C der Fig. 4 gehört.

Betrachten wir wieder Fig. 3, so kann man für jedes Punktepaar auf den Kurven ABC und $AUWVC$, welche dieselbe Abszisse haben, das entsprechende Dreieck PBW konstruieren. Man findet dann immer:

$$R = \tfrac{1}{2} PW.$$

Für eine *ebene* Kapillarschicht wird

$$p_1 = \text{Dampfdruck} = \text{Konstante}$$

und die Kurven ABC in den Figg. 3 und 4 werden Rechte der h- bez. v-Achse parallel und gehörigerweise:

$$PW = 2R = \infty.$$

§ 4. Die Kapillarschicht, welche ein Flüssigkeitströpfchen umhüllt.

Bis jetzt haben wir eine kugelförmige Dampfmasse betrachtet, welche durch Flüssigkeit umgeben war. Betrachten wir nun eine kugelförmige Flüssigkeitsmasse umgeben von Dampf. Die Kapillarschicht, welche die Flüssigkeitsmasse umhüllt, ist nun *konvex nach dem Dampf hin* und die Differentialgleichung für das Potential der Kohäsionskräfte wird statt (10a) oben:

$$\lambda^2 \frac{d^2 V}{dh^2} + \frac{2\lambda^2}{R}\frac{dV}{dh} = \mu_1 - \mu. \tag{22}$$

und die Differenz zwischen $p_{df.}$ und $p_{fl.}$ findet man aus (13) durch Änderung von R in $-R$. Also:

$$p_{fl.} - p_{df.} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\lambda^2}{2a} \int_1^2 \left(\frac{dV}{dh}\right)^2 dh = \frac{2H}{R}. \tag{23}$$

Hier ist deshalb bekanntlich der Druck in der Flüssigkeit größer als der Druck in dem Dampf. In Gleichung (22) ist μ_1 das thermodynamische Potential in der kugelförmigen Flüssigkeitsmasse, und auf dieselbe Weise als oben findet man wieder, daß in der Flüssigkeit und in dem Dampf, wo:

$$\frac{d^2 V}{dh^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dh} = 0,$$

das thermodynamische Potential denselben Wert hat.

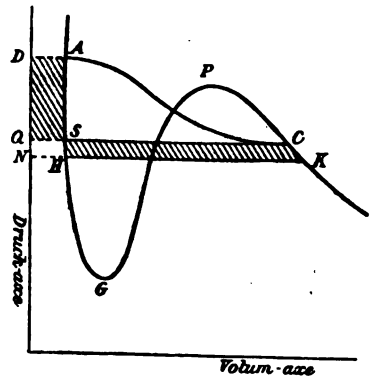


Fig. 5.

Nur *innerhalb der kugelschalförmigen Kapillarschicht*, welche die kugelförmige Flüssigkeitsmasse begrenzt, *ändert* sich das thermodynamische Potential μ.

Die Gleichungen von Lord Kelvin für $p_{fl.}$ und $p_{df.}$ erhält man, wenn man in (16a) und (16b) R durch $-R$ ersetzt. Sowohl $p_{fl.}$ wie $p_{df.}$ ist nun *größer* als der gewöhnliche Dampfdruck. Sind A und C in der Fig. 5 die Punkte, welche auf der Isotherme bez. korrespondieren mit den Volumina der Flüssigkeit und des Dampfes (die Flüssigkeit und der Dampf ist also bez. innerhalb und außerhalb der kugelschalförmigen Kapillarschicht), so gibt die Gleichheit der thermodynamischen Potentiale:

$$\text{Fläche } DASQ = \text{Fläche } SCKH,$$

wo wieder HK das geradlinige Stück der empirischen Isotherme darstellt. Leicht finden wir die Gleichung, welche mit (12) korrespondiert.

Den Gradient des hydrostatischen Druckes p_1 senkrecht auf der Oberfläche der Kapillarschicht (also in der Richtung der Kraftlinien), welche die kugelförmige Flüssigkeitsmasse umhüllt, erhalten wir aus (17), wenn wir wieder R durch $-R$ ersetzen. Deshalb:

$$\frac{dp_1}{dh} = -\frac{2(p_1 - p_2)}{R}. \tag{24}$$

Da nun auch hier wieder die Abweichung $p_1 - p_2$ von dem

Pascalschen Gesetz dem Quadrat der Kraftintensität proportional ist, wird dp_1/dh negativ.

Daß die $p_1 - h$-Kurve einen Wendepunkt hat, läßt sich wieder auf dieselbe Weise wie oben zeigen. Nimmt die Dichte immer stetig ab, wenn man Punkte betrachtet in der Richtung:

Flüssigkeit ⟶ Dampf,

d. h. wenn der Gradient $d\varrho/dh$ negativ oder der Gradient dv/dh positiv ist, so hat also die Kurve ABC durch den hydrostatischen Druck p_1 senkrecht zur Oberfläche der kugelschalförmigen Kapillarschicht wirklich eine Gestalt, wie in Fig. 5 dargestellt ist. Durch Integration von (24) erhält man wieder die Gleichung von Lord Kelvin:

$$p_{df.} - p_{fl.} = -\frac{2H}{R}.$$

Die $p_2 - v$-Kurve kann wieder auf dieselbe Weise studiert werden wie oben.

§ 5. Zusammenfassung der Betrachtungen über kugelförmige Dampfblasen und kugelförmige Flüssigkeitströpfchen.

Fassen wir erstens die Betrachtungen über die $p_1 - v$-Kurven in *einer* Figur zusammen, und bedenken wir, daß bei den letzten Betrachtungen der größten Werte für den Dampfdruck $p_{df.}$ korrespondiert mit dem Punkt P in der Fig. 5, und daß in dem ersten Falle, wo *der Dampf* sich im Innern der Kapillarschicht befindet, Punkt G in der Fig. 5 korrespondiert mit dem kleinsten Werte des Druckes *in der Flüssigkeit, welche nun den Dampf* umhüllt, so erhalten wir die folgende Fig. 6 für die gesamten $p_1 - v$-Kurven.

Die Kurve $A_1 C_1$ hat Bezug auf eine Dampfblase, wobei der Druck *in der Flüssigkeit* rings um die Blase ein Minimum ist. Den zugehörigen Radius der kugelförmigen Blase berechnet man aus (16b):

$$R_{df.} = \frac{v_2 + v_2')}{v_2 + v_2' - (v_1 + v_1')} \frac{2H}{p_1 - p_{min.}}, \tag{25}$$

wo $p_{fl.} = p_{min.}$ korrespondiert mit dem Punkt A_1. Es ist aber fraglich, ob die Abweichung des Pascalschen Gesetzes schon

ihren Maximumwert angenommen hat und H also die Kapillarkonstante von Laplace darstellt. Wir schreiben darum:

$$R_{\text{df.}} = \frac{v_2 + v_2'}{v_2 + v_2' - (v_1 + v_1')} \frac{2H'}{p_1 - p_{\text{min.}}}.$$

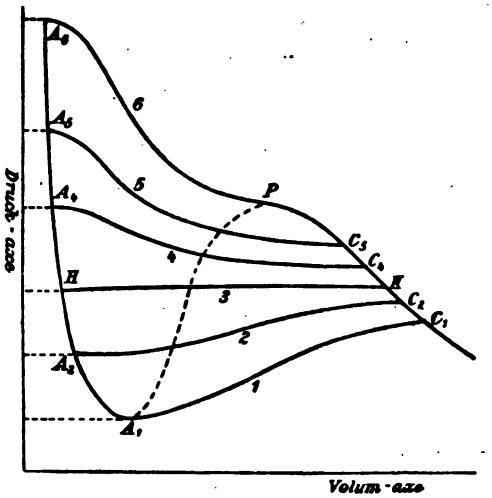


Fig. 6.

Wählen wir ein bestimmtes Beispiel, die absolute Temperatur sei:

$$T = \frac{27}{32} T_k.$$

Für diese Temperatur fand ich[1]), daß die Dicke h einer *ebenen* Kapillarschicht gegeben werden kann durch:

$$h = \frac{3H}{2p_1}, \tag{26}$$

wo H die Laplacesche Konstante und p_1 den Dampfdruck darstellt.

Nach der Gleichung von van der Waals[2]) tangiert bei dieser Temperatur die Isotherme die Volumenachse, und deshalb:

$$p_{\text{min.}} = 0.$$

Weiter ist in diesem Falle der Quotient v_2/v_1 von der Größenordnung 19.

---

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chem. 51. p. 358 u. 361. 1905.
2) J. D. van der Waals, Kontinuität, p. 105. 1899.

Deshalb:

$$(26) \qquad R_{df.} = \frac{19}{18} \cdot \frac{2H'}{p_1} = \frac{19}{18} \cdot \frac{2H'}{\frac{3H}{2h}} = \text{ungefähr } \frac{4}{3}\frac{H'}{H}h.$$

Andererseits wissen wir, daß der Radius der Dampfblase (Mittelwert der Radii der zwei Kugelflächen, welche die kugelschalförmige Kapillarschicht begrenzen) *wenigstens* dem mittleren Abstand zwischen zwei Dampfmolekeln gleich sein muß, denn eine Dampfblase ist eine *Sammlung* von Molekeln. Da weiter die Kohäsion des Dampfes sehr geringfügig ist, ist dieser mittlere Abstand von der Größenordnung der Wirkungssphäre.

Deshalb:

$$R_{df.} \geqq \text{Radius der Wirkungssphäre.}$$

In der Gleichung (26) darf also H' nur wenig von H differieren. In jedem Falle muß H' von derselben Größenordnung sein als H.

Die Kurve $A_6 C_6$ ist der andere Grenzfall. Sie hat Bezug auf ein Flüssigkeitströpfchen, umgeben von Dampf. Auf ähnliche Weise, als $R_{df.}$ bezeichnet ist, findet man für diesen Fall:

$$(27) \qquad R_{fl.} = \frac{v_1 + v_1''}{v_2 + v_2'' - (v_1 + v_1')} \frac{2H''}{p_{max.} - p_1}.$$

H'' ist auch hier nicht notwendig die gewöhnlich betrachtete Kapillarkonstante von Laplace. v_1 und v_2 sind bez. die Abszissen von H und K in der Fig. 6, und v_1'' und v_2'' sind bez. die Abszissen von A_6 und P. Für eine $p_1 - v$-Kurve in der Nähe von HK dagegen werden die Differenzen $p_{df.} - p_1$ und $p_1 - p_{fl.}$ sehr klein, und können H' und H'' durch H ersetzt werden; $R_{fl.}$ und $R_{df.}$ werden also sehr groß, um bei der Limite, wenn A_4 und C_4 oder A_2 und C_2 also mit H und K zusammenfallen, unendlich zu werden, wobei die gekrümmte kugelschalförmige Kapillarschicht in eine ebene übergeht.

Bei jedem Punkt des Kurvenstückes PK der theoretischen Isotherme (Fig. 6) haben wir uns ein Flüssigkeitströpfchen von einem bestimmten Durchmesser gedacht. Ist z. B. C_5 der betrachtete Punkt, so geben bez. die Ordinate und die Abszisse dieses Punktes den Druck $p_{df.}$ und den reziproken Wert der

Dichte des Dampfes an, welcher das Flüssigkeitströpfchen umhüllt, während der Radius des Tröpfchens durch die Gleichung:

$$R_{fl.} = \frac{2H}{p_{fl.} - p_{df.}}.$$

gefunden wird.

Der Druck $p_{fl.}$ der *Flüssigkeit innerhalb* des Tröpfchens wird angegeben durch die Ordinate des Punktes A_5, wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat als in dem Punkt C_5. Der reziproke Wert der Dichte im Innern des Flüssigkeitströpfchens wird weiter durch die Abszisse von A_5 gegeben. Eine ähnliche Betrachtung gilt für jedes Punktepaar unterhalb des geradlinigen Stückes der empirischen Isotherme. Bei jedem Punkt des Kurvenstückes HA_1 der Fig. 6 denken wir uns nun eine kugelförmige Dampfblase. Der Druck und der reziproke Wert der Dichte der *Flüssigkeit*, welche die Dampfblase umhüllt, sind bez. gegeben durch die Ordinate und die Abszisse des betrachteten Punktes, z. B. A_2; die Koordinaten des Punktes C_2, wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat als für den Punkt A_2, geben wieder die entsprechende Größe für die Dampfblase, während der Radius der Dampfblase gegeben ist durch:

$$R_{df.} = \frac{2H}{p_{df.} - p_{fl.}}.$$

Ebenso wie bei einer ebenen Kapillarschicht fanden wir, daß für einen Punkt in einer kugelschalförmigen Kapillarschicht der hydrostatische Druck bez. ein Maximum und Minimum ist *in der Richtung* und *senkrecht* zu der Richtung der Kraftlinien. Die Kurve AEC (Fig. 4), welche den Mittelwert:

$$\mathfrak{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

dieser Drucke in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte in dem betrachteten Punkt darstellt, schneidet, wie wir fanden, die theoretische Isotherme in einem Punkt E (Fig. 4), wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat als in den Punkten A und C, und *in diesem Punkte hat* die $\mathfrak{p} - v$-Kurve AEC gerade ihre Minimumordinate. Wir haben also den folgenden Satz:

Jedes Punktepaar der Isotherme, wofür das thermodynamische Potential denselben Wert hat, Fig. 7 (wie A_3 und C_3, A_7 und C_7 etc.),

entspricht oberhalb des geradlinigen Stückes H K der empirischen Isotherme einem Flüssigkeitströpfchen derart, daß der Zustand innerhalb dieses Tröpfchens und der des Dampfes, welcher es umhüllt, durch die Lage dieses Punktepaares eindeutig bestimmt ist. Ebenso entspricht jedes Punktepaar unterhalb des geradlinigen Stückes H K der empirischen Isotherme einer kugelförmigen Dampfblase. Der

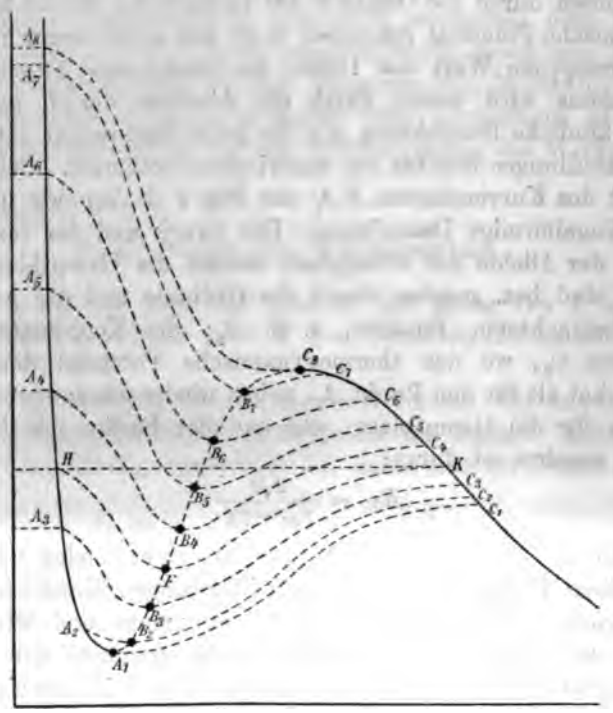


Fig. 7.

Zustand dieser Dampfblase und der Flüssigkeit, welche die Dampfblase umhüllt, ist wieder durch die Lage des Punktepaares (wie A_3 und C_3, A_2 und C_2 etc.) eindeutig bestimmt. Konstruiert man nun für jede kugelschalförmige Kapillarschicht, welche im ersten Falle das kugelförmige Flüssigkeitströpfchen, und im zweiten Falle die kugelförmige Dampfblase umhüllt, die Kurve, welche den Mittelwert $\mathfrak{p} = (p_1 + p_2/2)$[1] *der Maximal- und Minimaldrucke für*

1) Um es hier noch einmal zu wiederholen: sowohl in einer ebenen wie in einer gekrümmten Kapillarschicht ist der hydrostatische Druck in

irgend einen Punkt dieser kugelschalförmigen Kapillarschichten in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte darstellt, so bilden die Minima dieser Kurven gerade den labilen Teil der theoretischen Isotherme.

Hiermit ist also eine physische Bedeutung für den labilen Teil der theoretischen Isotherme gegeben.

Bemerkung. Ich habe meine obigen Betrachtungen von irgend einer Spezialform der Zustandsgleichung frei gehalten. Wollen wir aber zeigen, wie z. B. die Gleichung der $\mathfrak{p} - v$-Kurve mit Hilfe einer Zustandsgleichung gefunden wird, so können wir nicht besser tun, als dieser Untersuchung die van der Waalssche Zustandsgleichung zugrunde zu legen, denn ich glaube, daß wir alle einverstanden sind über die Bemerkung von Traube[1]), wo er sagt: „Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, daß ich die Aufstellung von van der Waals' Zustandsgleichung als eine der ersten Großtaten der physikalischen Chemie betrachte. Berücksichtigt man, daß a und b keine Konstanten sind, so gilt jene Isothermengleichung mit wesentlich größerer Annäherung, als man bisher annahm; auf jeden Fall ist sie im allgemeinen jenen komplizierten Gleichungen vorzuziehen, die man an ihre Stelle gesetzt hat, welche vielleicht der Wahrheit näher kommen, aber zum Rechnen weit weniger geeignet sind."

Die Gleichung der Kurve AEC in Fig. 4, welche die Beziehung zwischen $\mathfrak{p} = (p_1 + p_2/2)$ und v darstellt, wird nun auf folgende Weise abgeleitet. In der Gleichung (20a) ersetzten wir den thermischen Druck θ durch den van der Waalsschen Ausdruck:

$$\frac{RT}{v-b}$$

und erhalten:

$$\mathfrak{p} = \frac{RT}{v-b} - \frac{V^2}{4a}. \tag{28}$$

einem Punkt abhängig von der Richtung und also das Pascalsche Gesetz verletzt. In der Richtung, wo die Dichte sich am meisten ändert (in der Richtung des Gradienten der Dichte), ist der hydrostatische Druck ein Maximum, in einer Richtung senkrecht auf die erste dagegen ein Minimum. Die Größe $\mathfrak{p}$ ist nun die halbe Summe dieser zwei hydrostatischen Drucke.

1) J. Traube, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 7. Nr. 9. p. 200.

Nun ist *auch* in einer gekrümmten Kapillarschicht:

$$d\theta = -\varrho\, dV \text{ }^{1})$$

oder:

$$dV = -v\, d\theta = -v\, d\frac{RT}{v-b} = -RTv\, d\frac{1}{v-b}.$$

Ist nun V_1' der Wert des Potentials, welches korrespondiert mit dem Punkt A der Fig. 4, so findet man durch Integration:

$$V - V_1' = RT\log\frac{v-b}{v_1-b} - RTb\left(\frac{1}{v-b} - \frac{1}{v_1'-b}\right).$$

Deshalb erhalten wir folgende Gleichung, welche den Mittelwert $\mathfrak{p}$ der hydrostatischen Drucke in einem Punkte einer gekrümmten Kapillarschicht in ihrer Abhängigkeit zu dem reziproken Werte der Dichte ($v = 1/\varrho$) darstellt:

$$(29)\quad \mathfrak{p} = \frac{RT}{v-b} - \frac{1}{4a}\left\{RT\log\frac{v-b}{v_1'-b} + RTb\frac{v-v_1'}{(v-b)(v_1'-b)} - \frac{2a}{v_1'}\right\}^2.$$

v_1' hat nun Bezug auf den Punkt A statt auf den Punkt H, wie es bei der *ebenen* Kapillarschicht war; $\mathfrak{p}$ und v sind selbstverständlich die laufenden Koordinaten.

Zusammenfassung.

1. Der Gradient des hydrostatischen Druckes p_1, senkrecht auf die Oberfläche einer kugelschalförmigen Kapillarschicht, ist das Produkt der Abweichung von dem Pascalschen Gesetz mit der Krümmung, oder wenn dh die Differentiale einer Strecke senkrecht auf die Oberfläche bedeutet, und p_2 der Druck senkrecht auf diese Strecke ist:

$$\frac{dp_1}{dh} = \frac{2(p_1 - p_2)}{R},$$

wo $2/R$ die Krümmung darstellt. Für eine ebene Kapillarschicht ist $R = \infty$, und deshalb:

$$p_1 = \text{Konstante} = \text{Dampfdruck}.$$

1) Was einfach aussagt, daß die Differenz zwischen den thermischen Drucken auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen eines Flüssigkeitselementes Gleichgewicht haben muß mit den Attraktionskräften, welche durch die Materie ringsum dieses Elementes auf das Flüssigkeitselement wirken.

2. Durch Integration der letzten Gleichung erhält man:

$$p_{at.} - p_{fl.} = \frac{2}{R}\int_1^2 (p_1 - p_2)\, dh = \frac{2H}{R};$$

das ist die bekannte Gleichung von Lord Kelvin, welche die Abhängigkeit zwischen der Differenz der hydrostatischen Drucke $p_{fl.}$ in der Flüssigkeit und $p_{at.}$ in dem Dampfe, in der Nähe einer gekrümmten Kapillarschicht einerseits und der Krümmung andererseits angibt.

3. Die Kurve, welche die Abhängigkeit zwischen dem hydrostatischen Druck p_1 in der Richtung der Strecke h (senkrecht auf die Oberfläche der Schicht also) und dem reziproken Wert der Dichte in einem Punkte einer gekrümmten Kapillarschicht darstellt, hat einen Wendepunkt. (Vgl. die Kurven $A_5 C_5$ etc. der Fig. 6.)

4. Die Kurve AEC, welche die Abhängigkeit darstellt (Fig. 4) zwischen der halben Summe der zwei Drucke p_1 und p_2 in einem Punkt, bez. *in* der Richtung der Kraftlinien und in einer Richtung *senkrecht auf* diese einerseits, und den reziproken Wert der Dichte $v = 1/\varrho$ in diesem Punkte andererseits, geht durch den Punkt E der theoretischen Isotherme, wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat, wie in den homogenen Phasen A und C. In dem Punkt E hat die Kurve AEC ihre Minimumordinate, oder wie man auch sagen kann:

Jedes Punktepaar der Isotherme, wofür das thermodynamische Potential denselben Wert hat, Fig. 7 (wie A_8 und C_8, A_7 und C_7 etc.) entspricht oberhalb des geradlinigen Stückes HK der empirischen Isotherme einem Flüssigkeitströpfchen, derart, daß der Zustand innerhalb dieses Tröpfchens und der des Dampfes, welcher es umhüllt, durch die Lage dieses Punktepaares eindeutig bestimmt ist (n. l. durch den Druck und den reziproken Wert der Dichte). Ebenso entspricht jedes Punktepaar unterhalb des geradlinigen Stückes HK der empirischen Isotherme einer kugelförmigen Dampfblase. Der Zustand dieser Dampfblase und der Flüssigkeit, welche die Dampfblase umhüllt, ist wieder durch die Lage des Punktepaares (wie A_3 und C_3, A_2 und C_2 etc.) eindeutig bestimmt. Konstruiert man

nun für jede kugelschalförmige Kapillarschicht, welche im ersten Falle das kugelförmige Flüssigkeitströpfchen, und im zweiten Falle die kugelförmige Dampfblase umhüllt, die Kurve, welche den Mittelwert $\mathfrak{p}=(p_1+p_2/2)$ der Maximal- und Minimaldrucke für irgend einen Punkt dieser kugelschalförmigen Kapillarschichten in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte darstellt, *so bilden die Minima dieser Kurven gerade den labilen Teil der theoretischen Isotherme.*

Bemerkung: In der Zeitschr. f. phys. Chem. **59**. p. 231. 1907 habe ich die obigen Betrachtungen auf die Theorien des Siedens und des Kondensierens angewendet und u. a. gefunden, daß das Sieden einer Flüssigkeit gebunden ist an Differenzen zwischen den Temperaturen in den verschiedenen „Punkten" der Masse.

(Eingegangen 22. Mai 1907.)

9. *Über die Dielektrizitätskonstante der Luft bei hohem Druck;* *von Karl Tangl.*

(Aus einer der ungar. Akad. d. Wissensch. am 22. April 1907 vorgelegten Abhandlung.)

Im Laufe einer Experimentaluntersuchung über Elektrostriktion sollte der Druckkoeffizient der Dielektrizitätskonstante (D) von einigen isolierenden Substanzen bestimmt werden. Es bot sich da die Gelegenheit, die Dielektrizitätskonstante einiger Gase bei hohem Druck zu untersuchen. Über den Einfluß des Druckes stellte schon Boltzmann[1]) Untersuchungen an; aus seinen Versuchen schloß er, daß sich $D-1$ proportional dem Drucke ändert; der Druck wurde aber nur in engen Grenzen, in der Nähe von einer Atmosphäre geändert. Über das Verhalten der „permanenten" Gase bei hohem Druck liegt meines Wissens nur die Arbeit von Occhialini[2]) über Luft vor. Die Resultate letzterer Arbeit gaben Veranlassung dazu, meine Beobachtungen über Luft schon jetzt, vor Abschluß der Untersuchung über andere Gase, zu publizieren. Die Luft bietet außerdem ein besonderes Interesse durch den Umstand, daß neuerdings L. Magri[3]) den Brechungsindex der Luft für $\lambda = 546\ \mu\mu$ bei hohem Druck (bis zu 180 Atm.) bestimmte, somit die Dielektrizitätskonstante für unendlich lange Wellen wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Dispersion liefert.

Methode und Versuchsanordnung.

Es wurde der Nernstsche Apparat gebraucht. Da es sich aber um kleine Änderungen der Dielektrizitätskonstante handelt, konnte die Anordnung von Nernst in ihrer ursprünglichen Form nicht zum Ziele führen. Der Apparat wurde

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. **69.** p. 795. 1874; Pogg. Ann. (6) **5.** p. 403—422. 1875.

2) A. Occhialini, Cim. (5) **10.** p. 217—240. 1905; Physik. Zeitschrift **6.** p. 669—672. 1905.

3) L. Magri, Physik. Zeitschr. **6.** p. 629—632. 1905.

deshalb als Differentialinstrument eingerichtet, wie ihn wohl zuerst Philip[1]) und später Bädecker[2]) (bei Untersuchung der Dämpfe) gebrauchte. Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 1. A und B sind zwei möglichst gleiche Kondensatoren von großer Kapazität; S_1 und S_2 die zwei Vergleichskondensatoren mit verschiebbarer Glasplatte, R_1 und R_2 zwei regulierbare

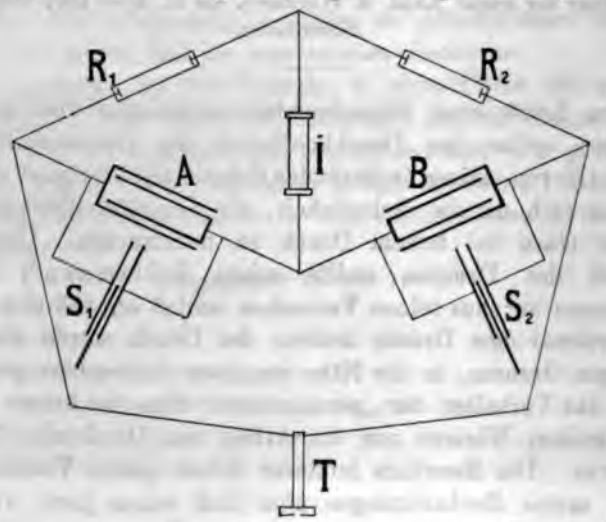


Fig. 1.

Flüssigkeitswiderstände (Mannit und Borsäure), J ein Induktor, T ein Telephon. Parallel zu A und B sind Flüssigkeitswiderstände geschaltet (in der Figur nicht gezeichnet). A und B konnte man mittels eines Paraffinkommutators vertauschen, ohne dabei S_1 und S_2 zu vertauschen; R_1 und R_2 konnten auch kommutiert werden.

Ist $R_1 = R_2$, so gibt das Telephon bekanntlich keinen Ton, wenn

$$A + S_1 = B + S_2$$

(A, B, S_1, S_2 bedeuten die bezüglichen Kapazitäten). Wird nun A und B vertauscht, so muß im allgemeinen die eine Glasplatte, z. B. die rechte, verschoben werden, um das Telephon wieder zum Schweigen zu bringen. Diese Ver-

1) J. C. Philip, Zeitschr. f. physik. Chem. 24. p. 18—38. 1897.
2) K. Bädecker, Zeitschr. f. physik. Chem. 36. p. 305—335. 1901.

schiebung soll im folgenden mit s bezeichnet werden. Wird dann die Luft in A komprimiert, so vergrößert sich die Kapazität von A, bei der Vertauschung von A und B muß dieselbe Glasplatte mit s' verschoben werden; $s' - s$ ist proportional der Kapazitätsänderung von A.

Werden A und B groß genug gewählt, so kann $s' - s$ noch gut meßbar sein, obzwar die prozentuelle Änderung der Kapazität sehr klein ist. Die Dimensionen der Kondensatoren A und B waren so gewählt, daß einer Kapazitätsänderung von $^1/_{10000}$ eine eben noch wahrnehmbare Verschiebung der Glasplatte entsprach.

Um die Luft in A komprimieren zu können, wurde A in eine schmiedeeiserne Flasche gebracht, wodurch seine Kapazität etwas vergrößert wurde. Deshalb wurde die Form von A so gewählt, daß eine relative Lagenänderung von A in der Flasche möglichst wenig dessen Kapazität beeinflußte. Dies konnte man durch eine möglichst geschlossene Form erreichen. A und B waren aus koaxialen Zylindern zusammengesetzt, wie aus Fig. 2 ersichtlich. Die Höhe des äußersten Zylinders betrug 13,5 cm, der Durchmesser 4,8 cm, die Höhe der inneren Zylinder 11,0 cm; der Durchmesser derselben war so bemessen, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zylindern ein ringförmiger Raum von 1 mm Breite frei blieb, der mit verschiedenen Dielektrika gefüllt werden konnte. Die Zylinder waren Messingröhren von 1 mm Wandstärke. Eine Reihe der Zylinder — die eine Belegung des Kondensators — wurde unten durch eine Platte von 5 mm Dicke zusammengehalten, die andere Reihe durch eine ebensolche Platte oben. Jede Platte trug in ihrer Mitte eine Hülse aus Messing, in die ein voller Glasstab stramm hineinpaßte, der die beiden Belegungen zusammenhielt. Außerdem waren zwischen die Zylinder kleine Hartgummikeile gesteckt, so daß keine Verschiebung der Zylinder zu befürchten war.

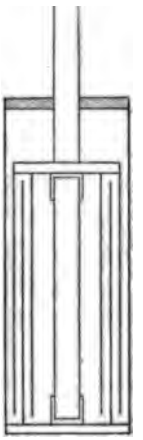


Fig. 2.

Die Flasche, in der die Luft komprimiert wurde, war aus Schmiedeeisen, von 19 cm Höhe, 6 cm innerem Durchmesser, 1,5 cm Wandstärke (Fig. 3). Sie war oben mit einem Schrauben-

gewinde versehen, um den Deckel daraufschrauben und fest anziehen zu können. Zur Abdichtung diente ein zwischen Flasche und Deckel gelegter Bleiring. Der Deckel selbst bestand aus zwei Teilen: aus einem mittleren und aus einem ringförmigen Stück. Die beiden Teile trennte ein Hartgummiring (in der Figur schraffiert), der zugleich zur Isolation des Mittelstückes diente. An das Mittelstück wurde der Kondensator angeschraubt. Das Mittelstück hatte ein seitliches Stahlrohr, welches das Metallmanometer trug und zugleich als Anschluß an die Kompressionspumpe diente. Im Mittelstück befand sich außerdem eine Stopfbüchse mit einem Ventil, womit die Flasche vom seitlichen Rohr abgesperrt werden konnte. Nachdem die Flasche an die Kompressionspumpe angeschlossen und mit komprimierter Luft gefüllt war, wurde das Ventil in der Stopfbüchse geschlossen, die Flasche von der Pumpe gelöst, das seitliche Rohr durch eine angeschraubte Kappe geschlossen, das Ventil wieder geöffnet, so daß das Manometer mit dem Inneren der Flasche in Verbindung stand und den Druck anzeigte.

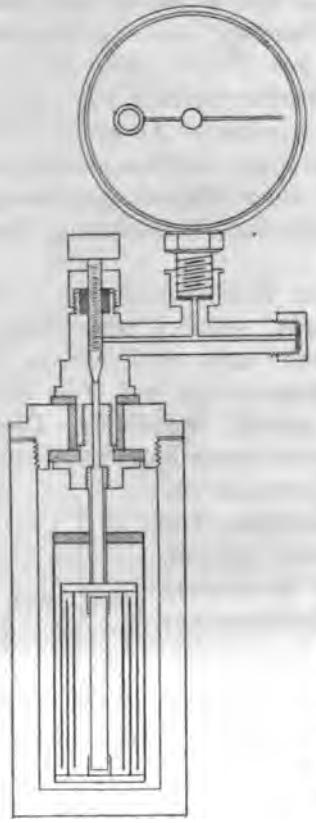


Fig. 3.

Die eine Belegung — die innere — war mit dem Mittelstück des Deckels leitend verbunden, die andere Belegung mittels einer am Boden der Flasche befindlichen elastischen Feder mit dem übrigen Teil der Flasche.

Versuche.

Die Luft wurde in der Flasche mit Hilfe einer Kompressionspumpe von Max Kohl zusammengepreßt. Bevor die

Luft in die Pumpe trat, ging sie durch eine gesättigte Lösung von Kalilauge, sodann durch zwei Glasröhren, mit in konzentrierter Schwefelsäure getränkten Bimssteinstücken gefüllt. Die Luft gelangte also kohlensäurefrei und trocken in die Flasche. Ich habe keine Versuche darüber angestellt, welchen Einfluß der Kohlensäuregehalt auf die Dielektrizitätskonstante ausübt. Die Dielektrizitätskonstante der feuchten Luft fand ich aber merklich größer als die der trockenen; außerdem stört die Feuchtigkeit die Beobachtungen, denn komprimiert man feuchte Luft, so wird der Kondensator merklich leitend, das Minimum verwaschen, was wohl von dem auf der Isolation kondensierten Wasserdampf herrührt.

Die mit komprimierter Luft gefüllte Flasche kam in ein Wasserbad, dessen Temperatur während einer Versuchsreihe bis auf 0,1° konstant gehalten wurde, so daß wohl anzunehmen war, das Wasserbad zeige zugleich die Temperatur der Luft in der Flasche an. Anfangs arbeitete ich ohne Wasserbad, erhielt aber viel schwankendere Werte als später mit Wasserbad. Das Wasser reichte nur bis zum oberen Rande der Flasche.

Der Gang der Messung war dann folgender: Die Flasche, bis zu ca. 100 Atm. gefüllt, wurde ins Wasserbad gestellt, 3—4 Stunden danach die Verschiebung s der rechten Glasplatte gemessen, die sich beim Vertauschen von A mit B ergab. Dann wurde so viel Luft aus der Flasche herausgelassen, daß der Druck auf ca. 80 Atm. fiel, 45 Min. danach die entsprechende Verschiebung der Glasplatte gemessen; dann wurde wieder so viel Luft herausgelassen, daß der Druck auf ca. 60 Atm. fiel etc., bis der Druck gleich dem äußeren Luftdruck war. Nach jeder Druckverminderung kühlte sich die Luft und auch die Flasche ab, was sich dadurch bemerkbar machte, daß gleich nach dem Ausströmen der Luft die Verschiebung andere Werte zeigte als nach einer gewissen Zeit; ich überzeugte mich, daß schon nach 30 Min. die Verschiebung einen konstanten Wert annahm.

Bezeichnen p_0 und p_1 den Druck, D_0 und D_1 die zugehörigen Werte der Dielektrizitätskonstante der Luft, s_0 und s_1 die entsprechenden Verschiebungen der Glasplatte, so ist

$$D_1 - D_0 = k(s_1 - s_0),$$

wo k eine Konstante des Apparates ist, die bestimmt werden mußte. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Kapazität von A + Flasche nur insofern vom Druck beeinflußt wird, als sich die Dielektrizitätskonstante der Luft mit dem Druck ändert, daß also keine Form- und Lagenänderungen eintreten, die die Kapazität beeinflussen können. Die durch den Druck verursachte Kompression des Kondensators A — aus der Kompressibilität des Messings berechnet — gibt selbst bei 100 Atm. nur eine Änderung von $^1/_{15000}$ der Kapazität, was außerhalb der Beobachtungsgrenze liegt. Viel bedeutender ist die durch die Deformation der Flasche bewirkte Kapazitätsänderung. Der Deckel der Flasche ist selbst ein Kondensator, dessen Kapazität von der Deformation wohl beeinflußt werden kann. Außerdem ist noch zu beachten, daß der isolierende Hartgummiring den engen Raum zwischen dem mittleren und ringförmigen Teil des Deckels nicht vollständig ausfüllte (Fig. 3), sondern unten ein kleiner ringförmiger Raum frei blieb, der mit Luft gefüllt war; folglich mußte die Kapazität des Deckels mit dem Druck wachsen. Durch Versuche wurde auch festgestellt, daß die Kapazität der leeren Flasche (ohne Kondensator A) mit dem Druck wächst.

Der Druck wurde mit einem Metallmanometer von der Firma Schaeffer & Budenberg gemessen. Das Manometer war mit großer Sorgfalt verfertigt, in kg pro cm² geteilt. Da der Stand des Zeigers bequem bis auf 0,1 Skt. genau abgelesen werden konnte, konnte der Druck bis auf 0,1 kg pro cm² genau bestimmt werden, insofern das Manometer bis auf 0,1 richtig ist. Diese Genauigkeit genügte auch, da die durch 0,1 kg pro cm² bewirkte Änderung der Dielektrizitätskonstante eben noch bemerkt werden konnte. Die Richtigkeit der Angaben des Manometers wurde folgenderweise geprüft: Die Flasche wurde mit Luft von ca. 3 Atm. Druck gefüllt, der Druck mit einer Quecksilbersäule gemessen. Sodann wurde so viel Luft herausgelassen, daß der Druck gleich dem äußeren Luftdruck wurde; das Volum der entwichenen Luft, auf bestimmten Druck und Temperatur reduziert, gemessen. Dann wurde die Flasche so weit gefüllt, daß das Manometer ca. 20 kg pro cm² anzeigte; dann so viel Luft entnommen, daß der Druck wieder gleich dem äußeren Luftdruck wurde;

das Volum der entströmten Luft, auf denselben Druck und Temperatur reduziert, gemessen. Daraus konnte man berechnen, wie groß der Druck in der Flasche war, als das Manometer 20 kg pro cm² anzeigte. Ebenso wurde das Manometer bei 40, 60, 80, 100 kg pro cm² geprüft. Bei der Berechnung mußte man natürlich die Abweichungen der Luft vom Boyle-Mariotteschen Gesetz berücksichtigen. Bei dieser Prüfung ergab sich, daß das Manometer bei 20 kg pro cm² bis 0,1 genau ist, bei 40 kg pro cm² um 0,1, bei 60, 80, 100 um 0,2 zu korrigieren ist.

Bei jeder Versuchsreihe wurde auch der äußere Luftdruck beobachtet, obzwar dessen Schwankungen nur dann einen bemerkbaren Einfluß auf das Manometer ausüben, wenn sie größer als 0,1 Atm. sind.

Die Bestimmung der Apparatenkonstante k bildete einen wichtigen Punkt der Untersuchung. Sie geschah folgendermaßen: A und B waren mit Luft von Atmosphärendruck gefüllt, es wurde die dazugehörige Verschiebung s_0 der Glasplatte gemessen. Sodann sollte die Verschiebung s_1 der Glasplatte bestimmt werden, wenn der Kondensator A mit Benzol von bestimmter Temperatur, also mit einer Flüssigkeit von bekannter Dielektrizitätskonstante D_1, gefüllt ist. Die Verschiebung s_1 der Glasplatte ist aber viel zu groß, um unmittelbar bestimmt werden zu können; s_1 betrug ca. 1000 mm, während die Glasplatte nur um 130 mm verschoben werden konnte. Ich nahm daher einen Gerdienkondensator zu Hilfe. Dieser besteht aus zwei Reihen koaxialer Zylinder, wovon die eine parallel der Achse verschoben und die Verschiebung an einer Millimeterskala abgelesen werden kann. Durch vorhergehende Versuche wurde festgestellt, wie groß die einer Verschiebung von 5 mm des Gerdienkondensators äquivalente Verschiebung der Glasplatte ist und zwar auf folgende Weise: Der Gerdienkondensator G war in einem Zweige des Nernstschen Apparates an der Stelle von A (Fig. 1), im anderen Zweige nur der Vergleichskondensator mit der Glasplatte S_2 eingeschaltet. Beim Umschalten von A ergab sich eine Verschiebung s der Glasplatte. Dann wurde G von 0,0 auf 5,0 verschoben, also mit 5 mm. Bei Umschaltung von G ist jetzt die Verschiebung der Glasplatte s'; $s' - s$ ist die der Ver-

schiebung von G äquivalente Verschiebung der Glasplatte. So verfuhr ich weiter, bis G mit 3×5 mm verschoben war; da war die Verschiebung der Glasplatte schon so groß, daß G nicht weiter verschoben werden konnte. Es wurde jetzt neben S_2 ein Hilfskondensator K von entsprechender Kapazität geschaltet; beim Vertauschen von G und K war die Verschiebung der Glasplatte wieder klein genug, um G weiter mit 3×5 verschieben und die äquivalente Verschiebung der Glasplatte messen zu können etc. Die folgende Tabelle gibt die Resultate dieser Messung. Ich teile die Zahlen mit, weil es vielleicht von Interesse ist zu sehen, mit welch großer Annäherung die Kapazitätsänderung des Gerdienkondensators proportional der Verschiebung ist. Die mit G bezeichnete Kolumne gibt die Verschiebung von G, s die damit äquivalente Verschiebung der Glasplatte.

G	s	G	s
0—5	1,0	40—45	67,7
5—10	4,2	45—50	68,0
10—15	37,6	50—55	67,9
15—20	68,3	55—60	68,1
20—25	68,5	60—65	68,6
25—30	68,7	65—70	68,7
30—35	68,5	70—75	68,9
35—40	68,3	75—80	71,0

Im Besitze dieser Daten konnte die Apparatenkonstante k wie folgt bestimmt werden: In einem Zweige des Nernstschen Apparates war A, im anderen Zweige $B + G_0$ eingeschaltet (G_0 bedeutet den Gerdienkondensator in der Stellung 0); die Verschiebung der Glasplatte beim Vertauschen von A und $B + G_0$ sei s_0. Nun wurde A mit Benzol gefüllt, G auf 70 gestellt und noch ein kleiner Kondensator K dazu geschaltet; die Verschiebung s' der Glasplatte bei Vertauschung von A und $B + G_{70} + K$ gemessen. Aus der vorigen Tabelle ergibt sich, daß $G_{70} - G_0$ äquivalent ist mit einer Verschiebung von 794,1 mm der Glasplatte, K war äquivalent mit 167,2 mm. Aus diesen Daten und aus den zwei Verschiebungen s' und s_0 berechnet sich: Wenn sich die Dielektrizitätskonstante des

Dielektrikums in A um 1,287 ändert, d. h. $D_1 - D_0 = 1{,}287$, so ändert sich die Verschiebung der Glasplatte um 990,2 mm, d. h. $s_1 - s_0 = 990{,}2$, und

$$k = \frac{D_1 - D_0}{s_1 - s_0} = 0{,}001300.$$

Dabei ist die Dielektrizitätskonstante der Luft bei 18° C. und 1 Atm. Druck = 1,00055 (nach Boltzmann[1]) und Klemenčič[2]), während die Dielektrizitätskonstante des Benzols nach den sorgfältigen Messungen von Turner[3]) = 2,288 bei 18° C., und dessen Temperaturkoeffizient nach meinen eigenen[4]) Messungen = — 0,00080 gesetzt ist.

Der angegebene Wert von $s_1 - s_0$ ist das Mittel aus vier Messungen.

Diese Bestimmung wurde nach Beendigung der Versuchsreihen mit komprimierter Luft ausgeführt, ohne an dem Kondensator etwas zu ändern. Nach der Bestimmung von k wurde der Kondensator auseinander genommen, gereinigt, wieder zusammengesetzt, wonach $k = 0{,}001297$ gefunden wurde. Die Berechnung der Dielektrizitätskonstante der Luft geschah mit $k = 0{,}001300$.

Das verwendete Benzol war von E. Merck bezogen, vor dem Gebrauch über Chlorkalzium destilliert.

Versuchsergebnisse.

Auf die oben beschriebene Weise wurden insgesamt sechs Versuchsreihen ausgeführt. Die Verschiebung der Glasplatte wurde bei ca. 1, 20, 40, 60, 80, 100 Atm. Druck je viermal gemessen. Die Mittelwerte aus den vier Messungen gelten in den folgenden Tabellen als eine einzige Beobachtung. Die Widerstände R_1 und R_2 waren möglichst abgeglichen, wurden aber doch nach jeder Messung kommutiert. In der Tabelle ist die Verschiebung der Glasplatte bei 1 Atm. Druck gleich 0,00 gesetzt. Die Beobachtung geschah nicht genau bei dem in der Tabelle angegebenen Druck; die angeführten Werte sind aus den direkt beobachteten mittels linearer Interpolation auf

1) L. Boltzmann, l. c.
2) J. Klemenčič, Wien. Ber. (2) **91.** p. 712—759. 1885.
3) B. B. Turner, Zeitschr. f. physik. Chem. **35.** p. 385—430. 1900.
4) K. Tangl, Ann. d. Phys. **10.** p. 748—767. 1903.

den entsprechenden Druck reduziert. Der Druck ist überall bei 19° zu verstehen, in deren Nähe gemessen wurde.

Die Stellung der Glasplatte wurde auf 0,1 mm genau abgelesen; im Mittelwert der vier Beobachtungen sind die Hundertstel noch beibehalten. Die Glasplatte war sorgfältig kalibriert; die daraus sich ergebende Korrektion ist an den Werten der Tabelle schon angebracht.

Die so berechneten Werte mußten noch eine Korrektion erleiden wegen dem Umstande, daß die Kapazität der leeren Flasche selbst Änderungen durch den Druck erfuhr. Um diese Korrektion zu bestimmen, wurden fünf Versuchsreihen ausgeführt. An Stelle von A kam die leere Flasche, an Stelle von B ein kleinerer Kondensator. Sonst wurde ganz so verfahren wie früher beschrieben. Die folgende Tabelle gibt die der Kapazitätsänderung der leeren Flasche entsprechende Verschiebung der Glasplatte.

Druck in Atm.	1	20	40	60	80	100
I. Reihe	0,00	0,21	0,42	0,63	0,78	0,87
II. „	0,00	0,35	0,63	0,87	0,98	1,24
III. „	0,00	0,14	0,35	0,58	0,67	0,75
IV. „	0,00	0,34	0,56	0,72	0,94	1,16
V. „	0,00	0,23	0,39	0,54	0,63	0,71
Mittel	**0,00**	**0,25**	**0,47**	**0,67**	**0,80**	**0,95**

Mit der aus diesen Beobachtungen entspringenden Korrektion sind die Verschiebungswerte s der folgenden Tabelle schon versehen.

Druck in Atm.	1	20	40	60	80	100
I. Reihe	0,00	7,89	16,21	24,73	33,06	41,22
II. „	0,00	7,98	16,52	25,30	33,46	41,77
III. „	0,00	7,85	16,59	24,80	33,33	41,44
IV. „	0,00	8,01	16,47	25,13	33,45	41,96
V. „	0,00	7,92	16,25	24,83	33,38	41,87
VI. „	0,00	7,83	16,26	24,81	33,41	42,05
Mittel	**0,00**	**7,91**	**16,38**	**24,93**	**33,35**	**41,72**

Aus dem Mittelwert der einzelnen Kolumnen kann die Dielektrizitätskonstante der Luft sofort berechnet werden mit Hilfe der Formel:

$$D = D_0 + 0{,}001300\, s,$$

wo D_0 die Dielektrizitätskonstante der Luft bei 1 Atm. Druck und 19° C., s den in der obigen Tabelle angegebenen Mittelwert bezeichnet. Was D_0 betrifft, so fand Boltzmann[1]) bei 1 Atm. und 0° 1,000590, Klemenčič[2]) 1,000586; also kann man mit hinreichender Genauigkeit 1,00059 setzen. Bei 1 Atm. und 19° berechnet man $D_0 = 1{,}00055$ auf Grund der experimentell festgestellten Tatsache, daß sich $D - 1$ proportional der Dichte ändert (vgl. w. u.).

Die Werte der so berechneten Dielektrizitätskonstante sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; der erste Wert von D bei $P = 1$ Atm. ist aus Boltzmanns, der zweite aus Klemenčičs Beobachtungen abgeleitet.

P	D	σ	$\frac{1}{\sigma}\frac{D-1}{D+2}10^6$	$\frac{D-1}{P}10^6$	$\frac{D-1}{\sigma}10^6$
1	1,000549	0,930	197	549	590
1	1,000545	0,930	195	545	586
20	1,0108	18,61	193	542	580
40	1,0218	37,82	191	546	578
60	1,0330	57,10	190	549	577
80	1,0439	76,18	189	549	576
100	1,0548	94,64	189	548	579

Die erste Vertikalreihe gibt den Druck in Atmosphären, die dritte die Dichte σ der Luft, wobei die Dichte bei 1 Atm. und 0° gleich eins gesetzt ist. Diese Werte sind aus Winkelmanns Handbuch der Physik (1. Aufl.) 1. p. 522 entnommen nach den Beobachtungen von Amagat. In der vierten Vertikalreihe steht der Wert des Clausius-Mossottischen Ausdruckes aus den vorhergehenden Daten berechnet. Die Zahlen der fünften und sechsten Reihe sind ohne weiteres verständlich.

---

1) Boltzmann, l. c.

2) J. Klemenčič, l. c.

Aus der Tabelle ist ersichtlich: 1. Meine Beobachtungen schließen sich an jene Boltzmanns, namentlich aber an jene Klemenčičs vorzüglich an. 2. Der Clausius-Mossottische Ausdruck ist nicht konstant; bis zu 100 Atm. zeigt er eine schwache Abnahme. 3. Der Quotient $D-1/P$ scheint bei 60—80 Atm. ein Maximum zu haben. Nach Amagat zeigt das Produkt PV (V = Volum) bei 64 Atm. ein Minimum. Ob $D-1/P$ in der Nähe dieses Druckes tatsächlich ein Maximum hat, müssen weitere Experimente entscheiden. 4. $D-1/\sigma$ kann bis 100 Atm. als konstant angesehen werden.

Von besonderem Interesse ist der Vergleich der Dielektrizitätskonstante mit dem Brechungsindex; letzteren hat L. Magri[1]) für $\lambda = 546\ \mu\mu$ bis zu 180 Atm. bestimmt. In seiner Abhandlung gibt er den Brechungsindex nach der Dichte geordnet, die Dichte der Luft bei 1 Atm. und 0° gleich 1 gesetzt. Der Vergleich ist in der folgenden Tabelle bei der Dichte 1, 20, 40, 60, 80, 100 ausgeführt.

σ	D	n^2
1	1,000590	1,000586
1	1,000586	
20	1,0116	1,0117
40	1,0231	1,0237
60	1,0346	1,0357
80	1,0462	1,0477
100	1,0579	1,0601

Das Quadrat des Brechungsindex ist durchwegs größer als die Dielektrizitätskonstante für unendlich lange Wellen. Der Unterschied ist zwar klein, jedoch größer, als daß er Beobachtungsfehlern zuzuschreiben wäre. Inwiefern die gefundenen Werte mit der elektromagnetischen Theorie der Dispersion im Einklange sind, läßt sich nicht entscheiden, da über die Dispersion der Luft bei hohem Druck zu wenig Daten vorliegen.

Die Genauigkeit der Resultate hängt von der Genauigkeit dreier Größen ab: des Druckes, der Konstante k und der Verschiebung der Glasplatte. Die Genauigkeit des Manometers

1) L. Magri, l. c.

kann man sicher auf 0,1 Atm. setzen, was in $D-1$ · bei 20 Atm. einem Fehler von $^1/_{200}$, bei 40 Atm. $^1/_{400}$ etc. gleichkommt. Bei der Beurteilung der Genauigkeit der Konstante k ist maßgebend, mit welcher Genauigkeit die einer Verschiebung von 70 mm des Gerdienkondensators entsprechende Verschiebung der Glasplatte bestimmt werden konnte. Die 70 mm konnten auf 0,05 mm genau gemessen werden, d. i. auf $^1/_{1400}$ genau; ferner ist zu beachten, daß der Gerdienkondensator, wie erwähnt, mit 3 × 5 mm verschoben werden konnte, ohne in den anderen Zweig des Nernstschen Apparates einen Hilfskondensator einzuschalten; die äquivalente Glasplattenverschiebung ist rund 200 mm. Die Genauigkeit dieser äquivalenten Verschiebung kann auch auf $^1/_{1400}$ gesetzt werden (etwas mehr als 0,1 mm), so daß der Wert der einer Verschiebung des Gerdienkondensators von 70 mm äquivalenten Glasplattenverschiebung auf $^1/_{700}$ genau angenommen werden kann. Die Dielektrizitätkonstante des Benzols gibt Turner auf $^1/_{3000}$ genau an. Auf Grund dieser Betrachtung kann die Genauigkeit der Apparatenkonstante auf $^1/_{700}$ gesetzt werden.

Die aus der Ablesung des Manometers und der Stellung der Glasplatte herrührenden zufälligen Fehler bewirken die Schwankungen der in der Tabelle angegebenen s-Werte in den einzelnen Versuchsreihen. Den daraus entspringenden wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes kann man nach den Regeln der Fehlerrechnung berechnen. Tut man das, so erhält man als wahrscheinlichen Fehler von $D-1$ bei 20 und 40 Atm. $^1/_{200}$, bei 60, 80, 100 Atm. $^1/_{240}$, wobei der Fehler des Korrektionsgliedes aus der Kapazitätsänderung der leeren Flasche mit berücksichtigt ist. Zieht man sämtliche Fehlerquellen in Betracht, so kann man sagen: $D-1$ ist bei 20 Atm. bis auf $^1/_{100}$, bei 40 und 60 Atm. auf $^1/_{120}$, bei 80 Atm. auf $^1/_{140}$, bei 100 Atm. auf $^1/_{160}$ genau.

Vergleicht man die Resultate dieser Arbeit mit jener Occhialinis[1]), so findet man viel bedeutendere Abweichungen, als nach obiger Berechnung der Genauigkeit zu erwarten sind. Der Vergleich ist in der folgenden Tabelle ausgeführt.

---

1) Occhialini, l. c.

σ	D Occhialini	D Tangl
20	1,0101	1,0116
40	1,0196	1,0231
60	1,0294	1,0346
80	1,0387	1,0462
100	1,0482	1,0579

Die Abweichungen sind viel zu groß, um sie zufälligen Beobachtungsfehlern zuschreiben zu können. Die Zahlen Occhialinis passen auch sehr schlecht zu Boltzmanns und Klemenčičs Werten bei 1 Atm., wie die folgende Tabelle zeigt, wo die Werte von $\frac{1}{\sigma}\frac{D-1}{D+1}$ und $\frac{D-1}{\sigma}$ zusammengestellt sind.

σ	$\frac{1}{\sigma}\frac{D-1}{D+2}\cdot 10^6$	$\frac{D-1}{\sigma}10^6$	
1	197	590	Boltzmann
1	195	586	Klemenčič
20	169	505	Occhialini
40	162	490	„
60	162	490	„
80	159	484	„
100	158	482	„

Den Grund der bedeutenden Abweichungen sehe ich hauptsächlich in folgenden Umständen: Im Grunde genommen verglich Occhialini die Kapazität seines Versuchskondensators mit einem Kondensator, dessen Kapazität aus den Dimensionen berechnet wurde. Dieser Vergleichskondensator bestand aus zwei gleichgroßen quadratischen Platten, deren gegenseitiger Abstand geändert und gemessen werden konnte. Seine Kapazität berechnet Occhialini nach Maxwell[1]) mit der Formel

$$C = \frac{\left(a + \frac{d}{\pi}\log 2\right)^2}{4\pi d},$$

wo a nahe gleich der Seitenlänge des Quadrates, d gleich der Entfernung der beiden Platten voneinander ist. Jedoch bezieht

1) J. C. Maxwell, Treatise on Electr. and Magnet. (Deutsche Ausgabe) § 196. p. 313.

sich die Formel Maxwells auf einen Kondensator, der aus zwei parallelen und einer dazwischen gelegten, von beiden äußeren gleich weit entfernten Platten besteht, wobei aber die Mittelplatte viel kleiner angenommen wird als die beiden äußeren. Ist die Entfernung der beiden äußeren Platten voneinander gleich B, so ist in erster Annäherung die Kapazität $C = S/2\pi B$, wo S den wahren Flächeninhalt der Mittelplatte bedeutet. Zieht man die Wirkung der Ränder in Betracht, so wird $C = S'/2\pi B$, wo nach Maxwell S' aus S entsteht, wenn man um den Rand der Mittelplatte einen Streifen von der konstanten Breite $B/\pi \log 2$ legt, S' bedeutet den so vergrößerten wahren Flächeninhalt der Mittelplatte. Sind die Platten quadratisch mit der Seitenlänge a, so wird demnach

$$S = 2a^2 \quad \text{und} \quad S' = 2\left(a + 2\frac{B}{\pi}\log 2\right)^2.$$

Ist die Mittelplatte unendlich dünn und seine Entfernung von den äußeren Platten gleich d, so ist $B = 2d$ und

$$C = \frac{2\left(a + \frac{4d}{\pi}\log 2\right)^2}{4\pi d}.$$

Nun bestand aber der Kondensator Occhialinis nicht aus drei, sondern nur aus zwei Platten und es gilt nur mit einer gewissen Annäherung, daß die Kapazität des aus zwei Platten bestehenden Kondensators die Hälfte jener aus drei Platten ist. Aber selbst wenn man sich mit dieser Annäherung begnügt, ist

$$C = \frac{\left(a + \frac{4d}{\pi}\log 2\right)^2}{4\pi d},$$

während im Zähler der Formel, die Occhialini anwandte,

$$\left(a + \frac{d}{\pi}\log 2\right)^2$$

steht. Occhialini nahm also die Kapazität seines Kondensators infolge dieses Rechenfehlers zu klein an und zwar mit ca. 8 Proz. Um ebensoviel kleiner mußte der Wert von $D - 1$ der Luft ausfallen. Außerdem ist die Anwendung der Formel Maxwells auf Occhialinis Kondensator auch deshalb bedenklich, weil er aus zwei gleich großen Platten bestand, während Maxwell die Mittelplatte bedeutend kleiner annimmt.

Zusammenfassung.

1. Es wurde die Dielektrizitätskonstante der Luft bis zu 100 Atm. Druck gemessen und folgende Werte gefunden:

P	D
20	1,0108 ± 0 0001
40	1,0218 ± 0,0002
60	1,0330 ± 0,0003
80	1,0439 ± 0,0003
100	1,0548 ± 0,0003

Die Werte beziehen sich auf 19° C.

2. Der Clausius-Mossottische Ausdruck $\frac{1}{\sigma}\frac{D-1}{D+2}$ zeigt eine schwache Abnahme mit wachsendem Druck.

3. Der Quotient $\frac{D-1}{\sigma}$ kann bis zu 100 Atm. konstant angenommen werden.

4. Das Quadrat des Brechungsexponenten für $\lambda = 546\,\mu\mu$ ist größer als die Dielektrizitätskonstante für unendlich lange Wellen; jedoch bleibt die Differenz klein.

(Eingegangen 10. Mai 1907.)

10. *Die magnetische Induktion in Rotationskörpern bei homogenem Felde, behandelt nach einem Näherungsverfahren auf experimentell-geometrischer Grundlage;* von *O. Grotrian.*

Die Theorie der magnetischen Induktion, wie sie von Poisson begründet, von Lord Kelvin, F. Neumann, Maxwell, Kirchhoff u. a. weiter ausgebaut worden ist, gestattet nur für wenige Fälle die Verteilung der Magnetisierung im Innern eines magnetisierbaren Körpers zu berechnen. Für Probleme, bei denen die exakte Theorie versagt, kann man die Näherungsmethode der fortgesetzten Superposition verwenden, deren sich zuerst Murphy bei Untersuchung der elektrischen Influenz bediente.[1])

Andererseits sind bekanntlich auch Versuche, namentlich solche mit Induktionsschleifen, die mit einem ballistischen Galvanometer verbunden eng um den Magneten herumgelegt sind, geeignet, Aufschluß zunächst über die Verteilung der magnetischen Oberflächenbelegung zu geben. Kennt man diese, so ist damit auch für jede Stelle im Innern des Magneten die wahre magnetische Kraft nach Größe und Richtung, sowie ihr Potential bestimmt und damit auch bei magnetisch weichem Material unter Voraussetzung konstanter Suszeptibilität der in diesem Falle übereinstimmende Verlauf der Kraft-, Induktions- und Magnetisierungslinien, sowie derjenige der Niveauflächen.

Die genäherte Berechnung der entsprechenden Größen soll im folgenden für den Fall eines Rotationskörpers versucht werden, dessen Achse den Kraftlinien des erregenden homogenen Feldes parallel liegt. Es mag diese Berechnung auf Wegen

1) Vgl. hierzu Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik p. 155. 1865; C. Neumann, Das logarithmische Potential p. 248; L. Weber, Zur Theorie der magnetischen Induktion, Kiel 1877, Beibl. 2. p. 230. 1878; E. Riecke, Wied. Ann. 18. p. 465. 1881; A. Wassmuth, Wiener Ber. 102 (2a). p. 65. 1893.

geschehen, die, wie mir scheint, in immerhin ausführbarer Weise den Verlauf der inneren Magnetisierungslinien und der dazu senkrechten Niveauflächen zu ermitteln gestatten. Bei dem einen dieser Wege wird zu dem mittels der Induktionsschleifen erhaltenen Experimentalergebnisse als zweites der Verlauf der äußeren Kraftlinien, der sich durch Eisenpulver ermitteln läßt, hinzugenommen.

In einem homogenen Magnetfelde von der Intensität $\mathfrak{H}_f$ befinde sich ein in bezug auf eine Äquatorialebene EE symmetrischer Rotationskörper RR aus weichem Eisen, dessen Achse AA den Kraftlinien des Feldes parallel sei (vgl. Fig. 1).[1]

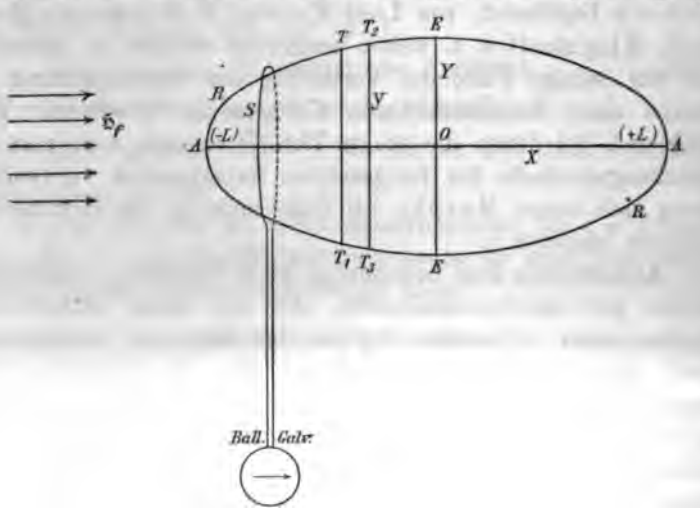


Fig. 1.

Es wird dabei vorausgesetzt, daß das Material vollständig magnetisch weich, also frei von Remanenz sei, ferner daß Suszeptibilität $\varkappa$ und Permeabilität μ als gegeben und konstant angesehen werden.

In diesem Falle ist die Verteilung der Magnetisierung eine solenoidale und zugleich einfach lamellare. Das Gleiche gilt für die wahre magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und die Induktion $\mathfrak{B}$.

1) Die Darstellung des Körpers in der Figur als Rotationsellipsoid soll selbstverständlich keine Beschränkung auf diese Körperform, für welche ja die exakte Lösung bekannt ist, bedeuten.

Es sei nun durch eng anliegende Induktionsschleifen S, mit denen man eine Anzahl von zur Achse senkrechten Querschnitten umschnürt, der diese Querschnitte durchsetzende Induktionsfluß $\mathfrak{Z}$ ermittelt.[1]) Der ballistische Ausschlag kann durch Verschwinden- oder Entstehenlassen des Feldes, sowie auch durch schnelle Bewegung der Schleife in große Entfernung hervorgerufen werden. Ferner seien durch Eisenpulver die äußeren Kraftlinien in ihrem Verlaufe, namentlich auch deren Inzidenzwinkel α_0 in Luft an der Oberfläche bestimmt. Damit ist auch der Brechungswinkel β_0 im Eisen zufolge der Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\alpha_0} = \mu \tag{1}$$

gegeben.

Es mag nun der Mittelpunkt O des Rotationskörpers zum Anfangspunkte eines Koordinatensystems gewählt werden, dessen X-Achse mit der Achse des Rotationskörpers zusammenfällt, so daß die Y-Achse in den Schnitt irgend einer Meridianebene, z. B. der Zeichenebene, mit der Äquatorebene zu liegen kommt. Die auf der Meridiankurve vom Äquator aus abgemessenen Längen mögen durch l bezeichnet und als positiv oder negativ betrachtet werden, je nachdem man sich beim Fortschreiten längs l der positiven oder negativen X-Achse nähert. Dabei möge der positive Sinn der letzteren mit dem positiven Sinne des äußeren Feldes übereinstimmen. Die Länge der halben Meridiankurve zwischen Äquator und Achse werde durch L bezeichnet.

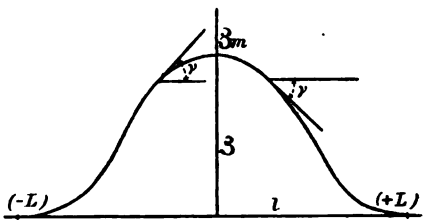


Fig. 2.

Man kann nun auf Grund der Versuche eine Kurve konstruieren, die als Abszissen die Werte von l, als Ordinaten diejenigen von $\mathfrak{Z}$ besitzt (vgl. Fig. 2). Somit ist es möglich, für einen beliebigen Punkt der Meridiankurve den Wert von $\mathfrak{Z}$ und durch Ziehen der Tangente denjenigen von $\partial\mathfrak{Z}/\partial l = \pm \operatorname{tg}\gamma$ zu ermitteln. Es ist

1) Über derartige Versuche vgl. u. a. C. Benedicks, Ann. d. Phys. 6. p. 726. 1901; O. Grotrian, Wied. Ann. 57. p. 751. 1896.

ohne weiteres ersichtlich, daß aus der Kurve für $\mathfrak{Z}$ die Differentialkurve (vgl. Fig. 3), die $\partial\mathfrak{Z}/\partial l$ als Funktion von l dar-

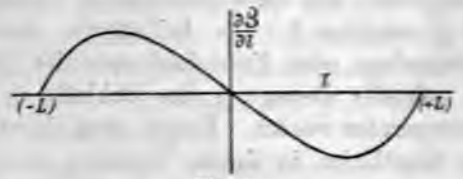


Fig. 3.

stellt, abgeleitet werden kann. Da der Verlauf der Kraftlinien an der Oberfläche bekannt ist, erscheint es ferner mög-

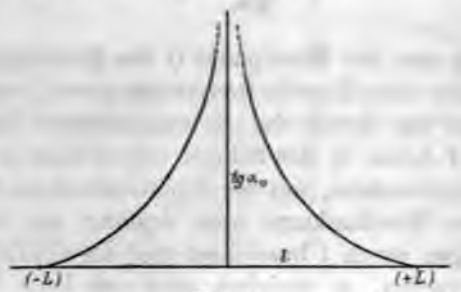


Fig. 4.

lich, eine Kurve (vgl. Fig. 4) zu konstruieren, welche die Werte von l als Abszissen, diejenigen von $\operatorname{tg}\alpha_0$ als Ordinaten enthält.

Man fasse nun eine unendlich dünne Scheibe des Rotationskörpers ins Auge, die durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen $T_1 T_1$ und $T_2 T_3$ (vgl. Fig. 1) begrenzt ist. Durch die äußere konische Mantelfläche dieser Scheibe, die einem Element dl der Meridiankurve entspricht, tritt ein Induktionsfluß gleich $\partial\mathfrak{Z}/\partial l . dl$ ein. Ein austretender Fluß ist dabei als negativ eintretender anzusehen. Bezeichnet y die Ordinate für das Element dl, dann ist die Mantelfläche der Scheibe durch $2\pi y . dl$ dargestellt. Somit ergibt sich für die magnetische Kraft außen unendlich nahe der Mantelfläche der Ausdruck

$$\mathfrak{H}_a = \frac{\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial l} . dl}{2\pi . y . dl . \cos\alpha_0} = \frac{\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi . y . \cos\alpha_0} .$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{N}_a$ die Normalkomponente von $\mathfrak{H}_a$, $\mathfrak{N}_i$

diejenige der inneren Kraft $\mathfrak{H}_i$ unendlich nahe der Oberfläche, dann gilt die Beziehung

$$\mu = \frac{\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{N}_i} = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \cos \alpha_0}{\mathfrak{H}_i \cdot \cos \beta_0}.$$

Für die weiteren Entwicklungen ist es zweckmäßig, statt der spitzen Winkel α_0 und β_0 diejenigen Winkel einzuführen, welche die Richtung von $\mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{H}_i$ mit der nach außen hin als positiv betrachteten Richtung der Normale bildet. Bezeichnet man diese Winkel durch α und β, dann ist bei eintretendem Flusse

$$\alpha = \pi - \alpha_0, \quad \beta = \pi - \beta_0,$$

bei austretendem Flusse

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0.$$

Die beiden letzten Gleichungen erhalten dann die Form

$$\mathfrak{H}_a = -\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi \cdot y \cdot \cos \alpha}, \tag{2}$$

$$\mu = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \cos \alpha}{\mathfrak{H}_i \cdot \cos \beta}.$$

Es ist folglich

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \cos \alpha}{\mu \cdot \cos \beta}.$$

Hieraus erhält man durch Substitution von $\mathfrak{H}_a$ aus (2)

$$\mathfrak{H}_i = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi \cdot y \cdot \cos \beta}. \tag{3}$$

Nun ist die Magnetisierung an der Oberfläche

$$\mathfrak{J} = \varkappa \cdot \mathfrak{H}_i,$$

die Flächendichte

$$\sigma = \mathfrak{J} \cdot \cos \beta = \varkappa \cdot \mathfrak{H}_i \cdot \cos \beta. \tag{4}$$

Ein positiver oder negativer Wert von σ entspricht dabei einer Stelle mit nord- oder südmagnetischer Dichte.

Durch Substitution von $\mathfrak{H}_i$ aus (3) ergibt sich somit für die Dichte der Ausdruck

$$\sigma = -\frac{\varkappa}{\mu} \cdot \frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi \cdot y}. \tag{5}$$

Da für jede Stelle der Oberfläche σ berechnet werden kann, so ist damit die Verteilung der magnetischen Oberflächen-

schicht gegeben.[1]) Hiernach ist es möglich eine Kurve (vgl. Fig. 5) zu konstruieren, welche die Werte von l als Abszissen, diejenigen von σ als Ordinaten besitzt.

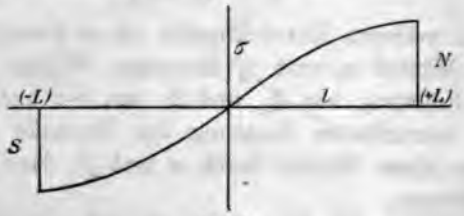


Fig. 5.

Zur Bestimmung der Niveauflächen und der unter den gemachten Voraussetzungen zusammenfallenden Magnetisierungs-, Kraft- und Induktionslinien möchte ich zwei Methoden, die sich außerdem kombinieren lassen, in Vorschlag bringen. Dieselben sollen im folgenden besprochen werden.

Zunächst handelt es sich darum, die Potentialverteilung in der Achse des Rotationskörpers zu ermitteln.

In einem Punkte p der Achse mit der Abszisse ξ (vgl. Fig. 6) erzeugt eine Zone vom Radius y mit der Dichte σ, die

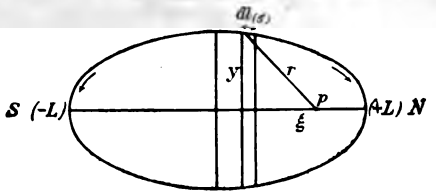


Fig. 6.

durch zwei unendlich nahe zur Achse senkrechte Ebenen begrenzt ist, ein Potential

$$dV_\sigma = \frac{2\pi . y . \sigma . dl}{r}.$$

Zufolge der Gleichung (5) kann dieses auch dargestellt werden durch den Ausdruck

$$(6) \qquad dV_\sigma = -\frac{\varkappa}{\mu}\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{r} . dl.$$

1) Zu den vorstehenden Entwickelungen vgl. u. a. E. Mascart u. J. Joubert, Lehrb. der Elektrizität u. des Magnetismus 1. Art. 417—418.

Das gesamte Potential der entmagnetisierenden Kraft, auch als induziertes Potential bezeichnet, welches durch die ganze magnetische Oberflächenschicht erzeugt wird, ist somit gegeben durch den Ausdruck

$$V_\sigma = -\frac{\varkappa}{\mu}\int_{-L}^{+L}\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{r}\cdot dl. \tag{7}$$

Teilt man demnach die Oberfläche des Rotationskörpers in eine genügend große Anzahl von Zonen ein und ermittelt für jede aus einer in hinreichend großem Maßstabe gezeichneten Meridiankurve den Wert von r, dann kann hieraus eine Kurve abgeleitet werden, welche r als Ordinaten, l als Abszissen besitzt. Aus dieser und der Kurve in Fig. 8 für $\partial\mathfrak{Z}/\partial l$ kann für jedes l der Wert $\frac{\partial\mathfrak{Z}/\partial l}{r}$, somit auch

$$-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{r} = \frac{dV_\sigma}{dl}$$

abgeleitet werden. Es ist somit möglich, für irgend ein ξ eine

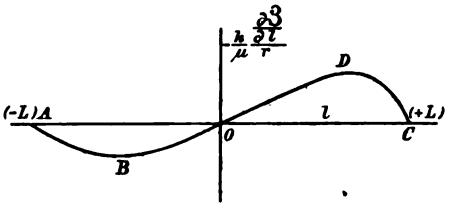


Fig. 7.

Kurve (vgl. Fig. 7) zu konstruieren, welche l als Abszissen und die Werte von

$$-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{r}$$

als Ordinaten besitzt.

Die Kurve geht durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, da $\partial\mathfrak{Z}/\partial l = 0$ für $l = 0$ ist, und wird durch diesen in zwei Teile, einen mit positiven und einen mit negativen Ordinaten geteilt. Die Gesamtfläche zwischen Kurve und

Abszissenachse, algebraisch planimetriert, (also der Figur entsprechend Fläche $OCD - OAB$) stellt alsdann

$$-\frac{\varkappa}{\mu}\int_{-L}^{+L}\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{r}\,dl = V_a$$

das Potential der entmagnetisierenden Kraft im Punkte p (vgl. Fig. 7) mit der Abszisse ξ dar. Man erkennt leicht, daß für den Mittelpunkt des Rotationskörpers ($\xi = 0$) die beiden Zweige der Kurve in Fig. 7 kongruent werden und daher hier $V_a = 0$ ist.

Das Gesamtpotential V_ξ der wahren magnetischen Kraft im Punkte p der Achse erscheint als Summe des von dem homogenen Felde herrührenden oder induzierenden Potentials V_f und von V_a. Es ist somit

$$V_\xi = V_f + V_a. \tag{8}$$

Dabei ist

$$V_f = -\mathfrak{H}_f \cdot \xi.$$

Nach den vorstehenden Ausführungen ist es möglich, das Gesamtpotential V_ξ für beliebig viele Werte von ξ zu ermitteln. Die Konstruktion der Kurven für

$$-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{r} \text{ (vgl. Fig. 7)}$$

braucht dabei indessen nur für Punkte der einen Halbachse durchgeführt zu werden, da für gleich große positive oder negative Werte von ξ sich diejenigen von V_a nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Es kann somit eine Kurve V_ξ, ξ (vgl. Fig. 8) konstruiert werden, durch welche das Gesamtpotential für jeden Punkt der Achse dargestellt wird.

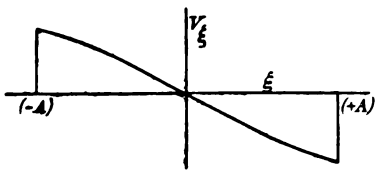


Fig. 8.

Bezeichnen x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes im Eisen, genommen in der durch den Punkt gelegten Meridianebene, bedeutet ferner V das in demselben vorhandene

Gesamtpotential, dann läßt sich die Laplacesche Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

Das Integral derselben wird bei Verwendung von Besselschen Funktionen dargestellt durch die Reihe

$$V = V_\xi - \frac{\partial^2 V_\xi}{\partial x^2}\cdot\frac{y^2}{2^2} + \frac{\partial^4 V_\xi}{\partial x^4}\cdot\frac{y^4}{2^2 . 4^2} - \frac{\partial^6 V_\xi}{\partial x^6}\cdot\frac{y^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots \tag{10}$$

V_ξ muß sich durch eine ungerade Funktion von x (bez. von ξ, wenn es sich speziell um Punkte in der Achse handelt) darstellen lassen und für $x = 0$ zu Null werden (vgl. den Verlauf der Kurve in Fig. 8), also die Form besitzen [1])

$$V_\xi = a_1 . x + a_3 . x^3 + a_5 . x^5 + \ldots . \tag{11}$$

Da aus der Kurve in Fig. 8 die Koeffizienten $a_1, a_3, a_5 \ldots$ bestimmbar sind, läßt sich auch der Ausdruck für V mit beliebig vielen Gliedern der Reihe darstellen. Wie viele Glieder zur Berechnung von V erforderlich sind, wird von der Form des Rotationskörpers abhängen. Ein Kriterium dafür ist gegeben einerseits durch Vergleichung der für V_ξ aus der Kurve und aus Formel (11) ermittelten Werte, andererseits auch durch Bestimmung des gesamten Induktionsflusses, der die Äquatorebene durchsetzt. Dieser kann auf Grund der Formeln (10) und (11) berechnet werden, ist aber auch durch die Maximalordinate $\mathfrak{B}_m$ der durch Versuche festgelegten Kurve in Fig. 2 dargestellt.

Zunächst ist die X-Komponente $\mathfrak{H}_x$ der magnetischen Kraft an irgend einer Stelle im Eisen gegeben durch die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V_\xi}{\partial x} &+ \frac{\partial^3 V_\xi}{\partial x^3}\cdot\frac{y^2}{2^2} - \frac{\partial^5 V_\xi}{\partial x^5}\cdot\frac{y^4}{2^2 . 4^2} \\ &+ \frac{\partial^7 V_\xi}{\partial x^7}\cdot\frac{y^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} - \ldots\end{aligned}\right. \tag{12}$$

1) Vgl. hierzu A. Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, p. 196. 1865. An die Stelle der l. c. angewandten Bezeichnungen f, x, t, A sind oben die Zeichen V, x, y, V_ξ gesetzt. Ferner E. Mascart u. J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus 1. Art. 365.

Dabei ist

$$\frac{\partial V_\xi}{\partial x} = a_1 + 3.a_3.x^2 + 5\ a_5.x^4 + 7\ a_7.x^6 + \ldots$$
$$\frac{\partial^2 V_\xi}{\partial x^2} = 6\,a_3.x + 20.a_5.x^3 + 42\ a_7.x^5 + \ldots$$
$$\frac{\partial^3 V_\xi}{\partial x^3} = 6\,a_3 + 60.a_5.x^2 + 210.a_7.x^4 + \ldots$$
$$\frac{\partial^4 V_\xi}{\partial x^4} = 120.a_5.x + 840.a_7.x^3 + \ldots$$
$$\frac{\partial^5 V_\xi}{\partial x^5} = 120.a_5 + 2520.a_7.x^2 + \ldots$$

Für die Äquatorebene ist $x=0$. Die Differentialquotienten erhalten hier die Werte

$$\left(\frac{\partial V_\xi}{\partial x}\right)_e = a_1, \quad \left(\frac{\partial^2 V_\xi}{\partial x^2}\right)_e = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 V_\xi}{\partial x^3}\right)_e = 6.a_3,$$
$$\left(\frac{\partial^4 V_\xi}{\partial x^4}\right)_e = 0, \quad \left(\frac{\partial^5 V_\xi}{\partial x^5}\right)_e = 120\,a_5 \ldots$$

Offenbar ist $(\partial V_\xi/\partial x)_e$ durch die Neigungstangente der Kurve in Fig. 8 im Nullpunkte gegeben. Bezeichnet demnach $\mathfrak{H}_0$ den Wert der magnetischen Kraft im Mittelpunkte, dann ist

$$\left(\frac{\partial V_\xi}{\partial x}\right)_e = a_1 = -\mathfrak{H}_0.$$

Die magnetische Kraft $\mathfrak{H}_e$ in der Äquatorebene, die zu letzterer senkrecht gerichtet ist, wird somit dargestellt durch den Ausdruck

$$(13) \qquad \mathfrak{H}_e = \mathfrak{H}_0 + \frac{3}{2}\cdot a_3\cdot y^2 - \frac{15}{8}\cdot a_5\cdot y^4 + \ldots$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{B}_e = \mu.\mathfrak{H}_e$ die Induktion in der Äquatorebene, R den Äquatorialradius, dann ist der gesamte Induktionsfluß für den Äquator

$$\mathfrak{Z}_m = 2\pi\int_0^R \mathfrak{B}_e.y.dy = 2\pi\mu\int_0^R \mathfrak{H}_e.y.dy,$$

oder

$$(14) \qquad \mathfrak{Z}_m = \pi\mu\left\{\mathfrak{H}_0.R^2 + \frac{3}{4}a_3.R^4 - \frac{5}{8}\cdot a_5\cdot R^6 + \ldots\right\}.$$

Liefert die rechte Seite der Gleichung einen Wert, der mit der Maximalordinate der Kurve in Fig. 2 nahezu übereinstimmt, dann genügt die Zahl der bei der Rechnung verwendeten Konstanten $\mathfrak{H}_0$, a_3, $a_5 \ldots$, um $\mathfrak{H}_e$ als Funktion von y

darzustellen, und es ist daher anzunehmen, daß dieselbe auch für die Berechnung von $\mathfrak{H}_x$ und V genügt.

Formel (10), durch die das Potential für beliebige Stellen im Eisen berechnet werden kann, läßt sich zur Verzeichnung der Meridiane der Niveauflächen oder Nivaulinien, wie folgt, verwenden.

Man berechne mittels derselben für eine Anzahl von Punkten der beliebigen zur Achse AA parallelen Linie $A_1 A_1$ (vgl. Fig. 9) die Werte des Potentials. Man kann dann mittels der erhaltenen Werte eine Kurve (vgl. Fig. 10) konstruieren, welche die Potentialverteilung auf $A_1 A_1$ darstellt. Ebenso kann für eine zweite, dritte etc. Parallele $A_2 A_2$, $A_3 A_3$ ... verfahren werden. Aus der Kurve V_ξ, ξ (vgl. Fig. 8), sowie aus denjenigen für $A_1 A_1$, $A_2 A_2$ ... können nun Abszissenwerte abgeleitet werden, die irgend einem bestimmten Potentiale entsprechen. Die Eintragung dieser Abszissen in Fig. 9 liefert Punkte gleichen Potentials, durch welche somit eine Niveaulinie festgelegt wird. Die Wiederholung des Verfahrens für andere Potentialwerte gestattet beliebig viele Niveaulinien zu ermitteln. Offenbar können dieselben so verzeichnet werden, daß irgend zwei benachbarten Niveaulinien dieselbe kleine Potentialdifferenz entspricht, somit der reziproke Abstand zweier Kurven ein relatives Maß für die magnetische Kraft, Induktion nnd Magnetisierung an der betreffenden Stelle liefert.

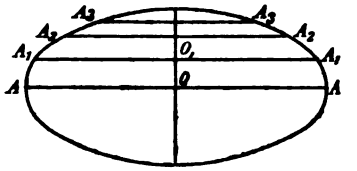


Fig. 9.

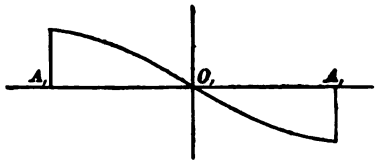


Fig. 10.

Die Kraftlinien können als orthogonale Trajektorien der Niveaulinien verzeichnet werden. Dabei ist zu untersuchen, ob zeichnerisch überall rechtwinkliger Schnitt erreicht ist. Die betreffende Prüfung kann mittels zweier sich rechtwinklig kreuzender Geraden vorgenommen werden, die man auf ein Stück transparenten Papieres zeichnet. Dieses legt man auf das Kurvenbild und läßt den Scheitelpunkt des rechten Winkels

der Reihe nach mit den Schnittpunkten der Kurvensysteme zusammenfallen. Dabei ist zu untersuchen, ob es möglich ist, die beiden Schenkel des rechten Winkels zugleich als Tangenten der zwei betreffenden sich schneidenden Kurven erscheinen zu lassen. Diese Prüfung ist für alle Schnittpunkte durchzuführen. Abweichungen vom rechtwinkligen Schnitt sind zeichnerisch versuchsweise so lange zu korrigieren, bis überall rechtwinklige Kreuzung erreicht ist. Das Problem der zeichnerischen Auffindung der Niveaulinien (bez. Niveauflächen) und der Kraftbez. Magnetisierungslinien erscheint somit auf diesem Wege lösbar.

Bei Verzeichnung der Kraftlinien können deren Abstände so gewählt werden, daß an allen Stellen des Eisens die räumliche Liniendichte den relativen Wert der magnetischen Kraft in polarer oder elektromagnetischer Definition oder auch denjenigen der Magnetisierung darstellt. Zu dem Zweck entnimmt man aus der Kurve in Fig. 2 solche Werte von l, welche einem Anwachsen oder Abnehmen des Induktionsflusses $\mathfrak{Z}$ in arithmetischer Reihe bei kleiner Differenz $\Delta\mathfrak{Z}$ entspricht. Man kann dann auf der Meridiankurve des Eisenkörpers Punkte bestimmen, die auf Parallelkreisen liegen, so daß zwischen je zwei benachharten der gleiche kleine Induktionsfluß ein- oder austritt. Legt man gerade diese Punkte an der Oberfläche in die zu verzeichnenden Kraftlinien, so begrenzen irgend zwei benachbarte einen Kraftkanal von kreisringförmigem Querschnitt, dem das gleiche $\Delta\mathfrak{Z}$ entspricht. Die räumliche Liniendichte liefert demnach ein Maß für die magnetische Kraft.

Im folgenden soll ein zweiter Weg, der sich zur Erreichung des angestrebten Zieles darbietet, besprochen werden. Es muß vorangeschickt werden, daß dabei ein gewisser geometrischer Satz vorausgesetzt wird, dessen exakter Beweis, obwohl ich den Satz für richtig halte, von mir bislang nicht hat erbracht werden können.

Außer der Kenntnis des Verlaufes von V_i in der Achse ist hier zunächst erforderlich diejenige der Potentialverteilung an der Oberfläche.

Bezeichnet V_i und $\mathfrak{H}_i$ Potential und magnetische Kraft für einen Punkt p_i im Eisen unendlich nahe der Oberfläche

(vgl. Fig. 11), dann ist die Tangentialkomponente der Kraft dargestellt durch

$$\mathfrak{H}_i \cdot \sin\beta = -\frac{\partial V_i}{\partial l}.$$

Somit ist

$$(15) \qquad V_i = -\int_0^l \mathfrak{H}_i \cdot \sin\beta \cdot dl.$$

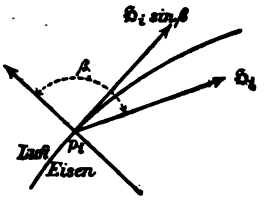


Fig. 11.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß für $l = 0$ das Potential gleich Null wird, ferner daß für ein gleich großes positives oder negatives l sich für V_i ein gleich großer negativer oder positiver Wert ergibt.

Man kann nun V_i auf geometrischem Wege ermitteln. Zufolge der Gleichung (4) ist

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\sigma}{\varkappa \cdot \cos\beta},$$

somit

$$\mathfrak{H}_i \sin\beta = \frac{1}{\varkappa} \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\mu}{\varkappa}\sigma \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

und daher

$$(16) \qquad V_i = -\frac{\mu}{\varkappa}\int_0^l \sigma \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot dl.$$

Da durch die Kurven in Figg. 4 und 5 die Werte von σ und $\operatorname{tg}\alpha$ als Funktionen von l gegeben sind, so kann für jedes beliebige l der Wert von $-(\mu/\varkappa)\sigma \cdot \operatorname{tg}\alpha$ ermittelt werden, und es ist daher möglich, eine Kurve (vgl. Fig. 12) zu konstruieren,

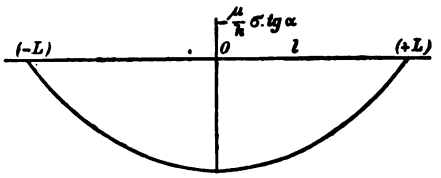


Fig. 12.

welche als Abszissen l, als Ordinaten $-(\mu/\varkappa)\sigma \cdot \operatorname{tg}\alpha$ enthält. Für $l = 0$ wird $\sigma \cdot \operatorname{tg}\alpha$ durch den unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$ dargestellt. Falls der betreffende Wert nicht mit genügender Annäherung durch Interpolation zu finden ist, kann für $l = 0$

derselbe gleich $-\mathfrak{H}_i \cdot \sin\beta$ sicherer nach Formel (13) für $\mathfrak{H}_e$ berechnet werden, in welche der Oberfläche entsprechend $y = R$ einzusetzen ist. Die Ausmessung der Fläche zwischen l von O an gerechnet, der zu l gehörenden Ordinate und der Kurve in Fig. 12 liefert unter Berücksichtigung des anzuwendenden Vorzeichens den Wert von V_i für das betreffende l. Somit ist es weiter möglich, aus Fig. 12 eine Integralkurve (vgl. Fig. 13) abzuleiten, welche als Abszissen l, als Ordinaten V_i enthält.

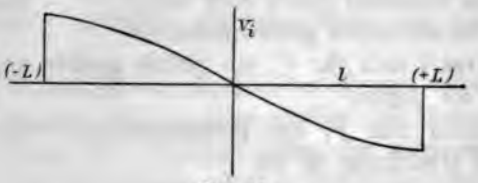


Fig. 13.

Aus den beiden Kurven V_ξ, ξ (Fig. 8) und V_i, l (Fig. 13) können nun beliebig viele zusammengehörige Werte von ξ und l entnommen werden, welche gleichen Werten von V_ξ und V_i entsprechen.

Durch zwei derartige Werte ξ und l sind aber korrespondierende Punkte auf der Achse und an der Oberfläche festgelegt, d. h. solche, welche einer und derselben Niveaufläche angehören. Es ist ersichtlich, daß so beliebig viele Paare von korrespondierenden Punkten ermittelt werden können. Dabei ist zu beachten, daß für je zwei solcher Punkte auch die Tangenten der Meridiane der Niveauflächen gegeben sind. Denn für die Oberfläche ist die Tangente senkrecht zu der Kraft $\mathfrak{H}_i$. Die Richtung derselben ist durch den Winkel β_0 gegeben, und letzterer bestimmt sich für irgend ein l aus der Gleichung $\operatorname{tg}\beta_0 = \mu \cdot \operatorname{tg}\alpha_0$ und der Kurve der Fig. 4. Außerdem muß der Schnitt der Niveaulinien mit der Achse unter rechtem Winkel erfolgen.

Man kann nun andererseits auch korrespondierende Punkte mit den zugehörigen Tangenten für die inneren Kraft- und Induktionslinien in der Oberfläche und der Äquatorebene, bez. der Meridiankurve des Rotationskörpers und einem mit ihr in gleicher Ebene liegenden Äquatorialhalbmesser auffinden.

Zu dem Zweck ist zunächst der Wert des Induktions-

flusses $\mathfrak{Z}_e$ zu berechnen, der einen von der Mitte aus in der Äquatorebene beschriebenen Kreis vom Radius $y_e < R$ durchsetzt. Aus Gleichung (13) ergibt sich dafür durch eine Rechnung, die sich von der auf p. 584 angestellten nur dadurch unterscheidet, daß hier $\mathfrak{Z}_e$ und y_e an Stelle von $\mathfrak{Z}_m$ und R zu setzen sind,

$$(17) \qquad \mathfrak{Z}_e = \pi\mu \left\{ \mathfrak{H}_0 \cdot y_e^2 + \frac{3}{4} a_3 \cdot y_e^4 - \frac{5}{8} a_5 \cdot y_e^6 + \ldots \right\}.$$

Aus dieser Gleichung können beliebig viele Wertepaare von $\mathfrak{Z}_e$ und y_e abgeleitet werden. Es ist daher möglich, eine Kurve zu konstruieren, welche $\mathfrak{Z}_e$ als Funktion von y_e darstellt.

Andererseits ist durch die grundlegenden Versuche der Wert von $\mathfrak{Z}$ an der Oberfläche als Funktion von l, also für einen beliebigen Parallelkreis gegeben (vgl. Fig. 2). Außerdem ist die Richtung der Kraft $\mathfrak{H}_i$ an der Oberfläche durch den Winkel β_0 bekannt zufolge Gleichung (1) und der Fig. 4. Demnach ist es möglich, für einen beliebigen Induktionsfluß $\mathfrak{Z} < \mathfrak{Z}_m$ die zugehörigen Werte von y_e und l zu bestimmen, d. h. somit den Radius des Kreises in der Äquatorebene und andererseits denjenigen eines Parallelkreises zu ermitteln, der den nämlichen Fluß $\mathfrak{Z}$ umschnürt.

Hiernach sind gegeben beliebig viele korrespondierende Punkte in der Oberfläche und in der Äquatorebene, d. h. solche, welche paarweise in derselben Magnetisierungslinie liegen. Dabei ist auch die Tangente der Kurve für jeden der Punkte bekannt.

Nach den vorstehenden Ausführungen lassen sich für beliebig viele Kurven sowohl des Systems der Magnetisierungslinien wie auch desjenigen der Niveaulinien je zwei Punkte und zugleich in diesen Punkten die Tangenten ermitteln. Ferner ist je eine Kurve beider Systeme, die Achse und der Äquatorialdurchmesser, in ihrem ganzen Verlaufe als Gerade bekannt. Endlich ist zu beachten, daß in der Oberfläche beliebig viele Schnittpunkte der Kurven des einen Systems mit denjenigen des anderen Systems gefunden werden können.

Da nun beide Kurvenscharen sich überall rechtwinklig durchkreuzen müssen, so halte ich es für höchst wahrscheinlich, daß unter diesen Umständen beide Kurvensysteme eindeutig bestimmt sind. Dafür den exakten Beweis zu erbringen, ist mir bis jetzt allerdings nicht gelungen.

Unter der Voraussetzung, daß eine solche Eindeutigkeit vorhanden ist, muß es möglich sein, durch versuchsweises Zeichnen von Kurven, von denen jede durch zwei korrespondierende Punkte so hindurchgeht, daß ihr Verlauf auch tangential zu den gegebenen Tangenten wird, zu zwei Kurvensystemen zu gelangen, die sich überall rechtwinklig durchkreuzen.

Man wird somit die Kurven unter Berücksichtigung der gegebenen Bedingungen in genügend großem Maßstabe zunächst versuchsweise zu verzeichnen haben. Hierauf ist in der p. 585 bis 586 beschriebenen Weise zu prüfen, ob die eine Schar als diejenige der orthogonalen Trajektorien der anderen Schar und v. v. erscheint. Abweichungen sind so lange zu korrigieren, bis überall rechtwinklige Kreuzung stattfindet. Daß auch bei diesem Verfahren die Niveau- und Kraftlinien in den für die Anschaulichkeit wünschenswertesten Abständen (vgl. p. 585 bis 586) verzeichnet werden können, ist ohne weiteres ersichtlich.

Man kann schließlich die beiden beschriebenen Methoden miteinander kombinieren und kommt damit zu einem dritten Wege, auf dem das Problem lösbar erscheint. Dieser ist naturgemäß umständlicher als jeder der beiden anderen, liefert indessen eine größere Anzahl von Bestimmungsstücken und damit eine erhöhte Sicherheit bei der Ermittelung der Kurven.

Die Frage, ob und wie weit sich die Methoden zur praktischen Ausführung eignen, kann erst nach entsprechender Anwendung derselben erkannt werden.

Aachen, Mai 1907.

(Eingegangen 12. Mai 1907.)

11. *Der Inhalt der Gleichung $p.v = R.T$; von Rudolf Laemmel.*

Hr. Adler veröffentlichte in diesen Annalen [1]) einen Aufsatz über die analytische Formulierung des sogenannten „Ersten Hauptsatzes", in welchem er den Gay-Lussacschen Überströmungsversuch als ein neues Element in der Spekulation *neben* der obigen Gleichung behandelt. Das ist unrichtig; denn sobald man für irgendwelche Körper die Gleichung

$$p.v = RT \tag{1}$$

als gültig ansieht, folgt schon, daß die innere Energie U nur eine Temperaturfunktion ist (oder eine Funktion des Produktes von Druck mal Volumen; nicht, wie Hr. Adler sagt, eine Funktion von Druck *und* Volumen). Es gilt nämlich allgemein:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\partial p}{\partial T} - p \tag{2}$$

und auch:

$$1 = \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \left(-\frac{\partial v}{\partial p}\right), \tag{3}$$

woraus sich ergibt, daß für alle Körper, die einer Zustandsgleichung

$$p = T.\,\text{Funktion}\,(v) \tag{4}$$

folgen, die innere Energie vom Volumen unabhängig ist, etc.; insbesondere ist die innere Energie eines der Gleichung $p.v = RT$ folgenden Körpers wegen der allgemeingültigen Gleichung (2) etc. ohne weiteres eine bloße Temperaturfunktion.

Das Experiment ist nur Kontrollexperiment und zeigt weiter nichts, als daß das Gasgesetz $pv = RT$ und damit alle seine Konsequenzen nur mehr oder minder genau stimmen, je nachdem was für ein Gas und unter welchen Umständen man es nimmt.

Unbegründet ist es, der Darstellung von Clausius deswegen eine *Unrichtigkeit* vorzuwerfen, weil Clausius die

1) F. W. Adler, Ann. d. Phys. 22. p. 782. 1907.

innere Energie, die er als Funktion von T erwiesen hatte, als von T und v abhängig analytisch formuliert. Das kann man immerhin noch tun, wenn es auch nicht viel Zweck hat. Es hat nämlich diese Darstellung noch mehr Berechtigung wie die Adlersche:

$$dU = \frac{dU}{dT} \cdot dT, \tag{5}$$

die ja doch eine völlige Identität ist und eigentlich gar keine *Aussage* mehr enthält: $dU = dU$. Statt (5) müßte man schreiben

$$dU = f(T) . dT \quad \text{oder} \quad U = \int f(T) . dT. \tag{5'}$$

Erwärmt man ein ideales Gas langsam um 1^0 C., so kann man es sich dabei auch langsam (vermittelst vieler kleiner hintereinander befindlicher Hähne, die je ein Stück Vakuum abgrenzen) gegen das Vakuum zu ausdehnen lassen. Man kann nun die Ausdehnung gegen das Vakuum so regulieren, daß die dadurch hervorgerufene Druckverminderung gerade durch die infolge der Erwärmung entstehende Druckvermehrung aufgehoben wird. Dehnt man nämlich bei der Erwärmung um 1^0 das Volumen um R/p aus, so ist die neue Temperatur

$$T_1 = T + 1 = \frac{pv + R}{R},$$

das neue Volumen

$$v_1 = v + \frac{R}{p} = \frac{pv + R}{p},$$

der neue Druck also

$$p_1 = \frac{RT_1}{v_1} = p\,.\,^{1})$$

Die Wärmemenge, die unter solchen Umständen zugeführt wird, ist die von Hrn. Adler in der erwähnten Arbeit als C_π bezeichnete Größe. Hr. Adler hat keine Angabe gemacht, wie dieses C_π („spezifische Wärme bei konstantem inneren Druck") zu realisieren wäre. Wir haben nun die Möglichkeit der Realisierung dargetan. Aus unserer Darstellung folgt, daß C_π für alle diejenigen Körper, die der Gleichung (4)

1) Für Körper, die der Gleichung (4) folgen, ist die entsprechende Volumenvermehrung x pro Grad aus der Gleichung

$$p\,.\,\{f(v) - f(v + x)\} = f(v)\,.\,f(v + x)$$

zu berechnen.

folgen, ohne weiteres gleich C_v ist. (Also nicht bloß für ideale Gase, sondern auch noch für andere, vielleicht auch *reale* Körper.)[1])

Denn einerseits ist dann

$$\frac{\partial C_v}{\partial v} = 0, \tag{6}$$

es kommt also auf dasselbe heraus, ob ich zuerst das Volumen v um 1° erwärme und dann gegen das Vakuum um R/p ausdehne, *oder* ob ich zuerst gegen das Vakuum ausdehne und dann erwärme. Andererseits wird die Temperatur eines solchen Körpers durch die Ausdehnung gegen das Vakuum nicht sinken. Also ist ohne weiteres

$$C_\pi = C_v$$

und zwar nicht nur für Körper, deren Zustandsgleichung $pv = RT$ ist, sondern auch noch für andere Körper.

Im allgemeinen ist aber C_π natürlich nicht gleich C_v und insofern könnte man in der Darstellung des Clausius wirklich einen Mangel sehen, dessen Aufdeckung ein Verdienst war.

Zürich, 10. Mai 1907.

---

1) Dieses folgt aus der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial C_v}{\partial v} + T \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = 0$$

ohne weiteres.

(Eingegangen 28. Mai 1907.)

12. *Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel; von H. Erfle.*

Die Untersuchungen von P. Drude[1]) haben zu dem Resultat geführt, daß die Eigenschwingungen im Ultraviolett hervorgebracht werden durch die negativen Elektronen mit konstantem Verhältnis $e/m = 1{,}5 \cdot 10^7$;[2]) er hat gezeigt, daß es möglich ist, die Zahl der Elektronen, die zu einer bestimmten Eigenwellenlänge λ_v gehört, pro Molekül aus den Konstanten der Dispersionsformel zu berechnen; außerdem ergibt sich ohne Benutzung dieser Konstanten ein unterer Grenzwert für die Summe schwingungsfähiger negativer Elektronen pro Molekül.

Da in dem Ansatz für die Dichte

$$d = \frac{\mathfrak{N}_v}{p_v} \cdot H \cdot M, \quad [3]) \tag{1}$$

der Quotient $\mathfrak{N}_v/p_v$ die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter darstellt, so fehlt zur Bestimmung dieser Zahl nur noch $\mathfrak{N}_v$.

Die vorkommenden Bezeichnungen haben folgende Bedeutung:

$\mathfrak{N}_v$ **Zahl der Elektronen mit der Eigenwellenlänge λ_v pro 1 cm³;**

p_v **Zahl der Elektronen der Gattung λ_v pro Molekül;**

ϑ_v **„Beweglichkeit" der Elektronen dieser Gattung, d. h. $\vartheta_v/4\pi$ gibt an, um wieviel ein Elektron mit der Ladung einer elektrostatischen Einheit durch eine elektrische Kraft 1 (elektrostatisch gemessen) aus der Ruhelage herausgezogen wird;**

H **absolute Masse des Wasserstoffatoms;**

M **Molekulargewicht der Substanz.**

Die bekannte Kettelersche Dispersionsformel lautet:

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_v^2}{\lambda^2 - \lambda_v^2}. \tag{2}$$

Für Gase genügt meist die Gleichung:

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}. \tag{3}$$

1) P. Drude, Ann. d. Phys. **14.** p. 677—725, 936—961. 1904.
2) P. Drude, l. c. p. 711, 719.
3) P. Drude, l. c. p. 683.

D ist die Dielektrizitätskonstante der Elektronengattung mit der Eigenwellenlänge λ_ϱ,

$$D = \mathfrak{N}_\varrho \vartheta_\varrho . \tag{4}$$

Nimmt man bei Gasen als erste Annäherung *ein* ultraviolettes Absorptionsgebiet an, dann ist

$$A = 1 + \mathfrak{N}_\varrho \vartheta_\varrho \quad \text{und} \quad B = \mathfrak{N}_\varrho \vartheta_\varrho \lambda_\varrho^2 . \tag{5}$$

Für die Eigenwellenlänge λ_h irgend einer Ionengattung besteht, solange die Reibungskoeffizienten r_h dieser Ionengattung klein sind, die Beziehung:

$$\lambda_h^2 = \frac{\pi m_h \vartheta_h}{e_h^2} . \tag{6}$$ [1])

1) P. Drude, l. c. p. 680. — Ich habe aus Beobachtungen von Pflüger (Wied. Ann. 65. p. 209, 210. 1898) z. B. für festes Cyanin das Verhältnis von r_h^2 zu $\frac{16\pi m_h}{c^2 e_h^2 \vartheta_h}$ bestimmt und fand $6 . 10^{-4}$; es ergibt sich nämlich aus der Bewegungsgleichung eines Elektrons der Gattung λ_h:

$$m_h \frac{\partial \xi_h}{\partial t^2} = e_h' . X - \frac{4\pi e_h'^2}{\vartheta_h} \xi_h - r_h e_h'^2 \frac{\partial \xi_h}{\partial t}$$

(e_h' elektrostatisch gemessen) für $X = 0$ die wahre Eigenwellenlänge λ_h'; es ist:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_h'^2 &= \frac{\pi m_h \vartheta_h}{e_h^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_h^2 c^2 e_h^2 \vartheta_h}{16\pi m_h}} \\ &= \lambda_h^2 \cdot \frac{1}{1 - w} . \end{aligned} \right. \tag{6'}$$

Nach Pflüger ist g_h in den Dispersionsformeln:

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + \sum \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h (\lambda^2 - \lambda_h^2) \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_h^2)^2 + g_h^2 \lambda^2}$$

und

$$2 n^2 \varkappa = \sum \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h g_h \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_h^2)^2 + g_h^2 \lambda^2}$$

von der Größenordnung 0,019 bis 0,037 [μ].

Nun ist

$$g_h = \frac{c}{2} r_h \vartheta_h , \quad \text{wo} \quad c = 3 . 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} ,$$

daraus folgt für $g_h = 3 . 10^{-6}$ cm

$$r_h^2 = \frac{36 . 10^{-12}}{c^2 \vartheta_h^2} \quad \text{und} \quad w = \frac{36 . 10^{-12} . e_h^2}{16\pi m_h \vartheta_h} = \frac{36 . 10^{-12}}{16 \lambda_h^2} .$$

Da $\lambda_h^2 = 0{,}4 . 10^{-8}$ cm^2, so wird $w = 6 . 10^{-4}$; noch besser gilt die Gleichung (6) als Näherung für (6'), wenn g_h von der Größenordnung $10^{-3}\mu = 10^{-7}$ cm ist, wie es Ketteler (Wied. Ann. 12. p. 517. 1881), für alkoholische Cyaninlösungen gefunden hat; man kann also hier, wie in anderen Fällen, in der Tat das die Reibung enthaltende Glied vernachlässigen.

Hierbei ist die Ladung des Ions, e_h, elektromagnetisch gemessen. Speziell für die Elektronen mit Eigenschwingungen im Ultraviolett gilt:

(7) $$\vartheta_v = \lambda_v^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e}{m} \cdot e .$$

Mit Benutzung der Zahlen

$$\frac{e}{m} = 1{,}5 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{E.M.E.}}{\text{g-Masse}}\right], \quad e = \frac{3{,}4 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10}} = 1{,}13 \cdot 10^{-20}$$

geht (7) über in

(8) $$\vartheta_v = 5{,}395 \cdot 10^{-14} \cdot \lambda_v^2 \,[\text{cm}^3] .$$

(2) liefert den Wert λ_v, (8) ϑ_v, (4) $\mathfrak{N}_v$ und die Anzahl der Moleküle im Kubikzentimeter ist

(9) $$N = \frac{\mathfrak{N}_v}{p_v} ,$$

wobei

(10) $$p_v \cdot \frac{e}{m} = 3{,}26 \cdot 10^{-4} \frac{M}{d} \frac{\mathfrak{N}_v \vartheta_v}{\lambda_v^2} .$$ [1])

Sobald also von einer Substanz die Konstanten der Dispersionsformel und die Dichte bestimmt sind, ist die Möglichkeit gegeben, die Loschmidtsche Zahl, d. h. die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter eines Gases bei 0° Temperatur und 760 mm Druck zu berechnen. Ist die Substanz, deren Dispersion gemessen ist, ein Gas (0°, 760 mm), dann ist $\mathfrak{N}_v/p_v$ direkt die Loschmidtsche Zahl. Sind für eine Flüssigkeit die Konstanten der Dispersionsformel und die Dichte bestimmt, so ist aus (1) die absolute Masse eines Wasserstoffatoms berechenbar, und die Loschmidtsche Zahl ist

(11) $$N = \frac{0{,}00008985}{2H} .$$

Zunächst verwende ich die Beobachtungen von K. Scheel[2])

1) P. Drude, l. c. p. 683, 680. Der Faktor $3{,}26 \cdot 10^{-4}$ ist

$$\frac{\pi}{\frac{e}{H}} = \frac{\pi}{0{,}965 \cdot 10^4} ,$$

da ja aus der Elektrolyse folgt

$$\frac{e}{H} = 0{,}965 \cdot 10^4 .$$

2) K. Scheel, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. Januar 1907.

über die Dispersion des Wasserstoffs und des Stickstoffs (gasförmig). Scheel gibt die Konstanten der Dispersionsformel

$$(12) \qquad (n-1).10^7 = A' + \frac{B'}{\lambda^2}$$

für Wasserstoff und Stickstoff bei 0° und 760 mm an; dann ist

$$(13) \qquad (n^2-1).10^7 = 2A' + \frac{2B'}{\lambda^2},$$

da $n-1$ klein ist gegenüber 1.

Außerdem will ich noch die von Ketteler[1]) für Wasser angegebenen Konstanten der Formel (2) zur Berechnung von N verwenden.

1. Wasserstoff.

$$n^2 = 1 + 2716{,}6 \,.\, 10^{-7} + \frac{1810 \,.\, 10^{-17}}{\lambda^2}.$$

Nach (5):

$\lambda_v^2 = \frac{1810}{2716{,}6} \cdot 10^{-10}\,\text{cm}^2 = 0{,}6663 \,.\, 10^{-10}\,\text{cm}^2$, d. h. $\lambda_v = 82\,\mu\mu$.[2])

$\vartheta_v = 3{,}595 \,.\, 10^{-24}\,\text{cm}^3$, und aus $\mathfrak{N}_v \vartheta_v = 2716{,}6 \,.\, 10^{-7}$ folgt $\mathfrak{N}_v = 7{,}56 \,.\, 10^{19}$. Da nach Drude[3]) $p_v = 2$, so ist

$$N = \frac{\mathfrak{N}_v}{p_v} = 3{,}78 \,.\, 10^{19}.$$

2. Stickstoff.

$$n^2 = 1 + 5812{,}2 \,.\, 10^{-7} + \frac{4494 \,.\, 10^{-17}}{\lambda^2}.$$

Nach (5):

$$\lambda_v^2 = 0{,}7732 \,.\, 10^{-10}\,\text{cm}^2, \text{ d. h. } \lambda_v = 88\,\mu\mu.$$

$\vartheta_v = 4{,}172 \,.\, 10^{-24}\,\text{cm}^3$; aus $\mathfrak{N}_v \vartheta_v = 5812{,}2 \,.\, 10^{-7}$ folgt

$$\mathfrak{N}_v = 13{,}94 \,.\, 10^{19}.$$

Nach (10) berechne ich $p_v = 4{,}5$ mit $d = 0{,}0012505$; somit ist

$$N = \frac{\mathfrak{N}_v}{p_v} = \frac{13{,}94}{4{,}5} \cdot 10^{19} = 3{,}1 \,.\, 10^{19}.$$

---

1) E. Ketteler, Wied. Ann. **30**, p. 308. 1887.

2) Nach V. Schumann, Ann. d. Phys. **4**. p. 642—645. 1901 ist Wasserstoff vollständig lichtdurchlässig bis 100 $\mu\mu$.

3) Ich berechne aus den Messungen Scheels $p_v \,.\, (e/m) = 2{,}83 \,.\, 10^7$ bei 0° und 760 mm bez. $2{,}18 \,.\, 10^7$ bei −188° und 759 mm.

3. Wasser (flüssig).

Ketteler gibt für D und λ_v^2 die folgenden Werte an: $D = 0{,}4125$; $\lambda_v^2 = 1{,}540 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^2$; d. h. $\lambda_v = 124\,\mu\mu$.[1]) $p_v = 1$ nach Drude.[2]) Ich berechne nach (8), (4), (11), (9):

$$\vartheta_v = 8{,}3 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^3; \quad \mathfrak{N}_v = 0{,}5 \cdot 10^{+23};$$

$$H = \frac{1}{0{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 18} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-23}\,\mathrm{g}$$

und

$$N = 0{,}00008985 \cdot \frac{9}{2} \cdot 10^{+23} = \mathbf{4{,}0_4 \cdot 10^{19}}.$$

Die drei von mir für N berechneten Werte stimmen gut mit dem von Planck aus den Konstanten der Planckschen Spektralgleichung berechneten überein: $\mathbf{2{,}76 \cdot 10^{19}}$; die kinetische Gastheorie ergibt N zwischen $2 \cdot 10^{19}$ bis $10 \cdot 10^{19}$.

Von Interesse ist noch die Berechnung der Maximalamplitude der Elektronenbewegung ξ_v aus der Bewegungsgleichung eines Elektrons für den stationären Zustand

$$\frac{\partial \xi_v}{\partial t} = 0 = \frac{\partial^2 \xi_v}{\partial t^2},$$

wenn $X = 0{,}016$ (elektrostatisch gemessen) die maximale elektrische Feldstärke für Sonnenlicht[3]) ist; dann wird

$$3{,}4 \cdot 10^{-10} \cdot \xi_v = \frac{10^{-23}}{4\pi} \cdot 0{,}016;$$

dabei habe ich mit $\vartheta_v = 10^{-23}$ gerechnet. ξ_v wird von der Größenordnung $\mathbf{4 \cdot 10^{-17}\,cm}$[4]); zum Vergleiche sei auf den Mittelwert für den Molekulardurchmesser: $2 \cdot 10^{-8}$ cm hingewiesen.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.

---

1) Reines Wasser ist bis 200 $\mu\mu$ äußerst durchsichtig, bei 186 $\mu\mu$ ist nach H. Kreusler, Ann. d. Phys. **6.** p. 412—423. 1901 die Absorption schon sehr stark (68,9 Proz.).

2) P. Drude, l. c. p. 693.

3) P. Drude, Lehrb. d. Optik 2. Aufl. p. 443.

4) Einen ähnlichen Wert berechnet Drude aus der Dispersion der Metalle, Physik. Zeitschr. **1.** p. 161—165. 1900.

(Eingegangen 28. Mai 1907.)

13. *Zur Lambschen Gittertheorie; von Clemens Schaefer und Max Laugwitz.*

In einer früheren Arbeit[1]) haben wir die Resultate einer von J. J. Thomson[2]) herrührenden Theorie des Hertzschen Drahtgitters mit der Erfahrung verglichen, und kamen dabei zu dem Ergebnisse, daß „die Thomsonsche Theorie die Existenz, das Vorzeichen und den Gang des bei der Reflexion auftretenden Phasenverlustes qualitativ richtig angibt, daß sie dagegen die Beobachtungen quantitativ in keiner Weise darzustellen vermag".

Eine andere Gittertheorie war uns damals nicht bekannt.

Durch eine inzwischen erschienene Arbeit von Godfrey H. Thomson[3]) wurden wir indessen darauf aufmerksam, daß außer der Thomsonschen noch eine Gittertheorie von H. Lamb[4]) vorliegt.

Unsere Messungen gestatten es nun, auch diese Theorie zu prüfen. Wir geben in der folgenden Tabelle die von uns beobachteten, die nach Lamb und nach J. J. Thomson berechneten Werte der Phasendifferenz α an; die beiden ersten Kolumnen enthalten die Konstanten der Gitter, an denen die Versuche angestellt wurden (c = Drahtradius, a = Drahtabstand).

c	a	α beob.	α nach Lamb	α nach J. J. Thomson
0,015 cm	0,38 cm	0,48 cm	0,17 cm	0,48 cm
	0,75 „	0,58 „	0,48 „	1,00 „
	1,50 „	1,2 „	1,14 „	2,60 „
	3,00 „	1,93 „	1,98 „	6,6 „
0,0025 „	3 „	2,2 cm	2,3 cm	10 cm
0,015 „		1,93 „	1,98 „	6,6 „
0,06 „		1,5 „	1,54 „	4,0 „
0,1 „		1,35 „	1,23 „	3,0 „

1) Cl. Schaefer u. Max Laugwitz, Ann. d. Phys. **21.** p. 587. 1906.

2) J. J. Thomson, Recent researches in Electr. and Magn. p. 425 ff.

3) G. H. Thomson, Straßb. Inaug.-Diss. 1906; auch Ann. d. Phys. **22.** p. 365. 1907.

4) H. Lamb, Proc. of the Lond. Math. Soc. **29.** p. 523. 1898.

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und nach Lamb berechneten Werten recht befriedigend, namentlich wenn man die starke Abweichung der Thomsonschen Theorie bedenkt. Auch Hr. G. H. Thomson hat in der schon genannten Arbeit nach *vollständig anderer Methode* einen recht guten Anschluß der Beobachtungen an die Lambsche Theorie erzielt.

Man darf daher die Lambsche Theorie innerhalb der Grenzen der Untersuchung von G. H. Thomson und uns als vollkommen hinreichend ansehen.

Breslau, Physik. Institut der Universität, im Mai 1907.

(Eingegangen 22. Mai 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 9.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 23.

1. *Über die Abhängigkeit von Polarisatorwiderstand, Scheibendicke und Scheibenabstand der Influenzmaschinen;* von *H. Wommelsdorf.*

§ 1.

Bereits früher habe ich an dieser Stelle [1]) gezeigt, daß der bisher als feststehend angenommene, von Rosetti herrührende Satz [2]), daß die Stromstärke der Influenzmaschinen mit zunehmendem Scheibenabstand kleiner wird, nicht zutrifft, daß es vielmehr für jede Maschinengröße bez. Type einen bestimmten Scheibenabstand gibt, bei dem die größte nutzbare Stromleistung bez. das größte Entladepotential geliefert wird.

An anderer Stelle [3]) habe ich ferner ein allgemeines, alle gebräuchlichen Arten von Influenzmaschinen umfassendes Polarisationssystem mitgeteilt, das durch die Einführung von Widerständen in die Polarisatorkreise entsteht und an Hand absoluter Messungen nachgewiesen, daß jede Influenzmaschine bei gleichbleibender Antriebskraft die maximale nutzbare Stromleistung sowie den besten Wirkungsgrad mehr oder weniger nur bei einem bestimmten Widerstande der Polarisatorkreise (Querkonduktoren, Hilfsstäbe) liefert.

Bei der Weiterverfolgung dieser Versuche beobachtete ich alsbald die höchst überraschende Erscheinung, daß eine gewisse Abhängigkeit des günstigsten Polarisatorwiderstandes und des günstigsten Scheibenabstandes, weiterhin *auch der Scheibendicke* vom Entladepotential, vor allem aber eine Abhängigkeit dieser Größen untereinander besteht. Die hieraus gewonnenen, im folgenden mitgeteilten Versuchsergebnisse haben nicht nur die praktische Durchbildung der demnächst im

1) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **15**. p. 1019. 1904.

2) F. Rosetti, Pogg. Ann. **154**. p. 507. 1875; vgl. auch G. Wiedemann, Elektrizität **1**. § 1146. p. 971. IV. Aufl. 1893.

3) H. Wommelsdorf, Physik. Zeitschr. **6**. p. 181. 1905.

Handel erscheinenden *Kondensatormaschinen* überaus gefördert, sondern auch die Möglichkeit dazu an die Hand gegeben, eine neue Art von *Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingeschlossenen Sektoren* bereits gleichzeitig mit dem Erscheinen dieser Abhandlung in den Handel zu bringen.[1])

Bei den zum Teil kostspieligen Untersuchungen wurde ich hinsichtlich der erforderlichen Aufwendungen an guten Vergleichsmaschinen und Materialien in zuvorkommender Weise durch die Spezialfirma für Influenzmaschinen Alfred Wehrsen, Berlin, unterstützt. Unter Berücksichtigung dieses ist es zur Wahrung der rein praktischen, für den Bau harmonischer Influenzmaschinen in Betracht kommenden Erfahrungen angezeigt, auf eine ziffernmäßige Angabe der Untersuchungsergebnisse zu verzichten und im folgenden lediglich eine für die wissenschaftliche Erkenntnis ausreichende Mitteilung und Besprechung der Resultate zu bringen.

§ 2.

In analoger Weise wie seinerzeit für den Scheibenabstand stellte ich zunächst hinsichtlich der Scheibendicke fest, daß auch hier der bisher allgemein, auch von mir[2]), als richtig angenommene Satz, daß die Influenzmaschinen eine um so größere Stromleistung liefern, je dünner ihre Scheiben sind, nicht richtig ist, daß sie vielmehr eine „günstigste Scheibendicke“ besitzen, bei der für ein bestimmtes Entladepotential im äußeren Stromkreise die maximale nutzbare Stromleistung geliefert wird.

Zunächst ergibt bereits eine Überlegung, daß bei gleichbleibendem Abstand der aufeinander arbeitenden Metallsektoren bez. Beläge, Halbleiter etc. die nutzbare Stromleistung unter der Voraussetzung, daß das Material der Scheiben eine höhere Dielektrizitätskonstante als Luft besitzt, mit der Dicke der die Sektoren bez. Beläge tragenden und trennenden Scheiben wachsen muß. Da nun in diesem Falle — nämlich durch das Vergrößern der Scheibendicke bei gleichbleibendem Abstand der aufeinander arbeitenden leitenden Beläge — die Gesamtinfluenzwirkung und damit auch die „schädlichen Ladungen“

1) Vgl. die auf diese Arbeit folgende Abhandlung des Verfassers sowie die Ankündigung der ausführenden Firma A. Wehrsen, Berlin SO. 33, im Inseratenteil dieses Heftes.

2) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. 9. p. 658. 1902.

auf den Rückseiten (vgl. die eingangs zitierte Abhandlung!) größer werden, kann dadurch, daß außerdem auch der Scheibenabstand auf seinen günstigsten Wert gebracht wird, die nutzbare Stromleistung noch weiter gesteigert werden.

Da nun einerseits mit der Vergrößerung des Abstandes der influenzierenden Leiter, d. h. also der Summe von Scheibenabstand und Dicke, die Gesamtinfluenzwirkung schwächer wird, andererseits aber bei der Vergrößerung der Scheibendicke bei gleichbleibendem Abstande der leitenden Beläge bald eine praktische Grenze (Spielraum zwischen den aufeinander arbeitenden Scheiben) erreicht wird, so kann man analog wie von einem „günstigsten Scheibenabstand" kurzweg auch von einer „günstigsten Scheibendicke" reden, d. h. also von einer Dicke der Scheiben, bei der die größte nutzbare Stromleistung für ein bestimmtes Entladepotential bei einem bestimmten Scheibenabstand von einer Maschine geliefert wird.

Es hat sich nun weiterhin gezeigt, daß der günstigste Scheibenabstand und — wie ich gleich hinzufüge — auch die günstigste Scheibendicke mit der Entladespannung im äußeren Stromkreise wachsen.

Ferner war bereits früher [1]) von mir ermittelt worden, daß sich auch die Polarisatorwiderstände bis zu einem gewissen

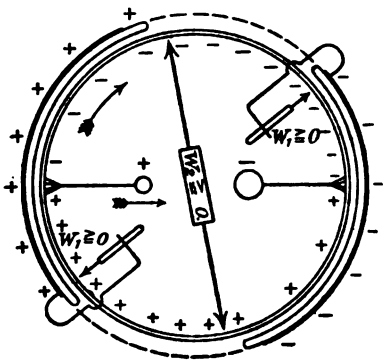


Fig. 1.

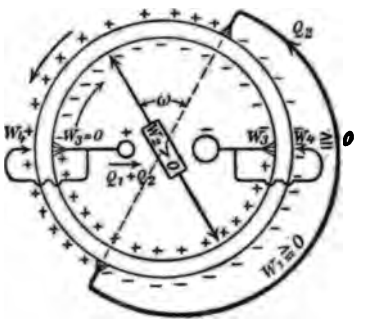


Fig. 2.

Grade analog verhalten. Beispielsweise wird für ein bestimmtes Entladepotential die größte nutzbare Stromleistung dann ge-

1) H. Wommelsdorf, Physik. Zeitschr. 6. p. 181. 1905.

liefert, wenn man in einen Polarisatorkreis einer Influenzmaschine nach Fig. 1 oder in weit größerem Maße einer solchen nach Fig. 2 einen bestimmten Widerstand $W_2 \gtrless O$ einfügt. Ebenso hätte man unter Umständen je einen Widerstand in beide Polarisatorkreise der Schaltung nach Fig. 2 einfügen können. Bei dieser Schaltung, nämlich dem System mit Doppeldrehung, zeigte es sich nun, daß auch der „günstigste Polarisatorwiderstand" — wie ich ihn analog bezeichnen will — bei ein und derselben Maschine im allgemeinen mit der Entladespannung im äußeren Stromkreise wächst.

§ 3.

Geradezu überraschend und zugleich von großer Bedeutung für den Wirkungsgrad und den Bau guter Influenzmaschinen mit Doppeldrehung, im besonderen aber von brauchbaren Kondensatormaschinen, ist das weitere unter Nr. 4 erbrachte Resultat, daß bei diesem System der Scheibenabstand bez. die Scheibendicke und der Polarisatorwiderstand auch untereinander abhängig sind, und zwar in der Weise, daß der günstigste Scheibenabstand bez. die günstigste Scheibendicke mit wachsendem Polarisatorwiderstand abnimmt und umgekehrt.

Haben wir daher nunmehr eine Kondensatormaschine, deren Scheibenabstand für ein kleines Entladepotential auf seinen günstigsten Wert eingestellt war, so können wir — innerhalb gewisser Grenzen — einfach durch entsprechende Widerstandsvergrößerung an dem oder den Polarisatorkreisen auch bei größeren Entladespannungen wiederum von der Maschine dieselbe oder nahezu dieselbe Stromleistung erlangen, als wenn die Scheibenabstände bez. Dicken für die betreffenden größeren Spannungen auf ihren günstigsten Wert gebracht wären. Wäre dies nicht der Fall, so müßte man bei den Influenzmaschinen den Scheibenabstand oder gar die Scheibendicke für jede Entladespannung (Schlagweite) neu einstellen können, um in jedem Falle die größte Stromleistung (Funkenzahl) zu erzielen, eine Forderung, die praktisch unerfüllbar wäre.

Mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der genannten Größen untereinander wird man daher zweckmäßig bei der Konstruktion einer Kondensatormaschine zunächst den Scheibenabstand

bez. die Scheibendicke für nicht zu große, mehr mittlere oder kleinere Entladespannungen wählen und später im Betriebe bei den höheren und höchsten Spannungen entsprechend große Widerstände in die Polarisatorkreise schalten, was bereits durch einfaches Abrücken eines Polarisators von seinem Kollektor (Luftwiderstand) — wie in der eingangs in Fußnote 2 zitierten Arbeit angegeben — in bequemer und genügender Weise ausgeführt werden kann.

Es bleibt mir nun noch übrig, darauf hinzuweisen, daß sowohl bei dem System mit Doppeldrehung als auch bei dem mit festem Feld *Scheibenabstand und Scheibendicke* sich *auch untereinander* gegenseitig ergänzen bez. hinsichtlich ihrer Wirkung ersetzen können. Dieselbe Maschine besitzt bei derselben Entladespannung und demselben Polarisatorwiderstande einen um so kleineren „günstigsten Scheibenabstand", je größer die Scheibendicke ist; bei genügender Scheibendicke kann also der „günstigste Scheibenabstand" auch gleich Null werden; für diesen praktisch unausführbaren Fall würde sich auch der von Rosetti allgemein aufgestellte Satz, daß „die Stromstärke und nützliche Arbeit der Influenzmaschinen kleiner werden, wenn der Scheibenabstand zunimmt", als richtig erweisen.

Da nun die Gesamtinfluenzwirkung mit der Dielektrizitätskonstante der Zwischenschichten steigt und diese bei den gebräuchlichen Scheibenmaterialien wesentlich höher ist als bei Luft, so ist theoretisch der günstigste Fall der eben besprochene, wo nämlich der „günstigste Scheibenabstand" gleich Null wird und die beiden entsprechend dicken aufeinander arbeitenden Scheiben den ganzen Zwischenraum zwischen ihren influenzierenden Leitern ausfüllen. Diesen ideellen Fall könnte man sich so vorstellen, daß die beiden Scheiben eng aufeinander schleifen. Praktisch ist man natürlich gezwungen, einen gewissen Abstand zwischen den Scheiben zuzulassen, der je nach der Scheibengröße, der Dauerhaftigkeit des Scheibenmateriales gegen Formänderung (Werfen, Verziehen) und der Präzision der Ausführung mehr oder weniger groß anzunehmen ist.

Aus dem Mitgeteilten ergibt sich für die Konstruktion guter Influenz- bez. Kondensatormaschinen von größtmöglicher

Stromleistung die Regel, zunächst einen möglichst kleinen Scheibenabstand anzunehmen und alsdann unter Beibehaltung desselben die „günstigste Scheibendicke“ zu ermitteln. Allerdings wird in der Praxis zumeist die Kostenfrage, nämlich die Rücksicht auf den hohen Preis der zurzeit bekannten Scheibenmaterialien, umgekehrt die Annahme einer nicht zu starken bez. mittleren Scheibendicke und alsdann die Ermittelung des „günstigsten Scheibenabstandes“ empfehlen.

Ähnliche Gesichtspunkte sind es ferner, die mich bestimmten, das Material der festen Scheiben nur an bestimmten Stellen, nämlich dort, wo die schädlichen Ladungen entstehen, dicker zu halten — eventuell gar, je nach der Stärke derselben, verschieden dick —, dagegen die Scheiben an anderen Stellen nur sehr dünn oder gar ihre Dicke gleich Null zu machen und damit die bisher übliche Form der festen Scheiben ganz aufzugeben. Auf diese Weise gelangte ich zu einer Influenzmaschine, bei der das wirksame Dielektrikum der Erregerscheibe nur wenig größer ist als die Papier- bez. Stanniolbeläge der festen Scheibe, mithin zu einer Influenzmaschine mit deutlich unterscheidbaren Erregerfeldern (vgl. Fig. 1 sowie auch Fig. 4 und 6 der dieser Arbeit folgenden Abhandlung).

§ 4.

Wie bereits in der eingangs zitierten Abhandlung angegeben, ist die Ursache für das Bestehen eines bestimmten „günstigsten Scheibenabstandes“ in dem Auftreten der also von mir genannten „schädlichen Ladungen“ auf den Rückseiten der Scheiben zu suchen. Wie ich fernerhin feststellte, sind sie auch für das in dieser Arbeit mitgeteilte Vorhandensein einer „günstigsten Scheibendicke“ sowie eines „günstigsten Polarisatorwiderstandes“ die Ursache.

Hieraus erklärt es sich, daß die im vorstehenden angegebenen Ergebnisse um so weniger auffallend in die Erscheinung treten, je geringer die Stärke der „schädlichen Ladungen“ bei dem betreffenden Maschinensysteme ist. So kommt es denn auch, daß die günstigsten Größen von Scheibenabstand und Scheibendicke sowie der Polarisatorwiderstände, ferner die Abhängigkeit dieser Größen untereinander sofort wesentlich kleiner werden, wenn die Scheiben in einem Gase

von höherem Druck oder in einem flüssigen Medium von höherer Durchschlagsfestigkeit arbeiten.

Zum Schluß weise ich noch ganz besonders darauf hin, daß die „schädlichen Ladungen" bei den Influenzmaschinen (erster Art) [1]) mit festen Erregerfeldern wesentlich kleiner sind als bei den bis jetzt bekannten Influenzmaschinen (zweiter Art) [2]) mit Doppeldrehung, und daß aus diesem Grunde bei den ersteren auch die Abhängigkeit von Scheibenabstand und -dicke, sowie auch die günstigsten Größen dieser Faktoren im allgemeinen durchweg kleiner und weniger scharf abgegrenzt sind als bei dem System mit Doppeldrehung. Diese Tatsache ist ganz besonders zu beachten und sowohl für den Bau wie auch für die Beurteilung beider Systeme von Influenzmaschinen wichtig.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Influenzmaschinen besitzen für jede Entladespannung einen „günstigsten Scheibenabstand", eine „günstigste Scheibendicke" und einen „günstigsten Polarisatorwiderstand", d. h.: sie liefern bei gleichbleibender Antriebskraft die maximale nutzbare Stromleistung (und den besten Wirkungsgrad) bei irgend einer Entladespannung nur bei einem bestimmten Scheibenabstand bez. Scheibendicke bez. Polarisatorwiderstand.

2. Bei den Influenzmaschinen wächst der „günstigste Scheibenabstand", die „günstigste Scheibendicke" sowie bei dem System mit Doppeldrehung im allgemeinen auch der „günstigste Polarisatorwiderstand" mit der Entladespannung im Nutzstromkreise.

3. Bei den Influenzmaschinen wächst bei gleichbleibender Entladespannung und Polarisatorwiderstand der „günstigste Scheibenabstand" mit abnehmender Scheibendicke und die „günstigste Scheibendicke" mit abnehmendem Scheibenabstand.

4. Bei den Influenzmaschinen mit Doppeldrehung wächst bei gleichbleibender Entladespannung der „günstigste Polarisatorwiderstand" mit abnehmender Scheibendicke sowie mit abnehmendem Scheibenabstand und diese mit abnehmendem Polarisatorwiderstand.

---

1) W. Holtz, Pogg. Ann. **126.** p. 157. 1865.
2) W. Holtz, Pogg. Ann. **130.** p. 128 u. 168. 1867.

5. Die günstigsten Größen von Scheibenabstand und Scheibendicke (Resultat 1) sowie die Abhängigkeit dieser Größen untereinander (Resultat 3 und 4) nehmen mit den also benannten „schädlichen Ladungen“ auf den Rückseiten der Scheiben zu. Sie sind im allgemeinen kleiner bez. weniger scharf abgegrenzt

a) bei den Influenzmaschinen (erster Art) mit festen Erregerfeldern gegenüber dem System (zweiter Art) mit Doppeldrehung,

b) wenn die aufeinander arbeitenden Scheiben sich in einem flüssigen oder gasförmigen Medium befinden, das eine höhere Durchschlagsfestigkeit besitzt als atmosphärische Luft (z. B. in einem gasförmigen Medium von höherem Druck).

(Eingegangen 20. März 1907.)

2. *Eine neue Art von Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren*[1]; *von H. Wommelsdorf.*

§ 1.

Bereits Mitte 1902 habe ich gelegentlich der ersten Mitteilung der „Kondensatormaschine“[2]) darauf hingewiesen, daß man die dünnen Metallsektoren der Influenzmaschinen mit gutem Erfolge auch zwischen zwei aufeinander liegende, innig miteinander verbundene, z. B. aufeinander vulkanisierte (vgl. Abhandl. c) p. 792 und f) p. 343) Hartgummischeiben einfügen und so ausschließlich in festes Isolationsmaterial „*einbetten*“ kann.

Die ersten Maschinen mit derartigen Scheiben zeigten sich den bisher bekannten Influenz- bez. Kondensatormaschinen gegenüber, deren Stanniolsektoren auf isolierende Scheiben geklebt sind und sich auf einer Seite in Luft befinden, anscheinend bedeutend unterlegen, so daß ich eine Zeitlang die Versuche mit ihnen ganz aufgab. Erst ca. 2 Jahre später, als ich zu der in Figg. 1—3 dargestellten — durch eine *Zwischenschicht* zwischen benachbarte Sektoren ausgezeichneten — *neuen Scheibenform* gelangte und ferner zum ersten Male die Beobachtung machte, daß die Influenzmaschinen

1) Die Lizenz zum Vertrieb der durch Patente und Gebrauchsmuster in Deutschland sowie in allen Kulturstaaten geschützten Influenzmaschinen bez. deren Scheiben ist in den Händen der Spezialfirma für Influenzmaschinen Alfred Wehrsen, Berlin SO 33; vgl. die Ankündigung im Inseratenteil dieses Heftes.

2) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **9**. p. 651. 1902. Außerdem werden in dieser Arbeit die folgenden Abhandlungen des Verfassers kurz als Abhandl. b, c, d, e, f, g wiederholt zitiert werden: b) Ann. d. Phys. **15**. p. 842. 1904; c) Physik. Zeitschr. **5**. p. 792. 1904; d) Ann. d. Phys. **15**. p. 1019. 1904; e) Physik. Zeitschr. **6**. p. 177. 1905; f) Ann. d. Phys. **16**. p. 334. 1905; g) die dieser Arbeit vorangehende Abhandlung.

ihre maximale Stromleistung nur bei einem ganz bestimmten Scheibenabstand (Abhandl. b) bez. Scheibendicke (Abhandl. g) liefern, nahm ich die Versuche wieder auf:

Nunmehr erkannte ich, daß jene Maschinen bei richtiger Durchbildung sowie mit Scheiben nach Figg. 1—3 in jeder Hinsicht — z. B. durch ihre größere Stromleistung, ihre Unabhängigkeit von Witterungseinflüssen und die übrigen auf p. 623 aufgezählten Vorteile — allen anderen Influenzmaschinen bedeutend überlegen sind.

Bis zur Fertigstellung der ersten in allen Teilen harmonischen „Influenzmaschinen mit eingebetteten Sektoren", wie ich sie kurz benennen will, ist eine Reihe interessanter Untersuchungen von mir angestellt worden; diese werde ich im folgenden (§ 2) zunächst besprechen und erst dann zu der Mitteilung der neuen Scheiben (§ 3) und Maschinentypen (§ 4) übergehen.

§ 2. Vergleichende Untersuchungen an Scheiben nach Holtz-Toepler und solchen mit eingebetteten Sektoren.

Die Resultate der ersten Untersuchungen, die an Hartgummischeiben mit einvulkanisierten Metalllamellen vorgenommen wurden und zu den ersten brauchbaren Influenzmaschinen mit eingebetteten Sektoren geführt haben, sind am Schluß dieser Arbeit zusammengestellt. Sie bilden zugleich eine Ergänzung der ebenfalls am Schluß zusammengefaßten Ergebnisse der dieser Arbeit vorangehenden Abhandlung.

Die bisher üblichen Scheiben mit Sektoren, die auf der einen Seite auf der Scheibenoberfläche befestigt sind und auf der anderen mit Luft in Berührung stehen, wie sie zuerst von Holtz und Toepler[1]) angegeben und von M. Wimshurst[2]) weiter ausgebildet wurden, arbeiten — eine gleichbleibende Sektorenzahl vorausgesetzt — am günstigsten bei einem ganz bestimmten Abstande der Sektoren voneinander.

Der hauptsächlichste und naheliegendste Grund dafür ist der, daß bei einer Vergrößerung der an Zahl gleichbleibenden

1) W. Holtz, Pogg. Ann. **126.** p. 157. 1865 und **130.** p. 128. 1867 und **136.** p. 171. 1869 und Uppenborns Zeitschr. f. angewandte Elektr. 1881. p. 197; M. Toepler, Pogg. Ann. **125.** p. 469. 1865 u. **130.** p. 518. 1867.

2) M. Wimshurst, Engineering **35.** p. 4. 1883.

Sektoren zwar die bei einer Umdrehung erzeugte Elektrizitätsmenge etwas zunimmt, dafür aber die Spannung infolge der dadurch bedingten Verkleinerung des Sektorenabstandes und des Widerstandes gegen Oberflächenentladungen rasch abnimmt.

Als weitere Eigentümlichkeit der bisherigen Scheiben mit luftisolierten Sektoren fand ich die, daß die isolierenden Oberflächen zwischen den Sektoren zugleich wie Polarisatorwiderstände wirken. Je größer die jeweilige Entladespannung der Maschine ist, desto größere Zwischenräume zwischen den Sektoren werden mit geladen, desto größer wird dabei zugleich — wenigstens für die am weitesten von den Sektoren entfernt liegenden Teile der geladenen Oberflächen — der Polarisatorwiderstand; als solchen habe ich bereits früher (in der unter e) zitierten Abhandlung) den Widerstand zwischen zwei unter dem Einflusse eines Polarisators stehenden Scheibenbezirke definiert.

Es wächst hier also der Polarisatorwiderstand bis zu einem gewissen Grade bereits selbsttätig mit der Entladespannung, eine Eigenschaft, die sich naturgemäß bei Scheiben mit eingebetteten Sektoren nicht vorfindet. Der charakteristische Unterschied liegt eben in der Natur des die Sektoren umgebenden Mediums, das bei den Maschinen nach Holtz und Toepler aus einem *gasförmigen* Körper besteht, der die Eigenschaft besitzt, plötzlich von einem fast nicht leitenden in einen gut leitenden Zustand und umgekehrt überzugehen.

Daher kommt es denn auch, daß bei dem System mit Doppeldrehung insbesondere für die höheren Entladespannungen bei der Anwendung von Scheiben mit eingebetteten Sektoren gegenüber solchen mit luftisolierten Sektoren der Polarisatorwiderstand erheblich größer gemacht werden muß, um die größte Stromleistung bez. überhaupt die höchsten Schlagweiten zu erzielen. Da nach Resultat 2 der unter g) zitierten Abhandlung der günstigste Polarisatorwiderstand mit der Entladespannung abnimmt, so verschwindet naturgemäß bei kleinen Spannungen der genannte charakteristische Unterschied. So kam es denn auch, daß ich anfangs bei der ersten Anwendung von Scheiben mit eingebetteten Sektoren und dem System mit Doppeldrehung nur bei sehr kleinen Schlagweiten befriedigende Resultate erhielt, während die Maschinen bei mittleren (d. h. im Verhältnis zum Scheibendurchmesser gerechneten) Schlagweiten nur

sehr spärliche Funken lieferten und gar die höheren Spannungen überhaupt nicht zu erzeugen vermochten.

Da nun — wie ich in der unter g) zitierten Abhandlung eingehend erörtert und in Resultat 2 derselben kurz zusammengestellt habe — auch der günstigste Scheibenabstand und die günstigste Scheibendicke in gleicher Weise wie der günstigste Polarisatorwiderstand mit der Entladespannung zunehmen, und ferner diese drei Größen auch untereinander eine gewisse Abhängigkeit (Resultat 3 und 4 der genannten Abhandlung) zeigen, so kann man weiterhin allgemeiner sagen, daß nicht nur der günstigste Polarisatorwiderstand, sondern auch der günstigste Scheibenabstand und die günstigste Scheibendicke sowie die Abhängigkeit dieser drei Größen voneinander bei Maschinen mit eingebetteten Sektoren wesentlich größer sind als bei Maschinen mit Scheiben nach Toepler-Holtz.

Wie bereits am Anfang des Kapitels kurz angegeben, liefern also die Scheiben nach Toepler-Holtz, bei denen die Sektoren einerseits auf der Scheibenoberfläche befestigt sind und andererseits mit Luft in Berührung stehen, bei einer bestimmten Entladespannung (Schlagweite) die größte Stromstärke — eine gleichbleibende Sektorenzahl vorausgesetzt — nur bei einem bestimmten Abstande und demgemäß einer bestimmten Breite der Sektoren.

Im Gegensatz hierzu fand ich für Scheiben mit allseits von festem Dielektrikum eingeschlossenen Sektoren, daß bei gleichbleibender und genügend großer Zahl von Sektoren auf einer Scheibe (pro Pol) — vorausgesetzt, daß die aufeinanderfolgenden Sektoren durch eine Isolationsschicht von genügend großer Durchschlagsfestigkeit voneinander isoliert sind (vgl. Figg. 1—3) — die bei einer Umdrehung derselben erzeugte Elektrizitätsmenge allgemein mit zunehmender Sektorgröße bez. entsprechend abnehmendem Sektorenabstand steigt.

So kommt es, daß die eingebetteten Sektoren für alle Entladespannungen mehr wie doppelt so groß gemacht werden können als die von Luft berührten. *Aus der hieraus resultierenden mehr wie doppelten Scheibenausnutzung erklärt sich die entsprechende Mehrleistung der Scheiben mit eingebetteten Sektoren.*

Da außerdem bei den Scheiben nach Toepler-Holtz die günstigste Sektorgröße noch je nach der Entladespannung ver-

schieden ist, und zwar mit dem Entladepotential wächst (Resultat 2, p. 624), müßte sich die Sektorbreite zur Erreichung der größten Stromleistung für jede Funkenlänge neu einstellen lassen, eine Forderung, die technisch unausführbar ist.

Im Gegensatz dazu ist bei den neuen Scheiben mit eingebetteten Sektoren (nach Figg. 1—3, p. 614) die günstigste Sektorbreite — eine genügende Zahl von Sektoren pro Pol vorausgesetzt — für alle Funkenlängen der Maschine eine konstante Größe.

§ 3. Praktische Anordnung von Scheiben mit eingebetteten Sektoren.

Nachdem die ersten Schwierigkeiten zur Erlangung befriedigender Wirkungen an Influenzmaschinen mit eingebetteten Sektoren durch die richtige Wahl der Scheiben-Dicken, -Abstände und Polarisatorwiderstände (Kapitel II) überwunden waren, fehlte es noch zur Ausnutzung der am Schluß des vorigen Kapitels und in Resultat 3 erbrachten Erkenntnis an einer praktischen Scheibenanordnung, welche einerseits eine beliebige Vergrößerung der Sektorbreiten auf Kosten ihres gegenseitigen Abstandes gestattet, andererseits in exakter und wohlfeiler Weise die praktische Ausführbarkeit des allseitigen Einbettens bez. Einvulkanisierens der Sektoren in Hartgummi ermöglicht.

Bei den ersten Influenz- und Kondensatormaschinen wurden die Sektoren — wie in der unter c) genannten Abhandlung angegeben — zwischen zwei aufeinander vulkanisierte Einzelscheiben eingeschlossen. Hierbei war jedoch ein sehr großer Abstand der einzelnen Sektoren voneinander einzuhalten, da anderenfalls infolge Übersprühens der hochgespannten Elektrizität in den Trennungsfugen der zwei Einzelscheiben die Isolation zwischen denselben allmählich zerstört und die Scheibe alsdann dauernd unbrauchbar wurde. Die Sektorfläche war infolgedessen ungefähr gerade so klein zu halten, wie bei den im vorigen Kapitel behandelten luftisolierten Sektoranordnungen. Da hier außerdem die Zwischenräume zwischen den Sektoren nicht wie bei diesen an der Elektrizitätslieferung beteiligt sind, kommt es, daß jene Anordnung eine so verhältnismäßig geringe Elektrizitätsmenge lieferte. Dieser-

halb wie auch wegen der kurzen Lebensdauer war den bisher bekannten Scheiben mit luftisolierten Sektoren vor dieser Art von Scheiben entschieden der Vorzug zu geben.

Andererseits ist ein Umgießen oder Umpressen der Sektoren mit Isolationsmaterial unter Vermeidung jeglicher Fugen zwischen den Sektoren, falls ein solches überhaupt mit den bisher bekannten Materialien möglich wäre, nur sehr schwer und kostspielig auszuführen. Bei dem wichtigsten, alle anderen zurzeit übertreffenden Material, dem Hartgummi, ist man geradezu auf die Anwendung von gewalzten Platten als Ausgangsprodukt angewiesen, da nur dieses eine genügend hohe Durchschlagsfestigkeit und die anderen für Influenzmaschinen wertvollen Eigenschaften besitzt.

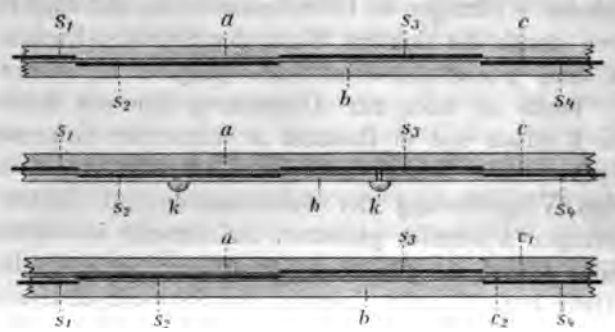


Fig. 1—3.

Dieses vorausgeschickt, komme ich nunmehr zur Beschreibung der *in Figg. 1—3 abgebildeten, durch eine Zwischenschicht* (*c*) *ausgezeichneten Scheibenanordnung, die infolge ihrer wohlfeilen und exakten Herstellbarkeit und Widerstandsfähigkeit nunmehr die praktische Anwendung der Scheiben mit eingebetteten Sektoren ermöglicht und zu vorzüglichen alle bisher bekannten Arten übertreffenden Influenzmaschinen geführt hat.*

Die Figg. 1—3 stellen je einen Schnitt in tangentialer Richtung durch die Mitten der Sektoren einer Scheibe dar. Von diesen besteht die erste und zweite aus je drei Schichten *a, b* und *c*; die Sektoren sind zwischen den Schichten *a* und *b* und abwechselnd auf beiden Seiten der „*Zwischenschicht*“ *c* angebracht. Da die „Schicht“ *c* überall zwischen aufeinanderfolgenden Sektoren s^1 und s^2, s^2 und s^3 etc. liegt, können

diese in Rücksicht auf die Isolation unbedenklich so weit vergrößert werden, daß ihr Abstand in der Scheibenebene gleich oder nahezu gleich Null wird.

Sollte man hierbei im besonderen bei der Anwendung sehr schmaler Sektoren und hoher Spannungen die Isolation noch nicht für ausreichend halten, so braucht man nur statt einer *zwei Zwischenschichten* c^1 *und* c^2 zwischen den Seitenplatten *a* und *b* einzufügen (Fig. 3) und die aufeinanderfolgenden Sektoren so zu verteilen, daß zwischen denselben Schichten auf jeden Sektor jedesmal erst der dritte innerhalb der ganzen Scheibe befindliche Sektor folgt.

Das hierbei die Scheibendicke zwischen den Sektoren und der Außenseite zwischen drei bez. in der Ausführung nach Figg. 1 und 2 zwischen zwei Werten wechselt, ist nicht etwa als ein Nachteil, sondern als ein weiterer Vorteil dieser Scheibenart anzusprechen. Nach Resultat 2 der Abhandlung g) ist die „günstigste Scheibendicke", d. h. die, bei welcher von der Maschine die größte Stromleistung (Funkenzahl) geliefert wird, je nach der Entladespannung (Funkenlänge) verschieden; und zwar wächst sie mit der Entladespannung. Wird nun beispielsweise in Figg. 1—3 die Dicke der Scheibe *a* mit Rücksicht auf die kleineren Spannungen gewählt, dagegen die Gesamtdicke der Scheiben *a* und *c* durch entsprechende Wahl der Dicke von *c* für die höchsten von der Maschine erreichbaren bez. für die gewünschten Schlagweiten, so erhält man in höherem Maße als sonst eine für alle Spannungen übereinstimmende Stromstärke.

Bei einer Kondensatormaschine werden die beiden Seitenplatten *a* und *b* mit Rücksicht auf die doppelseitige Influenzwirkung gleich stark gemacht (Figg. 1 und 3); bei zweiplattigen Influenzmaschinen genügt es, wenn die eine nichtinfluenzierte Schicht *b* nur so dick gemacht wird als zur Einbettung der Sektoren in technischer Hinsicht zweckmäßig erscheint (Fig. 2). In diesem Falle wird die Ladung und Entladung durch gut abgerundete Metallknöpfe „*k*" vermittelt, die mit den Sektoren in leitender Verbindung stehen; bei Kondensatormaschinen wird die Ableitung in der in Abhandlung a), c) und f) angegebenen Weise ermöglicht.

Als bei weitem bestes Material für die Herstellung von

Scheiben mit eingebetteten Sektoren hat sich „Hartgummi" erwiesen, das zweckmäßig zum Schutze gegen Oxydation noch mit einer dünnen Schicht von celluloidartiger oder anderer Zusammensetzung von gleicher Wirkung (D. R. P. a) überzogen wird. In allen Fällen, wo es sich um Kondensatormaschinen und andere Influenzmaschinen handelt, die in einem geschlossenen Raum (Glaskasten und dergleichen) arbeiten sollen, oder die nur schwer zum Zwecke des zeitweiligen Abreibens der Oxydschicht auf den Scheiben zu demontieren sind, ist man unbedingt auf die Anwendung der genannten Schutzschicht gegen Oxydation angewiesen.

Die Fabrikation der Scheiben geschieht am besten in der Weise, daß die Schichten *a*, *b* und *c* (Figg. 1—3) zunächst aus noch nicht vulkanisiertem Gummi hergestellt, mit Sektoren versehen, zu einem Ganzen zusammengepreßt und erst hiernach vulkanisiert werden. Die so erhaltene Hartgummischeibe macht äußerlich ganz den Eindruck einer aus einem Stück rings um die Sektoren gegossenen Platte, übertrifft aber eine solche, falls deren Herstellung sich überhaupt ermöglichen ließe, durch das *Bestehen der absoluten Sicherheit, daß alle benachbarten Sektoren durch eine genügend starke Isolationsschicht* (entsprechend gewählte Dicke der Zwischenschicht *c*) *getrennt sind.*

Bei Influenzmaschinen mit fester Erregung wird man gut tun, in analoger Weise auch das Feld allseitig in festes Dielektrikum einzuschließen. Da sich für diesen Zweck gewöhnliches Hartgummi wegen seiner geringen Dielektrizitätskonstante nicht eignet und auch das sonst für feste Scheiben ausschließlich verwandte Glas wegen seiner Zerbrechlichkeit und Neigung, sich mit Feuchtigkeit zu beschlagen, zu verwerfen ist, wurde als wirksames Dielektrikum für das Erregerbeleg *„Celluloid" gewählt, daß damit zum ersten Male in die Technik der Influenzmaschinen eingeführt wird.* Ein Erregerbeleg bez. eine Erregerscheibe aus einer geeigneten Celluloidsorte induziert in ein und derselben Influenzmaschine eine wesentlich größere Nutzstromstärke (Funkenzahl) als ein solches aus Hartgummi.

Da das Celluloid in der Form von dünnen Scheiben sehr zum Verziehen neigt, wird es zweckmäßig in Verbindung mit

Hartgummi verwandt, wobei der Hartgummi lediglich zur Versteifung bez. zum Tragen, dagegen das Celluloid nur oder wenigstens der Hauptsache nach lediglich als Dielektrikum zur Influenzierung benutzt wird.

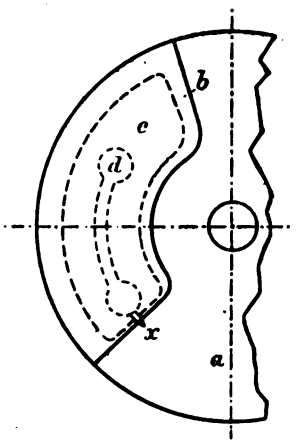


Fig. 4.

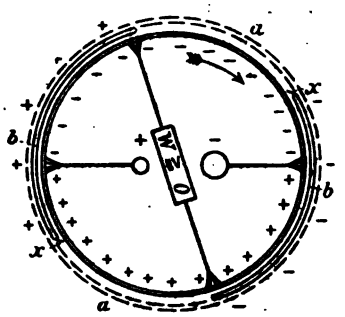


Fig. 5.

Diese Art der Kombination von Hartgummi und Celluloid bez. einem anderen Isolationsmaterial von hoher Dielektrizitätskonstante (z. B. Glimmer) ist bei der in Fig. 4 abgebildeten Erregerscheibe angewandt worden; sie besteht aus der rund- oder sechseckiggeschnittenen Hartgummiplatte *a*, dem aus Celluloid, Glimmer oder dergleichen bestehenden Dielektrikum *b*, sowie dem dazwischen angebrachten, aus einem Halbleiter (geeignete Papiersorte) bestehenden Beleg *c* und dem Stanniolbeleg *d* (vgl. hierzu Abhandlung e) § 4 p. 185: „Rückstandbildende Erregerfelder"). Eine solche Erregerscheibe ist auch in der photographischen Widergabe „Figg. 6 [und 7]" zu erkennen.

Die Erregung einer solchen Scheibe bez. ihrer Felder geschieht entweder wie in Fig. 1 der dieser Arbeit voraufgehenden Abhandlung durch Bürsten, die auf den Kollektorkugeln der rotierenden Scheibe schleifen und an Bügeln befestigt, mit dem Stanniolbeleg *d* der Fig. 4 leitend verbunden sind, oder — wie Figg. 4 und 5 zeigen — durch eine Metallspitze bez. einen Metallkamm, der ebenfalls mit dem Metall-

beleg *d* eventuell unter Einschaltung eines Widerstandes leitend verbunden ist und bei *x* ein Stück unter dem Dielektrikum *b* hervorragt.

Die Selbsterregung der Influenzmaschinen mit eingebetteten Sektoren ist derartig groß, daß dazu unter normalen Verhältnissen die genannte Metallspitze bereits vollständig ausreicht. Am schnellsten tritt die Erregung ein, wenn der Polarisatorwiderstand Null ist, also der Polarisator vorübergehend mit den Kollektorkugeln der rotierenden Scheibe in volle Berührung gebracht wird.

Um für außergewöhnlich ungünstige Verhältnisse (z. B. mit Wasserdampf erfüllte Räume) die Selbsterregung noch weiter zu steigern, kann an den Konduktoren der Maschine je ein Schalter angebracht werden, der vorübergehend eine direkte Verbindung der offenen Konduktoren mit den Metallbelegen *d* der Erregerscheiben herzustellen gestattet.

§ 4. Gesamtanordnungen der neuen Influenzmaschinen.[1])

Nach der Mitteilung der neuen, in Figg. 1—3 abgebildeten Scheiben wird es interessieren, einige Gesamtanordnungen der mit ihnen ausgerüsteten Maschinen *an Hand photographischer Wiedergaben*, wie solche in den Figg. 6—8 erbracht sind, kennen zu lernen.

Da ist zunächst eine Influenzmaschine ***mit festem Feld*** in den Figg. 6 und 7, ferner eine solche mit *Doppeldrehung* in Fig. 8 enthalten. In erster Linie fallen an der Außenseite der rotierenden Scheiben an Stelle der sonst dort befindlichen Sektoren kleine gut abgerundete *Metallknöpfe* auf, die mit den eingebetteten Sektoren in leitender Verbindung stehen und die Ladung und Entladung dieser vermitteln. Zu diesem Zwecke werden sie von Metallbürsten bestrichen, die teils zu den Elektroden, teils zu den Polarisatoren gehören. Insbesondere die letzteren sind so eingerichtet, daß sich durch Abrücken von den Scheiben (bez. ihrer Bürsten von den Metallknöpfen) in einfachster Weise ein geeigneter Luftwiderstand in den Polarisatorkreis schalten läßt.

---

1) Vgl. p. 609, Fußnote 1 dieser Arbeit.

Der Antrieb der Scheiben erfolgt entweder wie bisher unter Vermittelung einer Riemenübertragung durch Hand- bez. Motorbetrieb (Fig. 8) oder in besonders wirkungsvoller Weise wie in Figg. 6 und 7 durch einen Elektromotor, auf dessen Welle die rotierenden Scheiben direkt befestigt sind. Mit einer solchen Anordnung, die sozusagen einen *„rotierenden Umformer"* von Gleich- oder Wechselstrom niederer Spannung

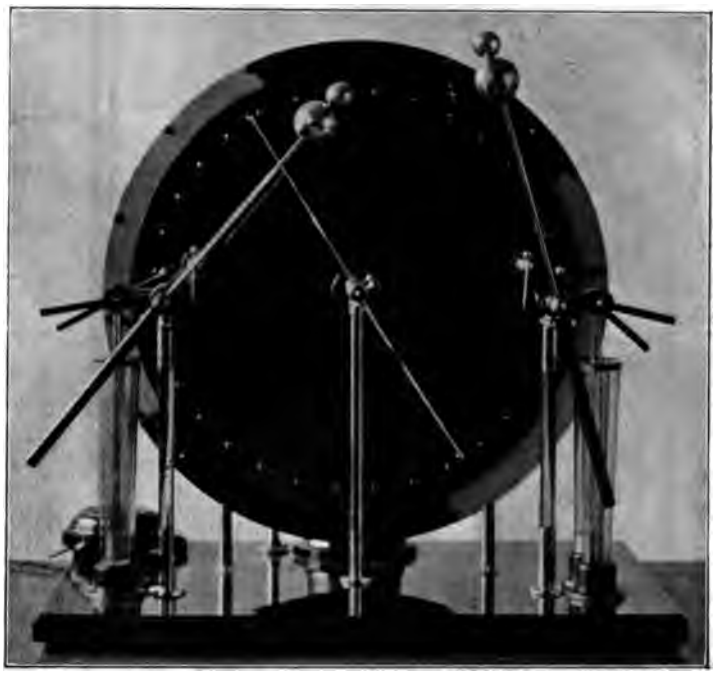


Fig. 6.

in Gleichstrom von $\geqq$ 100000 Volt darstellt, werden *unerwartet hohe Leistungen und Wirkungsgrade* erreicht.

Auf Wunsch werden die Maschinen mit einer neuen Flaschenanordnung versehen, die von Hrn. A. Wehrsen herrührt und darin besteht, daß — wie Figg. 6 und 7 zeigen — statt der sonst üblichen zwei Leidener Flaschen, deren vier von zweierlei Kapazität angebracht sind, von denen jede für sich mittels besonderer Schalter mit den Elektroden verbunden

werden kann. Man ist hierdurch in der Lage, die Kapazität und damit die Natur der Entladungen in vier Abstufungen rasch variieren zu können.

Fig. 7.

Jede der abgebildeten Maschinen besitzt die im folgenden Kapitel kurz zusammengestellten Vorteile den bisher bekannten Maschinen gegenüber; sie liefern im besonderen — gleiche Scheibengröße und gleiches System, d. h. einfache oder Doppel-

drehung vorausgesetzt — die in § 5 unter 1 genannte Mehrleistung; eine der neuen Maschinen von zwei Scheiben leistet mithin ungefähr dasselbe wie eine der bisherigen von vier bez. acht Scheiben gleichen Durchmessers.

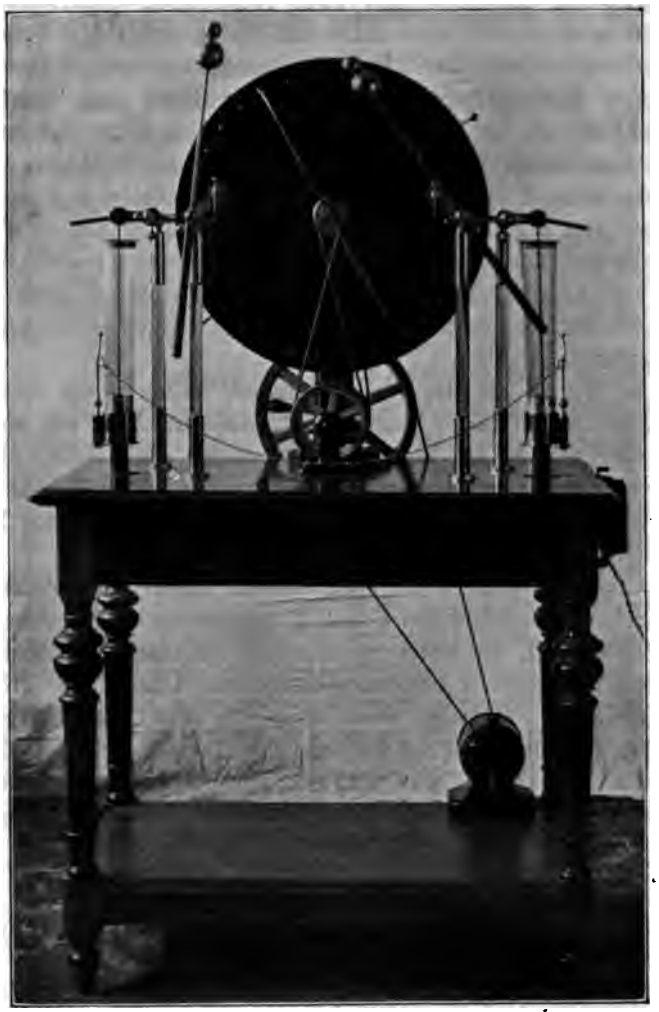


Fig. 8.

Wegen ihrer größeren Stromleistung allgemein zu empfehlen sowohl für Physikalische Institute, Schulen als auch den Ärzten

für die praktische Anwendung in der Elektrotherapie und Röntgentechnik ist *die in Figg. 6 und 7 in Vorder- und Seitenansicht abgebildete Maschine mit festem Feld von 55 cm Durchmesser der rotierenden Scheibe.* Noch großartiger ist die Leistung der gleichen Maschine mit zwei rotierenden Scheiben, von denen je eine auf jeder Seite der festen Scheibe angeordnet ist; diese sogenannte „Doppelinfluenzmaschine" liefert die doppelte Stromleistung, ohne daß ihr Preis im Verhältnis größer ist als der einer zweiplattigen Maschine; sie genügt bereits größeren Ansprüchen der praktischen Röntgentechnik.

In allen Fällen werden die mit der Scheibe gekuppelten Motore von der in Fußnote 1 p. 609 bereits genannten Firma für alle gebräuchlichen Stromarten und Spannungen von 8 bis 220 Volt geliefert; natürlich werden die Maschinen auch nach Wunsch für Handbetrieb allein bez. mit beiden Antriebsarten ausgerüstet.

In Fig. 8 ist der Vollständigkeit halber noch eine für therapeutische Zwecke bestimmte *„Influenzmaschine mit Doppeldrehung"* von 55 cm Scheibendurchmesser dargestellt, die zu diesem Zwecke mit besonders geeigneten Konduktoren und Elektroden ausgerüstet und fest auf einen eleganten Tisch montiert ist.

Über die demnächst ebenfalls im Handel erscheinenden, mit Scheiben nach Figg. 1 und 3 ausgerüsteten Kondensatormaschinen (vgl. die unter a), c) und f) genannte Abhandlung) werde ich seinerzeit besonders berichten. Überall, wo größere Stromleistung verlangt wird, z. B. in der Röntgentechnik, Funkentelegraphie, für chemische Zwecke u. dergl. (als Ersatz größerer Induktoren) wird man sich einer Kondensatormaschine von drei oder mehr rotierenden Scheiben zu bedienen haben.

§ 5. Vorteile der neuen Influenzmaschinen.[1])

Bei einem Vergleich der besten bisherigen Influenzmaschinen mit Sektoranordnungen nach Holz-Toepler (Wimshurst) mit gleichgroßen und gleichartigen Influenzmaschinen

1) Vgl. Fußnote 1, p. 609. Von der dort genannten ausführenden Firma können die neuen Scheiben auch getrennt zur Auswechselung in alten Maschinen bezogen werden.

mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren *in der Ausführung der Scheiben nach Figg. 1—3 ergeben sich für diese folgende Vorteile:*

1. *Ca. doppelte Stromleistung bei gleicher Spannung* und gleichem Raumbedarf bez. dem gleichen Scheibendurchmesser. (*Beachte die weitere erhebliche Erhöhung der Stromleistung* bei Maschinen mit fester Hartgummischeibe durch die Anbringung eines Celluloid-Dielektrikums etc.; p. 616!)

2. Weit größere *Unabhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit*, da die Sektoren nicht durch Luft, sondern durch festes Isolationsmaterial gegeneinander und gegen Erde isoliert sind.

3. Daher *schnellere und sichere Selbsterregung* selbst in feuchten Räumen; die bisherigen Maschinen versagen dagegen bereits in stark mit Menschen angefüllten Räumen, z. B. in Hörsälen, Klassenzimmern u. dergl.

4. *Größere Haltbarkeit bez. Widerstandsfähigkeit der Scheiben*

a) *gegen mechanische Einwirkungen*, da die empfindlichen Teile (Sektoren) unzugänglich und fest in das Innere der Scheiben verlegt sind;

b) *gegen elektrische Einwirkungen* aus dem gleichen Grunde: Bei den bisherigen Maschinen überziehen sich die Scheiben zwischen den Sektoren nach kurzer Betriebszeit infolge der hier auftretenden fortgesetzten Aus- und Einströmungen der hochgespannten Elektrizität (vgl. § 2, p. 611) mit einer leitenden Oxydschicht, welche die Gesamtleistung der Maschine immer mehr bis zum gänzlichen Versagen verschlechtert. Hierdurch wird bei den bisherigen Maschinen ein häufiges, periodisch wiederkehrendes Reinigen der Scheiben (d. h. kräftiges Abreiben der Oxydschicht z. B. mit Spiritus und Wienerkalk) notwendig.

5. Weniger häufige (vgl. 4 b) und dabei *leichter und sicher ausführbare* (vgl. 4 a) *Reinigung der Scheiben*; bei den bisherigen Maschinen sind Beschädigungen (Abreißen) der Sektoren nicht zu vermeiden.

6. *Die Anschaffungskosten der neuen Maschinen sind geringer* als die der bisherigen von gleicher Leistung (z. B. einer zweiplattigen neuen gegenüber einer vierplattigen Maschine nach Holtz-Toepler [Wimshurst] von gleichem Scheibendurchmesser).

§ 6. Zusammenfassung.

a) Unter Bezugnahme auf verschiedene Vorveröffentlichungen des Verfassers wird eine neue Art von Influenzmaschinen mitgeteilt, die durch Scheiben mit allseits in festes Isolationsmaterial *eingebetteten* (im besonderen in Hartgummi einvulkanisierten) Sektoren ausgezeichnet ist; zugleich wird eine Ausführungsform einer derartigen Scheibe angegeben, bei der eine plötzliche oder allmähliche Zerstörung der Isolation zwischen benachbarten Sektoren durch elektrische Übergänge — infolge der *Einführung einer je zwei benachbarte Sektoren trennenden „Zwischenschicht"* (*c*, Figg. 1—3) — verhindert ist, und die gegenüber allen bisher bekannten Scheiben von gleicher Größe mit luftisolierten Sektoren, z. B. solchen nach Holtz-Toepler (Wimshurst) ca. die doppelte Stromleistung sowie andere in § 5 aufgezählte Vorzüge aufweist.

b) Es wird über die *Einführung von Celluloid* als Dielektrikum in die Technik der Influenzmaschinen, Kondensatoren u. dergl., sowie über die dadurch erzielte weitere erhebliche Erhöhung der Stromleistung berichtet (§ 3, p. 616).

c) Es werden verschiedene Gesamtanordnungen der neuen Influenzmaschinen an Hand photographischer Wiedergaben (Figg. 6—8) besprochen.

d) Es wird über *vergleichende Untersuchungen* der neuen Scheiben mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren mit solchen nach Holtz-Toepler (Wimshurst) mit luftisolierten Sektoren berichtet. Hervorzuheben sind folgende

Resultate der Untersuchungen.

1. Die Scheiben nach Holtz-Toepler (Wimshurst) bez. solche Scheiben, deren Sektoren sich in Luft oder einem gasförmigen Medium befinden, liefern die größte nutzbare Stromleistung für irgend ein Entladepotential — eine gleichbleibende Sektorenzahl auf den Scheiben vorausgesetzt — nur bei einem bestimmten, in tangentialer Richtung gemessenen Sektorenabstand bez. Sektorgröße.

2. Bei den unter 1. genannten Scheiben ist die „günstigste Sektorgröße", d. i. die, bei welcher die größte Stromleistung geliefert wird, je nach der jeweiligen Entladespannung (Funken-

länge der Influenzmaschine) verschieden, sie wächst mit abnehmender Entladespannung im äußeren Stromkreise.

3. Im Gegensatz zu Resultat 1 wächst bei den neuen Scheiben mit allseits in festes Isolationsmaterial eingeschlossenen Sektoren — vorausgesetzt, daß die aufeinanderfolgenden Sektoren durch eine Isolationsschicht (Zwischenschicht *c*, Figg. 1 bis 3) von genügend großer Durchschlagsfestigkeit voneinander isoliert sind — bei gleichbleibender und genügend großer Sektorenzahl die nutzbare Stromleistung mit abnehmendem Sektorenabstand bez. entsprechend zunehmender Sektorgröße, und zwar im Gegensatz zu Resultat 2 für alle Entladespannungen (Funkenlängen der Influenzmaschine).

4. Bei den neuen Influenzmaschinen mit den in Resultat 3 angegebenen Scheiben ist der „günstigste Scheibenabstand“ [1]), die „günstigste Scheibendicke“ [1]) und der „günstigste Polarisatorwiderstand“ [1]) größer als bei den Influenzmaschinen mit den in Resultat 1 genannten Scheiben. Bei diesen übernehmen die zwischen den Sektoren befindlichen Berührungsflächen des festen und gasförmigen Mediums teilweise die Wirkung der Polarisatorwiderstände, deren Vergrößerung ihrerseits wiederum unter Umständen eine Vergrößerung der Scheibenabstände und Scheibendicken ihrer Wirkung nach bis zu einem gewissen Grade ersetzt. [2])

5. Die neuen Influenzmaschinen mit Scheiben nach Figg. 1—3 liefern im äußeren Stromkreise eine höhere nutzbare Stromleistung als die Influenzmaschinen, deren Sektoren sich ganz oder teilweise in einem gasförmigen Medium befinden, z. B. nach Holtz-Toepler (Wimshurst). Die Mehrleistung der neuen gegenüber diesen Maschinenarten ist um so größer, je kleiner die jeweilige Entladespannung (Funkenlänge) der Influenzmaschine ist.

1) Vgl. Resultat 1 der dieser Arbeit vorausgehenden Abhandlung.
2) Vgl. Resultat 4 der dieser Arbeit vorausgehenden Abhandlung.

(Eingegangen 20. März 1907.)

3. *Über optisch homogene und trübe Medien; von L. Mandelstam.*

Erster Teil.

Den verschiedenen Theorien der Dispersion (Drude[1]), Voigt[2]), Lorentz[3]), Planck[4])) und der Theorie der trüben Medien von Lord Rayleigh[5]) liegt folgender physikalischer Ansatz zugrunde:

In das Vakuum, welches durch die Lichtgeschwindigkeit b charakterisiert ist, sind Teilchen eingebettet, deren lineare Dimensionen klein gegen die Wellenlänge sind. Die Abstände zwischen zwei benachbarten Teilchen werden groß gegen ihre Lineardimensionen angenommen. Ist nun in einem solchen Medium ein äußeres elektromagnetisches Feld vorhanden mit den elektrischen bez. magnetischen Feldintensitäten E_0 bez. H_0, so äußert sich die Anwesenheit der Teilchen dadurch, daß jedes Teilchen nach Maßgabe seiner Schwingung eine Welle in das umgebende Vakuum entsendet.[6])

Es läßt sich zeigen, daß dann die elektrischen bez. magnetischen Feldintensitäten E, H gegeben sind durch

$$(1) \qquad \begin{cases} E = E_0 + \sum\left(\operatorname{grad}\operatorname{div} Z - \dfrac{\partial^2 Z}{\partial l^2}\right), \\ H = H_0 + \sum \operatorname{curl} \dfrac{\partial Z}{\partial l}. \end{cases}$$

Z ist die „Hertzsche Funktion“ $Z = \dfrac{p(l-r)}{r}$, wo p das elektrische Moment des Teilchens bezeichnet; l ist für bt gesetzt.[7])

1) P. Drude, Wied. Ann. **48.** p. 536. 1893.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **67.** p. 345. 1890.
3) H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique ... Leide 1892.
4) M. Planck, Sitzungsber. d. preuß. Akad. **24.** p. 470. 1902; **24.** p. 480. 1903; **22.** p. 740. 1904.
5) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **47.** p. 377. 1899.
6) M. Planck, l. c. p. 476.
7) M. Abraham, Theorie d. Elektrizität **2.** p. 56 u. 62. 1905.

Die Gleichungen (1) sind die Lösung von den allgemeinen Lorentzschen Gleichungen für den betrachteten Fall. Ist $p = A \cos n t$, so ergeben die letzten Glieder der rechten Seiten unter dem Summenzeichen der Gleichung (1) die Feldintensitäten, welche von Hertz für einen schwingenden Dipol gefunden sind.

Zunächst sei folgendes bemerkt: Handelt es sich um die Bestimmung des Brechungsexponenten, so können wir in zweierlei Weise verfahren:

1. Wir denken uns eine Schicht von dem Medium, welche durch zwei parallele Ebenen in einem kleinen Abstand voneinander begrenzt ist. In einem Punkt außerhalb dieser Schicht (in einer genügend großen Entfernung) bestimmen wir aus den Gleichungen (1) die Feldintensität E. Aus der Phasenverschiebung dieser Feldintensität gegen die Feldintensität der primären Welle und der Schichtdicke läßt sich der Brechungsexponent berechnen. Diesen Weg hat Lord Rayleigh bei seiner Behandlung der trüben Medien eingeschlagen.[1])

2. Wir stellen Differentialgleichungen auf für die Feldintensitäten im Inneren des Mediums und bestimmen dann den Brechungsexponenten in bekannter Weise. In beiden Fällen müssen wir eine Verknüpfungsgleichung zwischen der elektrischen Feldintensität und dem Moment eines Teilchens haben.

Sämtliche im Anfang erwähnten Dispersionstheorien gehen von Differentialgleichungen aus. Die Theorien von Drude und Voigt einerseits und Planck und Lorentz andererseits unterscheiden sich in der Form der Verknüpfungsgleichung. Betrachten wir aber ein Medium, welches nur wenig durch die Teilchen modifiziert ist, so fällt dieser Unterschied fort. Die „erregende elektrische" Kraft ist dann gleich der elektrischen Feldintensität.

Die Resultate der einzelnen Theorien unterscheiden sich dann in den verschiedenen Annahmen über die Ursache der Extinktion. Drude und Lorentz nehmen eine Umwandlung der elektromagnetischen Energie in nichtelektromagnetische

1) Lord Rayleigh, l. c. p. 877.

an, und vernachlässigen die Dämpfung der Teilchen durch Ausstrahlung. Planck führt gerade dagegen die Extinktion auf die Dämpfung durch Ausstrahlung zurück.

Schließlich unterscheiden sich noch die Resultate durch die Parameter, welche die Teilchen charakterisieren. Planck, Drude und Lorentz schreiben den Teilchen eine Eigenperiode und Dämpfung zu. Lord Rayleigh charakterisiert die Teilchen durch ihre Form und Dielektrizitätskonstante. Bei der ersten Behandlungsweise ist folgendes zu bedenken: Im allgemeinen kann man die ein Teilchen erregende Kraft nicht bestimmen, ohne die Anwesenheit anderer Teilchen in Betracht zu ziehen. Es tritt hier Analoges ein, wie bei der Einführung der freien Elektrizität in der Elektrostatik.

Denkt man sich nämlich in ein Medium, in welchem ein elektrostatisches Feld besteht, Körper eingebracht mit einer vom Medium verschiedenen Dielektrizitätskonstante, so läßt sich das modifizierte Feld mittels des Coulombschen Gesetzes berechnen, falls man die Verteilung der freien Elektrizität kennt. Diese Verteilung hängt aber selbst von dem Zusatzfelde ab.

In dem hier vorliegenden Fall kann man aber folgendes behaupten. Ist das Vakuum nur sehr wenig durch die Teilchen modifiziert, so ist die erregende Kraft gleich der Feldintensität der primären Welle. Wir vernachlässigen mit anderen Worten die Wirkung, welche auf ein Teilchen die in seiner Umgebung liegenden Teilchen ausüben. Wir beschränken uns also auf den Fall, daß der Brechungsexponent des Mediums sich nur wenig von 1 unterscheidet. Außerdem soll die durch die Anwesenheit der Teilchen bedingte Extinktion klein sein.

In der Verknüpfungsgleichung zwischen der erregenden Kraft, welche jetzt E_0 ist, und dem elektrischen Moment p des Teilchens

$$p = \alpha E_0 \tag{2}$$

können wir dann, falls es sich um die Berechnung des Brechungsexponenten handelt, den imaginären Teil von $\alpha = 0$ setzen. (Dabei ist vorausgesetzt, daß wir uns nicht in der Nähe der Eigenschwingung befinden.) Ich will die eben be-

sprochene Behandlungsweise, also die direkte Anwendung der Gleichungen (1) und (2), unter den erwähnten Beschränkungen annehmen und zwar aus folgenden Gründen: 1. Scheint sie mir geeignet zu sein, einige physikalische Seiten der Dispersionstheorie der optisch homogenen Körper anschaulicher hervortreten zu lassen, und 2. weil die Behandlung mittels Differentialgleichungen von vornherein voraussetzt, daß das Medium optisch homogen ist, oder daß die Teile dieses Mediums, deren lineare Dimensionen sehr klein gegen die Wellenlänge sind, sich nicht voneinander unterscheiden. Es scheint mir, daß die trüben Medien sich prinzipiell dadurch auszeichnen, daß sie optisch *nicht* homogen sind. Um dieses zu zeigen, scheint mir die angenommene Behandlungsweise, welche durch die Bedingung der optischen Homogenität nicht gebunden ist, geeignet zu sein. Von der zuletzt besprochenen Anschauung ausgehend, hat Sagnac das Zustandekommen der Reflexion und Refraktion qualitativ diskutiert.[1]) Bei der Klasse von Körpern, welche Sagnac in Betracht zieht (Glas, Flüssigkeiten), eignet sich übrigens für die quantitative Untersuchung die Behandlung mittels Differentialgleichungen besser, wie schon oben bemerkt worden ist. Bei diesen Körpern ist nämlich der Brechungsexponent stark von 1 verschieden.

Wir wollen zunächst den Brechungsexponenten des Mediums bestimmen. Wie schon im Anfang erwähnt, ist dieses von Lord Rayleigh für ein Medium, in welchem Partikelchen von einer anderen Dielektrizitätskonstante als die Umgebung eingebettet sind, geschehen. Wir haben nur seine Resultate zu verallgemeinern. Wenn an dem Ort, wo sich ein Teilchen befindet, eine primäre Feldintensität $E_0 = A \cos n t$ herrscht, so ist nach Rayleigh[2]) die Feldintensität in einem Punkte P, welche durch die vom Teilchen gebeugte Strahlung bedingt ist, gleich

$$A \frac{D' - D}{D} \frac{\pi T}{r \lambda^2} \sin\theta \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - r). \tag{3}$$

Dabei bedeuten: D' bez. D die Dielektrizitätskonstante des Teilchens bez. des ursprünglichen Mediums, r die Entfernung

1) G. Sagnac, H. A. Lorentz-Jubelband p. 377. 1900.
2) Lord Rayleigh, l. c.

zwischen P und dem Teilchen, θ den Winkel zwischen E_0 und r und T das Volumen des Teilchens.

Andererseits ist gemäß unserer Gleichung (2)

$$p = \alpha A \cos n t.$$

Nach Hertz ist die Feldintensität in einem Punkte, welche von einem periodischen Moment $\alpha A \cos n t$ herrührt, gleich

$$A \alpha \frac{4\pi^2}{r \lambda^2} \sin\theta \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - r) \quad \left(n = \frac{2\pi b}{\lambda}\right).$$

Wir können also die von Rayleigh entwickelten Formeln verallgemeinern, indem wir

$$\frac{(D' - D)}{D} T = 4\pi\alpha$$

setzen.

Betrachten wir nun eine Schicht von Teilchen zwischen zwei Ebenen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle stehen und einen Abstand dx haben.

Es ergibt sich dann, daß diese Schicht eine ebene Welle in der Richtung der primären Welle und in der entgegengesetzten Richtung aussendet. Die Feldintensität E' in einer Entfernung x von dieser Schicht ist gleich[1])

$$E' = A N dx \frac{4\pi^2 \alpha}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(b t - x). \tag{4}$$

Diese superponiert sich dem daselbst direkt erregten Felde

$$A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - x).$$

N ist die Zahl der Teilchen in der Volumeinheit. Der Brechungsexponent μ des durch die Teilchen modifizierten Mediums berechnet sich dann, wenn der Brechungsexponent des ursprünglichen Mediums gleich 1 gesetzt wird, zu

$$\mu - 1 = 2\pi N \alpha. \tag{5}$$

Um dieses Resultat mit dem von Drude zu vergleichen, hat man α aus seiner Gleichung (13) (Lehrbuch der Optik p. 355) zu bestimmen und in unsere Gleichung (5) einzusetzen. Man bekommt dann tatsächlich denselben Wert für μ, wie ihn Drude aus den Feldgleichungen erhalten hat (vgl. Gl. (8), p. 357). Will man über die Extinktion Rechenschaft haben,

1) Lord Rayleigh, l. c.

ß der imaginäre Teil von α berücksichtigt werden. Führt
ann anstatt

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(bt-r) \qquad e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(bt-r)}$$

› kommt man ebenfalls zu der Formel (5), wo α kom-
ıt. Nur bedeutet dann μ den „komplexen" Brechungs-
mten $\mu = \nu(1 - i\varkappa)$, wo ν den Brechungsexponenten und
Absorptionsindex bezeichnet. Also

$$\nu(1 - i\varkappa) = 1 + 2\pi N\alpha.$$

Bezeichnung stimmt ebenfalls mit der Drudeschen
ı. Die Formeln von Planck und Lorentz sind in
ier behandelten Fall, abgesehen von der physikalischen
g der Konstanten, dieselben wie bei Drude.
e Ableitung der Gleichung (5) beruht auf der Glei-
4). Der letzteren liegt dieselbe Überlegung zugrunde,
bei den Fresnelschen Zonen gemacht wird. Man be-
also das Resultat, daß eine Schicht von Teilchen von
angenommenen Beschaffenheit Licht nur in der Rich-
primären Strahles und in der entgegengesetzten Rich-
t aber seitlich aussendet. Die Voraussetzung, welche
ndung der Fresnelschen Überlegung auf unseren
tet, ist die, daß die Teilchen so dicht liegen, daß
n als optisch homogen angesehen werden kann.
dieser Annahme läßt sich ja eine Integration über
von der Größenordnung einer Wellenlänge aus-
e der Fresnelschen Behandlung des Huygens-
s zugrunde liegt. Es ergibt sich also, daß ein
lchem Teilchen eingebettet sind, deren lineare
in gegen die Wellenlänge sind, und welches
der Bedingung der optischen Homogenität
sein kann.
andersetzungen beziehen sich zunächst auf
Teilchen ruhen.
t an, daß die Teilchen sich regellos be-
denen Geschwindigkeiten, etwa wie die
s. Die in Betracht kommenden Ge-
sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit
optisch homogen, so können wir immer
welche in ihren linearen Dimen-

sionen klein gegen die Wellenlänge sind und trotzdem eine konstante Zahl von Teilchen enthalten. Betrachten wir die Strahlung der Teilchen, die in diesem Raumteil liegen, so besitzt die in einem Punkte P von *diesen* Teilchen erzeugte Feldintensität dieselbe Phase wie im Fall der Ruhe. Die Amplitude ist allerdings verändert und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Verknüpfungsgleichung ist nicht mehr Gleichung (2), sondern es kommt noch zu der elektrischen Kraft eine neue hinzu, die Kraft nämlich, welche von der magnetischen Feldintensität der primären Welle auf das in fortschreitender Bewegung befindliche Elektron wirkt. Es muß also jetzt an Stelle der Gleichung (2) folgende benutzt werden:

$$\alpha\left\{E_0 + \frac{1}{b}[uH_0]\right\} = p, \tag{6}$$

dabei ist u die Geschwindigkeit des Teilchens.

2. Jedes Teilchen wird nicht mehr zu einer Schwingung mit der Wellenlänge λ der primären Welle angeregt, sondern mit

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 - \frac{u}{b}\cos\varphi}. \tag{6a}$$

φ ist der Winkel zwischen u und der Richtung des Strahles. Außerdem müssen nunmehr die Gesetze der Ausstrahlung einer bewegten Lichtquelle herangezogen werden. Die sich daraus ergebenden Änderungen der Amplitude sind von der Größenordnung von u/b.

Es soll sich nun eine Schicht von der angenommenen Beschaffenheit in der Fortpflanzungsrichtung der primären Welle mit der konstanten Geschwindigkeit u bewegen. Dann ist aus (6) und (6a)

$$p = \alpha\{E_0(1-\beta)\}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{1-\beta}, \quad \left(\beta = \frac{u}{b}\right).$$

Um die durch diese Bewegung verursachte Veränderung des Brechungsexponenten zu bekommen, denken wir uns mit der Schicht bewegt. Indem wir dann die bekannte Lorentzsche Transformation mit der Ortszeit in (4) anwenden und zu einem ruhenden System übergehen, erhalten wir

$$\mu' - 1 = 2\pi N\alpha(1-\beta)\ ^{1}),$$

1) Dabei ist keine Rücksicht auf die Dispersion genommen.

wo μ' den gesuchten Brechungsexponenten bezeichnet. Im Falle der Ruhe hatten wir

$$\mu - 1 = 2\pi N\alpha,$$

oder also

$$\mu' - 1 = (\mu - 1)(1 - \beta).$$ [1])

Wir kehren zu der regellosen Verteilung der Geschwindigkeiten zurück.

Die Änderung der Amplitude, welche proportional zu u/b ist, wechselt ihr Vorzeichen, wenn u das Vorzeichen wechselt. Bei einer regellosen Verteilung der Geschwindigkeiten ist jede Geschwindigkeit gleich wahrscheinlich mit der gerade entgegengesetzten. Die Bewegung übt in diesem Falle keinen Einfluß aus auf die Amplitude der von dem betrachteten Raumelement emittierten Feldintensität. Bei den Gasen dürfen wir die letzte Annahme (in jedem gegen λ^3 kleinen Volumelement jede Geschwindigkeit der entgegengesetzten gleich wahrscheinlich) kaum machen. Da aber die Änderung der Amplitude von der Größenordnung von u/b ist, so ist es nur möglich, daß kleine Unregelmäßigkeiten eintreten. Für die Teile der Amplituden welche der Ruhe entsprechen, lassen sich dieselben Überlegungen anstellen wie früher. Es bleiben eben kleine Amplituden übrig, über die man im allgemeinen nichts aussagen kann.

Die Annahme, daß die Teilchen sich unregelmäßig bewegen, hat Lord Rayleigh in seiner Theorie der trüben Medien gemacht. Er schließt etwa so[2]): Sind die Teilchen unbeweglich und trifft sie eine ebene Welle, so werden die Teilchen mit einer konstanten Phasendifferenz schwingen. In irgend einem Punkte P wird also je nach dem Abstand bez. Richtung ein gewisses Interferenzbild erzeugt. Wir dürfen also nicht etwa die Intensitäten (proportional den Quadraten der Amplituden der Feldintensitäten), welche von jedem einzelnen Teilchen in P erzeugt werden, summieren, sondern die Feldintensitäten selbst. Bewegen sich nun die Teilchen, so werden sie keine konstante Phasendifferenz besitzen. Ebensowenig werden die Feldintensitäten in P eine konstante Phasendifferenz aufweisen (ausgenommen den Fall, wenn P und die Teilchen in der Richtung der Fortpflanzung der Welle liegen).

1) Vgl. Robert W. Wood, Physikal. Optics 1905. p 517.

2) Lord Rayleigh (J. W. Strutt), Phil. Mag. 41. p. 112. 1871.

Die Phasendifferenz wird in Anbetracht der Kleinheit der Wellenlänge während einer auch kurzen Beobachtungszeit alle möglichen Werte durchlaufen. In diesem Falle können wir die *Intensitäten* summieren.

Das stimmt etwa für zwei Teilchen; sind aber viele vorhanden, so kommt es, wie es mir scheint und nach dem, was oben auseinandergesetzt wurde, gar nicht darauf an, ob zwei bestimmte Teilchen in einem Punkt P ein bestimmtes Interferenzbild erzeugen, sondern ob sich *feste* Raumteile finden lassen, welche in ihren Dimensionen klein gegen die Wellenlänge sind und einander in bezug auf Teilchengehalt gleich bleiben. Ein optisch homogenes Medium kann man aber in solche Raumteile immer einteilen, denn das ist die Definition der optischen Homogenität. Wir kommen somit zum Resultat, daß ein optisch homogenes Medium nicht trüb erscheinen kann, mögen sich die Teilchen bewegen oder nicht.[1]) Es scheint mir unzulässig, die Rayleighsche Theorie der trüben Medien auf die atmosphärische Luft anzuwenden. Die Luft ist als optisch homogenes Medium aufzufassen. Denn in einem Würfel von der Kantenlänge gleich einer Wellenlänge des Natriumlichtes sind ca. $5 . 10^6$ Moleküle, welche Rayleigh als die trübenden Teilchen ansieht, enthalten.

Die Berechnung der seitlich zerstreuten Energie als Summe der von jedem einzelnen Molekül emittierten scheint mir nach dem oben Gesagten unzulässig.

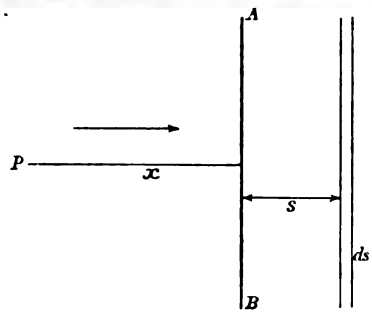


Fig. 1.

Ich wende mich zur Betrachtung des Lichtes, welches in einem optisch homogenen Medium in der zur Fortpflanzungsrichtung der Welle entgegengesetzten Richtung von den Teilchen emittiert wird.

In der Ebene AB (Fig. 1), welche senkrecht zur Fortpflanzung der Welle steht, soll das ursprüngliche Medium an

1) Die Bedingung der optischen Homogenität kann erfüllt werden auch dann, wenn das von den Teilchen eingenommene Volumen klein im Vergleich zu dem ganzen Volumen ist. (Vgl. Lord Rayleigh, Phil. Mag. 47. p. 383. 1899.)

das durch die Teilchen modifizierte grenzen. Es wird die Feldintensität E im Punkte P gesucht. An der Ebene AB soll die Feldintensität der primären ebenen Welle

$$E_1 = A \cos \frac{2\pi b t}{\lambda}$$

sein. In der Schicht ds ist die Feldintensität

$$E_s = e^{-\varkappa s} A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - \mu s),$$

$\varkappa$ ist der Voraussetzung gemäß klein gegen $1/\lambda$. Ich teile das Medium II in Schichten von der Dicke $\lambda/4\mu$. In jeder Schicht nehme ich $\varkappa s$ als konstant an, was wegen der Kleinheit von λ erlaubt ist. Die erste Schicht erzeugt in P die Feldintensität (Gleichung (4))

$$E' = A N \frac{4\pi^2 \alpha}{\lambda} \int_0^{\lambda/4\mu} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(b t - [2\mu s + x])\, ds$$

$$= - \frac{A N 4\pi\alpha}{2\mu} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - x),$$

die zweite

$$E'' = \frac{A \varkappa_2 4\pi\alpha N}{2\mu} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - x),$$

wo $\varkappa_2 = e^{-\varkappa \lambda/4\mu}$ gesetzt ist etc.

Die Feldintensität in P ist

$$E = E' + E'' + E''' + \ldots$$

Wenden wir nun eine der Fresnelschen ganz analoge Überlegung an, so kommen wir zu dem Resultat, daß diese Summe sich auf

$$\frac{E' - E^\infty}{2}$$

reduziert oder, da $e^{-\varkappa\infty} = 0$ ist, auf $E'/2$, somit ist

$$E = - \frac{A 2\pi\alpha N}{2\mu} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - x),$$

oder wegen (5)

$$E = - \frac{\mu - 1}{2\mu} A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(b t - x).$$

Diese Formel besagt, daß an der Trennungsebene AB das Licht gemäß dem Fresnelschen Reflexionsgesetz reflektiert

wird ($\mu - 1$ ist klein). Die mittleren Schichten kompensieren sich in ihrer Wirkung nach rückwärts.

Nach Rayleigh müßte ein Medium von den hier angenommenen Eigenschaften aus seiner ganzen Masse Licht nach rückwärts aussenden. Faßt man das oben Gesagte zusammen, so kann man folgendes aussagen:

Die Anwesenheit von gleich beschaffenen Partikelchen verändert den Brechungsexponenten gemäß Gleichung (5), kann auch Absorption des Lichtes bedingen, wenn man von vornherein irgend eine Umwandlung der Energie in den Partikelchen annimmt.

Die Schwingungen, welche die Teilchen unter dem Einfluß der primären Welle ausführen, erzeugen eine Strahlung, welche dieselbe Richtung wie die primäre Welle hat. Diese Strahlung kann also keine Absorption bedingen.

Es beruht also, wie mir scheint, auf einem Irrtum, wenn Planck die Extinktion in einem optisch homogenen Körper auf die Zerstreuung durch die Teilchen zurückführt. Wenn die Teilchen sich in Abständen voneinander befinden, welche groß gegen ihre linearen Dimensionen sind, so ist wohl die Annahme, daß die Schwingungsdauer der Eigenschwingung jedes einzelnen Teilchens durch die Anwesenheit anderer nicht verändert wird, sehr wahrscheinlich. Wenn aber gleichzeitig die Abstände klein gegen die Wellenlänge sind, so erscheint bei einem geordneten Vorgang das Resultat unrichtig, daß jedes Teilchen diejenige Energiemenge durch Strahlung abgibt, welche es abgeben würde, falls es sich allein im Felde befände.

Ist dagegen das Medium nicht optisch homogen, so wird das einfallende Licht im allgemeinen auch seitlich zerstreut werden. Das Medium ist dann trüb. Betrachten wir zunächst den Fall, wenn die Entfernung von zwei benachbarten Teilchen sehr groß gegen die Wellenlänge ist. Es werden sich dann seitlich einfach die Intensitäten summieren, und zwar sowohl wenn die Teilchen in Bewegung sind, wie auch dann, wenn sie ruhen. Wir beobachten nämlich im zweiten Fall räumliche Mittelwerte. Es wird aber im allgemeinen das seitliche Licht sehr schwach sein.

Bei den trüben Medien, wie man sie für die Beobachtungen herstellt (kolloidale Lösungen, Mastixtrübungen etc.), ist der

Abstand, wie es scheint, nicht groß gegen die Wellenlänge. So ist z. B. dieser Abstand bei Rubingläsern, welche von Siedentopf und Zsigmondy mit dem Ultramikroskop untersucht worden sind, in vielen Fällen von der Größenordnung einer Wellenlänge.

Ich nehme nun an, daß die Teilchen so verteilt sind, daß der Abstand zwei benachbarter Teilchen weder groß noch klein gegen die Wellenlänge ist.

Wenn man nun etwa zwei Teilchen herausgreift, so müssen sie ein bestimmtes Interferenzbild erzeugen. Dieser Versuch wäre vielleicht mit dem Ultramikroskop ausführbar.

Im allgemeinen gelangt aber zur Beobachtung das Licht, welches von sehr vielen Teilchen emittiert wird. Es frägt sich dann, welche resultierende Amplitude haben wir in irgend einem Punkt zu erwarten; mit anderen Worten, welche Amplitude ist die wahrscheinlichste. Da der mittlere Abstand zwei benachbarter Teilchen etwa von der Größe einer Wellenlänge angenommen ist, so hat jedes Teilchen keine angebbare Phase, sondern die Phasen sind ganz willkürlich unter den Teilchen verteilt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Partikelchen ganz regellos zerstreut sind. Setzen wir die Amplitude der Feldintensität, welche von der Ausstrahlung eines Teilchens herrührt, $= 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit W, daß die resultierende Amplitude zwischen r und $r + dr$ liegt,

$$W = 2n^{-1} e^{-\frac{r^2}{n}} . r\,dr .$$ [1])

Das Maximum dieses Ausdruckes ergibt die wahrscheinlichste Amplitude. Dabei ist nach dem Weberschen Gesetz, nach welchem, „wenn die Empfindung sich um ein gerade Merkliches ändern soll, die Änderungen der Reizstärken diesen selbst proportional sein müssen", dr/r konstant zu halten. Die wahrscheinlichste Amplitude ist dann $r_w = \sqrt{n}$, also ist die wahrscheinlichste Intensität diejenige, welche man bekommt, wenn man die einzelnen Intensitäten summiert.

Es braucht selbstverständlich bei ruhenden Teilchen die Intensität nicht gerade diesen Wert zu haben, nur ist die

---

1) Vgl. Lord Rayleigh, Theorie of sound 1. p. 40.

Wahrscheinlichkeit, daß die resultierende Intensität *viel* kleiner bez. größer ist, sehr gering.

Wenn sich die Teilchen regellos bewegen, so werden die verschiedensten Kombinationen eintreten. Bei einer genügend langen Beobachtungszeit kommt aber der Mittelwert J der Intensität zur Beobachtung, also

$$J = 2n^{-1} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{n}} r^3 dr = n .$$

In den zuletzt betrachteten Fällen kann man also die von einzelnen Teilchen emittierten Energien summieren. Dann behalten die Gesetze, welche Rayleigh für die Farbe und den Polarisationszustand des seitlich zerstreuten Lichtes aufgestellt hat, ihre Gültigkeit.

Zweiter Teil.

In dem vorhergehenden Teil habe ich Überlegungen angegeben, welche zum folgenden Schluß führten: Ist ein Medium durch Einbetten von kleinen Teilchen modifiziert, aber so, daß das Ganze optisch homogen ist, und geht durch dieses Medium etwa eine ebene Welle durch, so wird das Licht seitlich nicht zerstreut.

Sowohl die Rayleighsche wie die Plancksche Theorie ergeben im Gegenteil eine seitliche Zerstreuung, und zwar strahlt während der Zeit dt jedes Teilchen innerhalb eines Elementarkegels, dessen Richtungen und Öffnung durch Polarwinkel ϑ und φ und $d\vartheta$ und $d\varphi$ bestimmt ist, die Energie

$$\frac{dt}{4\pi b^3} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \sin^3\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

aus.[1])

Daß diese Strahlung als Licht von derselben Wellenlänge wie die durchgehende Welle zur Beobachtung gelangen muß, scheint mir direkt aus der Planckschen Entwickelung zu folgen. Denn wenn man keine speziellen Hypothesen einführt, was Planck auch nicht tut, so ist keine Transformation der Energie bezüglich der Wellenlänge möglich. Was zunächst die Gase betrifft, so wird das seitliche Licht im allgemeinen

1) M. Planck, l. c. p. 746. 1908.

so schwach sein, daß es sich der Beobachtung entziehen wird. Auf diesem Wege kann man also wohl keine Entscheidung zwischen den Anschauungen treffen.

Ich möchte auf eine Erscheinung etwas näher eingehen. In dem Fluoreszenzspektrum des Natriumdampfes beobachtet man, falls man den Dampf mit Sonnenlicht bestrahlt, das Auftreten der *D*-Linien. Puccianti[1]) und Wood[2]) haben gezeigt, daß diese *D*-Linien im Fluoreszenzspektrum durch die *D*-Linien des erregenden Lichtes hervorgerufen werden. Wood deutet diese *D*-Linienstrahlung als Resonanzstrahlung. Das wäre mit dem identisch, was wir unter seitlich zerstreutem Licht verstehen. Angenommen, es wäre tatsächlich Resonanzstrahlung, so wäre die Erscheinung trotzdem in keinem Widerspruch mit der entwickelten Anschauung und zwar aus folgendem Grund. Stark[3]) hat sehr wahrscheinlich gemacht, daß ein Gas ionisiert sein muß, um sein Linienspektrum absorbieren bez. emittieren zu können. Ich will hier erwähnen, daß ich mich durch einen Vorversuch überzeugen konnte, daß wenn der Na-Dampf (nicht leuchtend) bei Atmosphärendruck die *D*-Linien absorbiert, er auch tatsächlich gleichzeitig leitet. Diese Versuche sind noch nicht zum Abschluß gebracht.

Nur die elektrisch dissoziierten Atome beteiligen sich an der Absorption bez. Emission. In bezug auf diese Restatome ist der Na-Dampf aber wohl nicht mehr optisch homogen.

Es schien mir wünschenswert zu sein, einen Versuch zu machen, welcher als Prüfung, wenn auch auf indirektem Wege, dienen sollte für die Erklärung des Himmelslichtes durch die Zerstreuung der Sonnenstrahlen durch die Luftmoleküle selbst.

Lord Rayleigh sieht die Luft als trübes Medium an, die Energie, welche seitlich zerstreut wird, gleich der Summe der von einzelnen Molekülen zerstreuten Energien gesetzt. Unter dieser Annahme läßt sich aus dem Brechungsexponenten der Luft und dem Extinktionskoeffizienten die Loschmidtsche Zahl berechnen. Der auf diese Weise berechnete Wert stimmt befriedigend überein mit den Werten, welche für diese Zahl auf anderen Wegen ermittelt worden sind.

1) L. Puccianti, Atti Accad. Lincei 13. p. 480. 1904.
2) R. Wood, Physik. Zeitschr. 6. p. 908. 1905.
3) J. Stark, Ann. d. Phys. 21. p. 422. 1906.

Nach den oben angestellten Überlegungen müßte, falls die Auffassung von Lord Rayleigh zutrifft, an einer Grenze Luft–Vakuum keine Reflexion stattfinden.

Ich sehe vorläufig keine Möglichkeit, einen Versuch, welcher diese Frage beantworten würde, mit *Gasen* auszuführen. Es scheint mir aber, daß es prinzipiell auf dasselbe herauskommt, falls man anstatt Gas eine sehr verdünnte Lösung nimmt. Ich habe den Versuch nach dem folgenden Schema ausgeführt.

An einer Ebene grenzen zwei Medien aneinander, z. B. Glas und Flüssigkeit, welche für eine bestimmte Farbe denselben Brechungsexponenten besitzen. An der Trennungsebene wird diese Farbe nicht reflektiert. Nun wird in der Flüssigkeit irgend ein Stoff gelöst und zwar in solcher Verdünnung, daß der Abstand zweier Moleküle dieses Stoffes in der Lösung sehr groß gegen ihre linearen Dimensionen ist.

Die experimentell zu beantwortende Frage ist dann: Tritt jetzt an der Trennungsebene zwischen dem Glas und der auf *diese Weise* modifizierten Flüssigkeit regelrechte Reflexion ein oder nicht? [1])

Nach der hier entwickelten Anschauung müßte regelrechte Reflexion eintreten nach der Rayleighschen Auffassung, soweit ich sehen kann, muß die ganze Lösungsmasse Licht aussenden.

Die Vorversuche habe ich mit folgender Anordnung gemacht (Fig. 2).

In einen planparallelen Glastrog tauchte vertikal eine Spiegelglasplatte von 3 mm Dicke. Das Licht einer Nernstlampe fiel auf die Seite AB, wurde an den Ebenen ab und cd reflektiert. In der zu CB senkrechten Richtung beobachtet

1) Das Resultat dieses Versuches erscheint nicht selbstverständlich, sobald man die Möglichkeit zugibt, daß eine geringe Änderung des Brechungsexponenten (Geschwindigkeit) *keine* entsprechende Änderung der Reflexion zur Folge hat. Ich möchte bemerken, daß Lord Rayleigh (Beibl. 12. p. 161. 1882) bei einer anderen Gelegenheit die Frage aufgeworfen und experimentell zu entscheiden gesucht hat, ob an einer Trennungsebene zweier *verschiedener* Körper von dem relativen Brechungsexponenten 1 nicht eine Reflexion stattfinden könnte.

man beide Spiegelbilder des Fadens. Ich habe erwartet, daß, wenn der Trog mit einer Mischung von Benzol und Schwefelkohlenstoff beschickt wird, welche für eine Farbe denselben Brechungsexponenten hat wie das Glas, die beiden Bilder wenig intensiv und farbig erscheinen werden. Das trat zunächst nicht ein. Die Bilder waren fast ungefärbt und änderten die Farbe und die Intensität kaum merklich, wenn ich den Brechungsexponenten der Mischung durch Zusatz von Benzol oder Schwefelkohlenstoff änderte.

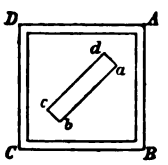


Fig. 2.

Für welche Farbe der Brechungsexponent der Mischung mit demjenigen des Glases übereinstimmte, konnte man auf folgende Weise feststellen. Stellt man das Auge so, daß das Licht, welches von der Ebene *c d* reflektiert wird, durch *b c* in das Auge gelangt, so erscheint der Faden der Nernstlampe in ein Spektrum ausgezogen. Richtet man das Auge gerade auf die Kante *b*, so sieht man gleichzeitig dieses Spektrum und das von *c d* reflektierte scharfe Bild des Fadens. Die Stellung dieses Bildes im Spektrum gibt dann diejenige Farbe an, für welche die beiden Brechungsexponenten übereinstimmen.

Auch nach dem Reinigen der Platte mit Alkohol und konzentrierter Schwefelsäure blieben die Bilder intensiv und fast farblos. Dagegen wurden die Bilder schwach und gefärbt, nachdem ich die Glasplatte mit Zinnasche polierte.[1]) Noch besser als das Polieren wirkt die Behandlung mit verdünnter Flußsäure. Die auf diese Weise gereinigte Platte wird nach einiger Zeit unbrauchbar und muß von neuem gereinigt werden. Es handelt sich hier offenbar um Oberflächenschichten. Schon ganz dünne (im Vergleich mit der Wellenlänge) Schichten genügen, um diese „anomale" Reflexion zu erklären.

Die definitive Anordnung ist aus Fig. 3 ersichtlich.

Als Platte diente eine Wand des inneren Troges. Der äußere Trog hatte die Dimensionen 6,5 × 6,5 × 6,5 cm³. Die Breite des inneren betrug 4 cm, die Länge ebenfalls 4 cm und die Höhe 3 cm. Die Wandstärke betrug 2,5 mm. Werden

1) Vgl. Lord Rayleigh, Beibl. 13. p. 161. 1882.

beide Tröge mit passender Mischung gefüllt, so beobachtet man in P zwei Bilder des Fadens, die gleichartig gefärbt erscheinen. Eine kleine Änderung in der Zusammensetzung der Mischung ändert die Farbe der Bilder. Nun wird im kleinen Trog Naphtalin gelöst. Das Bild, welches durch Reflexion an der Innenseite entsteht, bekommt einen bläulicheren Ton. Da das reflektierte Licht bei dieser Anordnung polarisiert ist, so läßt sich eine Quarzplatte mit drehbarem Nicol verwenden, welche wie bei dem Soleilschen Saccharimeter die Einstellung auf den „Teint sensible" ermöglicht und so das Unterscheiden von Farbendifferenzen erleichtert.

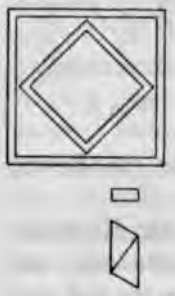


Fig. 3.

In unserem Sinne läßt sich der Versuch so deuten: Die Tatsache, daß regelrechte Reflexion eintritt, beweist, daß die Lichtwellen, welche von den einzelnen Naphtalinmolekülen ausgesandt werden, interferenzfähig sind und zwar auch in Richtungen, welche mit der Richtung des primären Strahles nicht zusammenfallen. Eine diffuse Zerstreuung konnte nicht beobachtet werden.

Um eine ganz deutliche Farbenänderung hervorzurufen, genügt es, 0,3 g in 25 cm^3 zu lösen. Das entspricht einem Gasdruck von 2,1 Atm.

Straßburg i. E., Physik. Institut.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)

4. *Die Schwingungsart einer Stimmgabel und ihr Dekrement; von H. J. L. Struycken.*

Vor gut hundert Jahren gab Chladni an, die Schwingung einer Stimmgabel könnte erklärt werden, wenn man sie als einen gebogenen Stab betrachtete; die Knoten $n - n$ (Fig. 1) würden bei stärkerem Biegen einander immer mehr nähern. Eine Stimmgabel sollte also gleichfalls in den Punkten $n - n$

Fig. 2. Fig. 3.

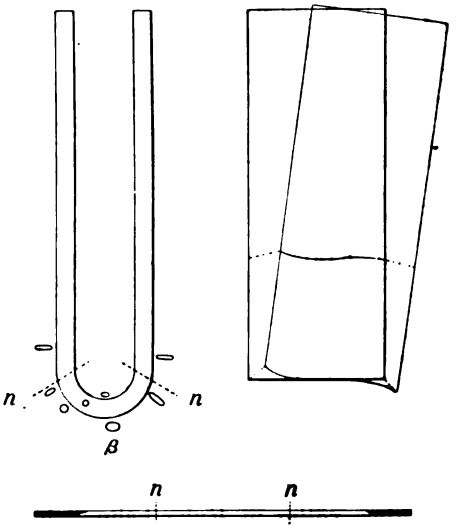


Fig. 1.

einen Knoten und bei β (Fig. 2) einen Bauch haben. Der Stiel sollte der Bewegung in β folgen und folglich longitudinal als Masse hin- und hergehen in derselben Periode als die Zinken. Der nächste Oberton sollte nicht wie beim Stab drei, sondern vier Knoten haben, bei β wieder einen Bauch.

Unwahrscheinlich aber blieb, daß der bei einer Stimmgabel (im Gegensatz zum einfach gebogenen Stab) sehr massive Teil zwischen $n - n$ dieselbe Schwingungszeit annehmen sollte als die viel längeren Zinken, welche dazu noch an ihrem Ende ganz frei sind. Betrachtet man die Bewegung von $n - n$ als eine gezwungene, so erhebt sich die nicht minder große Schwierigkeit, daß alsdann eine sehr starke Dämpfung erwartet werden müßte, während vielmehr eine Stimmgabel mit schwerem Mittelstück sehr langsam ausklingt, also geringe Dämpfung hat. Als ich weiter noch fand, daß in dem Stiel einer nicht zu stark schwingenden Stimmgabel der longitudinale Ausschlag weit geringer war als der transversale, so lag es nahe, die Schwingungsart näher, am besten mikroskopisch zu untersuchen.

Quix hat in der Zeitschrift für Ohrenheilkunde 52. Heft IV nebst den Ergebnissen seiner eigenen Versuche eine ausführliche historische Übersicht gegeben, auf welche verwiesen werden mag.

Biegt man eine einfache platte Feder (die einer Stutzuhr, $^1/_2$ m lang) um, wie Chladni es mit einem Stabe machte, so ergibt sich, daß nicht die Punkte $n - n$ unterstützt oder festgeklemmt werden müssen, wenn sie wie eine Stimmgabel schwingen soll, sondern nur *ein* Punkt, der zwischen jenen liegt. Das Festklemmen muß mit Kraft geschehen, so daß das Entstehen eines Bauches an dieser Stelle völlig ausgeschlossen ist.

Biegt man einen Glasstab um, und zieht man bei der Beobachtung das Mikroskop heran, so ergibt sich, daß die schwingende Bewegung eine ganz andere ist, als bisher auch von den letzten Forschern Quix, Edelmann, Ostmann für Stimmgabeln angegeben wurde. Diese Bewegung (schematisch, was die absolute Größe betrifft) zeigt Fig. 2.

Ein bestimmter, völlig in Ruhe befindlicher Knoten zeigt sich nicht, wohl *ein* Zentrum, wo die gewöhnlich elliptische oder kreisförmige Bewegung die kleinsten Dimensionen aufweist.

Leichter und genauer als beim umgebogenen Stab machen sich die Beobachtungen bei einer Stimmgabel mit tiefem Grundton. Um äußerst feine leuchtende Pünktchen an der Beobachtungsstelle zu bekommen, wird dieselbe mit Aluminiumfolie belegt, auf welche fast horizontal unter dem Objektiv

hindurch ein Lichtbündel geworfen wird (wie bei der ultramikroskopischen Beleuchtung). Um die Beobachtung der an den Seiten der Zinken befindlichen Punkte zu ermöglichen, kann man mit ein wenig Wachs sehr kleine (1 bis 2 mm²) Glimmerplättchen darauf befestigen. Diese sind gleichfalls mit Aluminiumfolie belegt und ragen seitlich $^1/_2$ mm frei hervor. Man kann bei *durchfallendem* Licht beobachten, denn in der Folie befinden sich stets Tausende größerer und kleinerer

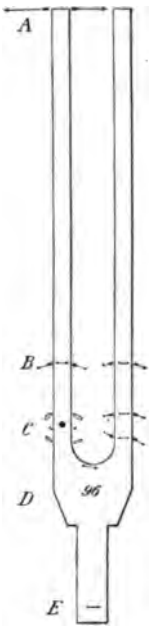


Fig. 4.

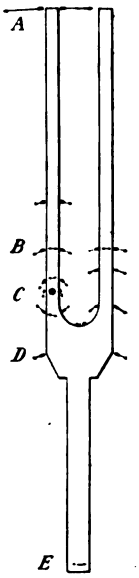


Fig. 5.

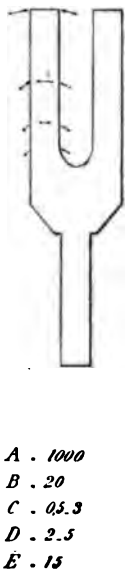


Fig. 6.

Risse, sehr viele davon haben ultramikroskopische Dimensionen, so daß sie sogar bei mehr als 1000maliger Vergrößerung und *sehr starker* Beleuchtung (kondensiertem Sonnenlicht) noch Lichtpünktchen erzeugen von weniger als $^1/_{10}$ mm im Durchmesser. Diese hellen Pünktchen bilden bei der Beobachtung der schwingenden Stimmgabel in unserem Auge Lichtlinien, welche die *Amplitude*, die *Art* und die *Richtung* der Bewegung genau wiedergeben. (Am einfachsten wäre die Beobachtung bei gläsernen, an einer Seite mit Aluminiumfolie bedeckten

Stimmgabeln.[1]) Dabei könnte man in allen Punkten durchfallendes Licht benutzen, nötigenfalls auch mit dem Immersionsystem beobachten.

Fig. 4 zeigt, welche Bewegungen bei einer schwingenden, sehr langsam ausklingenden Stimmgabel *G* von Edelmann (die Dezimierzeit betrug 140 Sek.) beobachtet wurden, wenn der Grundton erzeugt wurde. Am freien Ende schwingen die verschiedenen Punkte fast senkrecht zur Längsachse der Zinke, genau derselbe Weg wird hin und her zurückgelegt, so daß keine Ellipse, sondern eine gerade Linie entsteht. Die Amplituden der beiden Zinken untereinander zeigen stets kleine aber konstante Unterschiede, bei einigen Stimmgabeln sogar $^1/_{20}$ des Ausschlages.

Verfolgen wir nun die Bewegung der äußeren bez. der inneren Seite von einer der Zinken, so ergibt sich folgendes: Die mehr nach dem Herzen (Ort, wo Stiel und Zinken zusammenkommen) gelegenen Punkte bewegen sich nicht mehr senkrecht zur Längsachse, sondern immer mehr in schräger Richtung (*B*), die Punkte an der Innen- wie an der Außenseite beschreiben eine Linie, die mit der Längsachse der Zinke einen nach dem Herzen offenen, spitzen Winkel bildet. Die mehr nach der Mitte befindlichen Punkte (d. h. die zwischen der Innen- und Außenseite gelegenen) zeigen dies in weit geringerem Maße, während die, welche genau in der Mitte liegen, entweder einen sehr schwachen Bogen beschreiben bez. genau senkrecht zur Längsachse hin und her schwingen. Schon auf $^1/_5$ mm von der Außenseite ist die schiefe Bewegung weniger auffallend. Die Formveränderung, welche dadurch während des Schwingens in der Zinke eintreten muß, habe ich schematisch in Fig. 3 darzustellen gesucht.

Setzen wir die Beobachtung der noch näher dem Herzen stattfindenden Bewegung fort, so bemerken wir folgendes. Bei Stimmgabel *g* (192) (Fig. 5), in einem Punkt *c* angekommen, fällt die Bewegungsrichtung an der Außenseite völlig zusammen mit

---

1) Gläserne Stimmgabeln, die ich der Freundlichkeit der Herren Dr. Tiddens und Dr. Reinders verdankte, ergaben im Verhältnis zu ihren Dimensionen auffallend tiefe Grundtöne, während die Obertöne fast gänzlich fehlten. Dauerhaft waren die Modelle aber nicht, sehr leicht zerbrachen sie gerade oberhalb der Biegung.

der Längsachse, obgleich die Amplitude z. B. nur $^1/_{1000}$ von der am Ende der Zinken beträgt. An der Innenseite verhält sie sich ebenso, bez. bildet sie einen sehr spitzen Winkel mit der Längsachse. Zwischen diesen zwei Punkten in der Mitte der Zinke scheint Ruhe zu sein, bei sehr starker Vergrößerung fand sich aber in der Regel, daß die Lichtpünktchen äußerst kleine Ellipsen ($^1/_6$ bis $^1/_4\,\mu$) beschrieben in derselben Periode als die Schwingung der Stimmgabel, wie z. B. in Fig. 4.

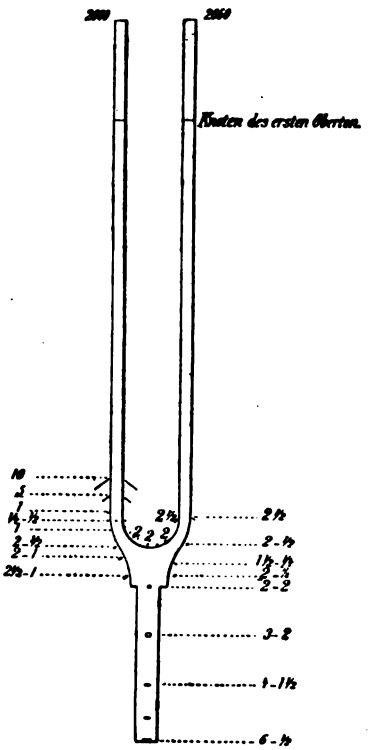


Fig. 7.

Noch mehr nach dem Herzen der Stimmgabel zu, wird an der Innenseite die Bewegungsrichtung allmählich wieder senkrecht zur Längsachse, während sie an der anderen Zinke einen Winkel bildet, der kleiner ist als 90°. Die Amplitude aber hat von dem Punkt *c* an regelmäßig *zugenommen*.

An der Außenseite wird die Bewegung auch immer mehr transversal, aber entgegengesetzt der Bewegungsrichtung über dem Knotenpunkt. Die Amplitude nimmt auch hier zu, aber verhältnismäßig in geringerem Maße; erst am Ende des Stiels wird der größte Ausschlag erreicht. Longitudinale Bewegung, die bei $^1/_4\,\mu$ Amplitude schon eine Ellipse erzeugen würde, fand ich bei Stimmgabeln mit schwermassivem Herzen nicht.

Ist aber das Herz weniger massiv (wie bei den Stimmgabeln von König, Fig. 7), oder sind die Zinken belastet, so sind die ellipsenförmige Bewegungen vorherrschend, wie beim einfach umgebogenen Stab, aber auch bei diesen Gabeln findet man nur einen Punkt in einer der Zinken, wo die Amplitude am kleinsten ist und welcher als Knotenpunkt aufgefaßt

werden könnte. Von der longitudinalen Komponente dieser ellipsenförmigen Bewegung ist weder an den Enden der Zinken, noch am Ende eines genügend langen Stieles etwas zu bemerken; erst ganz allmählich nach dem Knotenpunkt zu erscheint sie, und verschwindet allmählich wieder in dem Stiel.[1])

Die von Quix und Edelmann noch angenommene Erklärung, daß die ellipsenförmige Bewegung der Moleküle entstehen sollte durch die zusammengesetzte Bewegung der transversalen Bewegung der Zinken und der longitudinalen des Mittelstückes, erweist sich als unhaltbar. Die Ellipsenform scheint sich vielmehr dadurch zu erklären, daß nur so die Moleküle allmählich die entgegengesetzte Phase ihrer anfänglichen Schwingungsrichtung annehmen können.

Bei höheren Stimmgabeln, z. B. g^2 (Fig. 6), findet man schon am freien Ende der Zinken die schiefe Bewegungsrichtung der Innen- und Außenseite stärker ausgeprägt.

Wegen der ultramikroskopischen Dimensionen mehr nach dem Herzen zu, war es mir nicht möglich, dieselben optisch bis zu einem bestimmten Knoten zu verfolgen.

Im allgemeinen möchte ich aus meinen Beobachtungen den Schluß ziehen, daß bei einer Stimmgabel, die in ihrem Grundton schwingt, nur in *einem* Punkt ein Minimum der Amplitude auftritt, daß um diesen Punkt die Richtung der Schwingung allmählich umkehrt. Gewöhnlich läßt sich daselbst in der Zinke eine kreisförmige (elliptische) Bewegung nachweisen. Nach dem freien Ende der Zinken hin verschwindet die longitudinale Ordinate sehr bald, während die transversale regelmäßig zunimmt und schließlich nur noch allein nachweislich ist. Nach dem Ende des Stieles hin verschwindet die longitudinale Ordinate weit langsamer, und nimmt die trans-

1) Man könnte geneigt sein aus theoretischen Gründen anzunehmen, daß die asymmetrische Lage des Knotenpunktes auf die stets mehr oder weniger bedeutende massale bez. elastische Ungleichheit der Zinken zurückzuführen wäre, und man könnte erwarten, daß bei einer mathematisch symmetrischen Stimmgabel der Knoten genau im Herzen liegen würde. Versucht man aber das zu erreichen, so nimmt zwar die transversale Amplitude in dem Stiel ab, zu gleicher Zeit aber wird die Zeit des Ausklingens kürzer und nicht länger, so daß es sehr wahrscheinlich wäre, daß eine sehr geringe Asymmetrie vielmehr erwünscht ist, um ein langes Ausklingen (also geringe innere Reibung) hervorzurufen.

versale Komponente in viel geringerem Maß zu als nach dem freien Ende der Zinken. Letzteres schwingt rein transversal, das Ende des *Stieles* bisweilen noch mit einer kleinen longitudinalen Komponente. Zwei Knoten sind nicht da, wohl kann der Punkt, wo die Bewegungsrichtung sich verändert, sich verschieben, und dies geschieht vorzugsweise dahin, wo der innere oder äußere Widerstand sich am meisten geltend macht.

Der Stiel hat, was seine transversale Schwingung anbetrifft, die entgegengesetzte Phase derjenigen Zinke, in welcher der Knotenpunkt nachgewiesen werden kann. Springt dieser Knotenpunkt durch veränderte Klemmung auf die andere Zinke über, so ändert sich auch die Phase des Stieles, wie sich akustisch nachweisen läßt. (Vgl. meine Mitteilung darüber in Nederl. Tijdschrift voor Geneeskunde 1905: Die Bestimmung der Hörschärfe für Knochenleitung.)

Wird die Stimmgabel auf einem Resonanzkasten befestigt, so kann durch Massenbewegung der ganzen Stimmgabel senkrecht zur oberen Deckplatte des Kastens eine größere Amplitude der longitudinalen Bewegung beobachtet werden. Dieselbe ist alsdann am freien Ende der Zinken gleich der des Stieles.

Was die Verteilung der Knoten und Bäuche für die Obertöne betrifft, komme ich zu anderen Ergebnissen als Quix (Zeitschr. für Ohrenheilk. l. c.). Der erste Knoten für den ersten Oberton ist in den Punkten A und B optisch und akustisch leicht nachweisbar; mehr nach dem Stiel hin konnte ich aber nur ein Abschwächen, nie ein gänzliches Verschwinden nachweisen, dasselbe gilt auch für den zweiten und dritten Oberton. Ferner fand ich, daß das Verhältnis der Schwingungszahlen von Grund- und Obertönen *nicht genau durch ganze Zahlen* ausgedrückt werden kann. Wenn ich eine genügende Anzahl photographischer Aufnahmen studiert habe, hoffe ich auf das genaue Zahlenverhältnis zurückzukommen.

Um auf einfache Weise die Obertöne *optisch* wahrnehmbar zu machen, kann man die Kante von einer der Zinken durch einen engen Spalt im Okular eines Mikroskopes beobachten; wird dann über dem Okular ein rotierendes oder schwingendes total reflektierendes Prisma angebracht, so sehen wir die Wellen bei jeder gewünschten Vergrößerung und können sie mit konzentriertem Sonnenlicht photographisch festgelegt werden.

Amplituden bis $^1/_4\,\mu$ können sogar bei Tönen von 25000 Schwingungen in der Sekunde wahrgenommen werden. Die folgende Methode ist bei Gabeln einfacher und läßt noch stärkere, selbst ultramikroskopische Vergrößerungen zu.

Man befestigt an der einen Zinke *zwei* federnde Drähte, an der anderen *einen*; diese drei Miniaturfedern fassen zwischen ihren Enden eine stählerne, scharfkantige Platte. Auf dieser wird ein Spiegelchen befestigt. Die kleinste Breite der Platte und also auch die Größe des Spiegelchens kann etwa bis 0,5—1 mm betragen, jedoch ist es im allgemeinen für die Beobachtung bequemer, wenn die Breite etwas größer ist. Schwingt nun die Gabel, so gehen die zwei Federchen nach rechts, wenn das andere nach links geht und umgekehrt (Fig. 8). Die entgegengesetzte Bewegung der Zinken erteilt dem Spiegelchen eine Winkelbewegung um eine imaginäre Achse; es wird ein Kräftepaar gebildet. Nimmt man nun in diesem Spiegelchen einen Lichtpunkt wahr, so kann dessen Schwingungsweite mehr als 20000 mal vergrößert wahrgenommen werden, ohne daß der so störende Lichtverlust, wie beim Mikroskop, sich einstellt. Der Lichtpunkt wird eine Lichtlinie[1]), deren Länge bedingt wird durch das Verhältnis zwischen der Breite der Platte und der Größe der Zinkenamplitude. Nehmen wir als kleinsten Gesichtswinkel eine Minute an, so kann noch mit dem unbewaffneten Auge eine Amplitude von $^1/_{7000}$ mm beobachtet werden, wenn die Platte 1 mm breit ist. Bei Beobachtung durch das Fernrohr können wir bis $^1/_{70000}$ mm gehen und *also ultramikroskopische Schwingungen wahrnehmbar machen.*

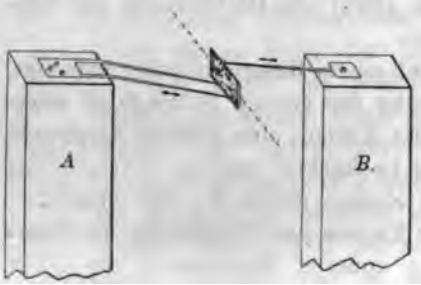


Fig. 8.

Wird nun *während der Beobachtung die Stimmgabel um ihren Stiel als Achse* gedreht, so zeigt sich unserem Auge in

1) Durch Gruppierung einzelner Lichtpunkte nebeneinander kann man leicht die Amplitude sofort ablesen, auf ähnliche Weise wie bei meiner Schwingungsfigur, wenn die Breite der kleinen Stahlplatte nur genau bekannt ist.

dem Spiegelchen, statt der Lichtlinie, die Wellenlinie in all ihren Komplikationen. Leicht ist sie dann mit Sonnenlicht zu photographieren, sogar bei 15000 mal Vergrößerung und auch die höchsten Obertöne können wahrgenommen und ihre Schwingungszahl mit der des Grundtones verglichen werden. Als Kuriosum möchte ich noch mitteilen, daß wenn zwei Telephone einander gegenübergestellt werden, auf ähnliche Weise, wie bei Gabelzinken beschrieben wurde, so daß sie zusammen ein Spiegelchen tragen, daß alsdann die schwingende Bewegung gleichfalls sehr leicht in eine Winkelbewegung verwandelt werden kann.

Bei der Beobachtung des reflektierten Lichtpunktes kann es vorkommen, daß man zweifelt, ob die Schwingung aufgehört hat; eine schnelle Rotation der Stimmgabel um ihre Längsachse um einige Grade genügt alsdann, um nachzuweisen, ob der Lichtpunkt eine gerade oder eine Wellenlinie zeigt. Die Wahrnehmungsgrenze ist dabei mitunter sogar noch weniger als eine Minute.

Leicht ist es also, auch für Töne bis a' das Minimum perceptibile an der Stimmgabel abzulesen und zu kontrollieren, welcher der bisher gewonnenen Werte damit am besten übereinstimmt. (Töpler und Boltzmann, Ostmann, Wien, Zwaardemaker, Struycken.)

Das Dekrement.

Obgleich nach den Berechnungen von Gauss theoretisch die Logarithmen der Amplituden eine arithmetische Progression bilden müßten, haben die Versuche mit Stimmgabeln das nicht mit genau hinreichender Genauigkeit bestätigt.

Belastete Stimmgabeln klingen jedenfalls sehr unregelmäßig aus. Nicht belastete, schwer gebaute Stimmgabeln mit langer Ausklingezeit entsprechen ziemlich genau dem Gesetz, vorausgesetzt, daß gewisse Bedingungen während des Ausklingens erfüllt werden. Um das bei Stimmgabeln mit tiefem Grundton leicht untersuchen zu können, wird an der einen Zinke eine Mikrophotographie befestigt (Zeitschr. für Ohrenheilk. 46), an der anderen eine Linse, welche die Beobachtung bei 100 maliger Vergrößerung ermöglicht.[1]) Die Zahl der Sekunden, welche die Stimmgabel braucht, um auszuklingen von 1 mm bis 100 μ, von

1) Solche Gabeln werden von Kagenaar senior in Utrecht in vorzüglicher Weise montiert.

100 bis 10, von 10 bis 1 μ, kann in jeder Lage leicht bestimmt werden. Diese Zeit nannte ich Dezimierzeit. Der Dämpfungsfaktor ist ihr umgekehrt proportional und beträgt $2/t$, wenn t = Dezimierzeit in Sekunden. *Die größte Sekundenzahl (also der kleinste Dämpfungsfaktor) wurde erreicht, wenn der Stiel zwischen den Fingern* oder zwischen Gummiringen *vorsichtig festgehalten wurde und die Stimmgabel in ruhig hängender Lage ausklingen konnte.* Es ergab sich alsdann, daß die Dezimierzeit in Sekunden in den verschiedenen Perioden von 1 mm bis 1 μ keine großen Unterschiede zeigte. Hin- und Herbewegen, eine leichte Berührung mit den Wimpern während der Beobachtung etc. genügen, um die Dezimierzeit sofort um einige Sekunden zu vermindern. Wird die Stimmgabel horizontal befestigt, so ist die Dezimierzeit stets etwas kleiner und in geringem Grade unregelmäßig. Wird der Stiel zu fest geklemmt, ruht er an einem festen Körper, auf einem Resonanzkasten, ist er durch einen Metallring umgeben etc., so ist alles das mehr als genügend, um ein sehr unregelmäßiges Ausklingen zu verursachen. Auch achte man genau darauf, daß die Schrauben, womit die mikrophotographische Figur befestigt ist, oder die Linse und das Photogramm vollkommen festsitzen, ja bei vernickelten Stimmgabeln (die also entschieden zu verwerfen sind) wirkt schon ein sehr kleiner losgegangener Teil des Belags sehr störend.[1])

1) In den Ann. d. Phys. (13. p. 124. 1904) stellt A. Hartmann-Kempf die Behauptung auf, daß bei Stimmgabeln das Dekrement im allgemeinen proportional der Amplitude zunehme.

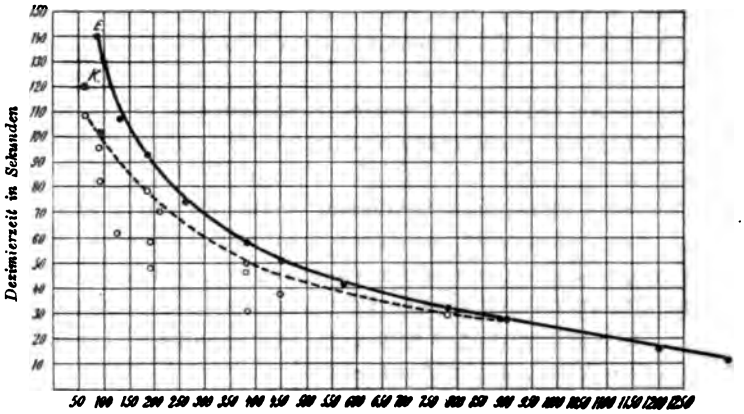
Obgleich ich weder seine trefflichen Experimente noch die Zahlenwerte seiner Ergebnisse beanstanden möchte, kann ich nicht umhin zu bemerken: erstens, daß er den Stiel festgeklemmt hat, zweitens, daß er (abgesehen von den belasteten Stimmgabeln, welche, wie schon früher von mir angeben, ein sehr wechselndes Dekrement haben) mit verhältnismäßig viel größeren Amplituden gearbeitet hat als ich.

Bei meinen Versuchen war der größte von mir benutzte Ausschlag für C_{64} v. d. nur 1 mm, für c' nur 200 μ etc. Aus dieser Versuchsanordnung erklärt es sich vielleicht auch, daß bei meinen Gabeln während des Ausklingens keine Veränderung der Tonhöhe nachgewiesen werden konnte.

An der frei hangenden Gabel konnte ich als kleinste Amplitude leicht Ausschläge von $^1/_2$ Mikron beobachten und also das Dekrement von z. B. C_{64} bei zweitausendfacher Abnahme bestimmen.. Die Modifikation der Gradenigoschen Dreieckfigur gestattet aber nur eine Beobachtung von 1 bis 2 μ, doch macht sie die Wahrnehmung viel leichter.

Bei höheren Stimmgabeln ist die störende Wirkung der Lage (horizontal, hängend oder aufrecht) weit geringer, bei g^3 beträgt sie nur 1—3 Sek. in 30, bei G dagegen 20—30 in 190.

Werden nun die für eine Reihe von Stimmgabeln gefundenen Maxima der Dezimierzeiten in ihrer Beziehung zur



——— Maxima bei hängender Gabel.
– – – – – Maxima bei aufrecht gehaltener Gabel.

Fig. 9.

Schwingungszahl graphisch notiert (vgl. Fig. 9), so bilden sie eine ziemlich regelmäßig verlaufende Kurve, welche für A, a^2, a^4 bez. 130, 30 und 10 Sekunden angibt.

Bis jetzt habe ich mich vergebens an mir bekannte Mathematiker und Physiker um eine befriedigende mathematische Erklärung dafür gewendet.

Folgendes glaube ich aber annehmen zu dürfen. Man kann den Dämpfungsfaktor betrachten als die Summe dreier Größen:

a) der inneren Reibung,
b) des äußeren Widerstandes,
c) zufällig wechselnder Störungen.

Bei den gefundenen maximalen Dezimierzeiten darf man den unter c) genannten Einfluß als minimal betrachten; der äußere Widerstand wird wahrscheinlich der Schwingungszahl proportional sein; zwischen der inneren Reibung und der Schwingungszahl wird wahrscheinlich nicht dieses einfache Verhältnis bestehen.

Um das Verhältnis zwischen innerem und äußerem Widerstand näher untersuchen zu können, veränderte ich letzteren, indem ich die Stimmgabel in verschiedenen Gasen (verdünnter Luft, CO_2, Äther u. dgl.) ausklingen ließ.

Bis jetzt habe ich, in Ermangelung zweckmäßig eingerichteter Apparate, nur Versuche mit horizontal fixierten Stimmgabeln anstellen können in stark verdünnter Luft, nicht im Vakuum.

Dieselben wurden in einem Metallkasten, der mit einer Spiegelglasplatte geschlossen war, aufgestellt; unter dem Mikrophotogramm wurde ein schiefes Spiegelchen angebracht, so daß die Schwingungsfigur genügend beleuchtet wurde und leicht durch das Spiegelglas hindurch beobachtet werden konnte. Als das Quecksilbermanometer 25 mm zeigte, wurde die Stimmgabel mit einem elektrischen Hämmerchen in Schwingung versetzt. Aus zahlreichen Versuchen, bei welchen Dr. Tiddens mich freundlichst unterstützte, ergab sich, daß die Dezimierzeit in verdünnter Luft größer war als in nicht verdünnter, so fand ich z. B.:

Stimmgabel g' Edelmann, Zeit in Sekunden von 100 bis 5 μ in atmosphärischer Luft:

66, 66, 66, $67^1/_4$, $65^1/_2$, 67, 65, $65^1/_4$, 67, 66, 66, $66^1/_4$,

bei 26 mm Druck:

70, 70, 68, 68, 69, 68, $69^1/_4$, 68, $69^1/_2$, 68.

In Kohlensäure, Ätherdampf in einem geschlossenen Kasten, war der Unterschied nicht auffallend, wohl aber, wenn der Kasten offen blieb und das Gas fortwährend zugeführt wurde. Für dieselbe Stimmgabel fand ich z. B. in Kohlensäure $63^1/_2$, 64, $63^1/_2$, 62, 60, 63, während in Luft durchschnittlich $65^1/_2$ bei horizontaler Fixierung gefunden wurde. Auch in Ätherdampf betrug der Unterschied nur $1^1/_2$ bis 2 Sek.

Aus den gewonnenen Resultaten möchte ich keine bestimmten Schlüsse ziehen. Da aber die Veränderung des äußeren Widerstandes nur solchen geringen Einfluß hatte, darf man annehmen, daß der innere Widerstand mindestens 30 mal größer ist als der äußere beim Ausklingen in gewöhnlicher Luft.

(Eingegangen 13. Mai 1907.)

5. *Bestimmung der Veränderlichkeit des Koeffizienten der Differentialgleichung von Fourier und experimentelle Anwendung auf Wärmeleitung von Isolatoren;* von *Joh. Koenigsberger und Joh. Disch.*

§ 1. Einleitung.

Fourier hat am Schluß seiner „Theorie analytique de la chaleur“[1]) darauf hingewiesen, daß die von ihm aufgestellte Differentialgleichung nicht auf einer physikalischen Erklärung der Wärmewirkung beruht, sondern lediglich formell mathematisch begründet ist. Er hielt deshalb auch eine Abhängigkeit der Wärmeleitungsfähigkeit von der Temperatur und in geringerem Maß vom Druck für wahrscheinlich. L. Mach[2]) hat gezeigt, daß die Differentialgleichung von Fourier $\partial u/\partial t = a^2 \Delta u$ deshalb in so vielen Gebieten der Physik gilt, weil sie als rein mathematische Beziehung in erster Annäherung bei jeder Veränderung eines physikalischen Zustandes gelten muß. Die Form der Gleichung und die Konstanz ihres Koeffizienten a^2 kann nicht streng gefolgert werden, sondern beruht auf vereinfachenden Annahmen über die unbekannte Funktion, die als Nahewirkungsgesetz den Einfluß der umgebenden Punkte auf den zu untersuchenden darstellt, und auf Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung der Taylorschen Reihe. Deshalb wird die Konstante a^2 nicht streng konstant, sondern eine Funktion der *abhängigen* Variabeln sein; die Wärmeleitfähigkeit eine Funktion der Temperatur, die Diffusionskonstante der Konzentration, die elektrische Leitfähigkeit des Potentials, der Reibungskoeffizient der Geschwindigkeit etc. Bekanntlich ist auch die Differentialgleichung von Fourier *nicht* auf die erweiterten Differentialgleichungen der

1) J. B. Fourier, Theorie analytique de la chaleur. Article 433.
2) L. Mach, Prinzipien der Wärmelehre p. 118. Leipzig 1900.

Mechanik zu reduzieren[1]), und kann also wohl keine mathematisch strenge Darstellung der oben erwähnten physikalischen Vorgänge sein, die ja einer rein mechanischen Auffassung jedenfalls auch zugänglich sein müssen. Daher ist eine Abhängigkeit der Konstanten von der abhängigen Variabeln nicht nur möglich, sondern äußerst wahrscheinlich.

§ 2. Diskussion der früheren Methoden.

Um die Abhängigkeit experimentell zu bestimmen, sind zwei Wege eingeschlagen worden. Die *indirekte* Messung beruht auf Bestimmung der absoluten Größe des Koeffizienten a^2 unter verschiedenen Bedingungen (z. B. Wärmeleitfähigkeit bei verschiedenen Temperaturen). Aus dem Unterschied der Zahlenwerte von a^2 wird dann die Abhängigkeit berechnet. Wenn die Änderung durch eine andere als die abhängige Variable der Differentialgleichung von Fourier, z. B. durch Druck oder durch magnetisches Feld etc. bestimmt werden soll, so ist das vielfach die einzig mögliche Methode. Sie ist da anwendbar, wo die Fehler der absoluten Messung wesentlich kleiner sind als die Änderungen der zu messenden Größe in verschiedenen Zuständen und hat so z. B. für den Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitfähigkeit von Metallen befriedigende Werte ergeben. Immerhin sind die Unterschiede des auf diese Art gefundenen Temperaturkoeffizienten γ auch für die sorgfältigsten Messungen recht groß. Jäger und Diesselhorst[2]) finden γ für reines Blei $-0{,}00016$, für reines Kupfer $-0{,}00012$, Lorenz für ersteres $-0{,}000072$, für letzteres $+0{,}000028$, Hagström ebenfalls für reines Kupfer $-0{,}00064$, Hecht für Kupfer $-0{,}0004$, für Blei $-0{,}0002$. In erster Linie sind diese Verschiedenheiten wohl systematischen Fehlern der absoluten Messungen, namentlich dem starken Einfluß des äußeren Wärmeleitungsvermögens, das sich mit der Temperatur wesent-

1) Vgl. L. Koenigsberger, Berl. Ber. p. 7 16. Febr. 1905.

2) Für die meisten Angaben sei auf die ausgezeichnete Darstellung von L. Graetz in Winkelmanns Handbuch der Physik: Wärme (Leipzig 1906) verwiesen. Nur für die eingehender behandelten Untersuchungen wird im folgenden die Literatur angegeben.

lich ändert, zuzuschreiben. — Viel ungünstiger ist diese indirekte Methode bei Anwendung auf die Isolatoren; hier betragen die Fehler der absoluten Messungen bis 10 Proz., die systematischen, die bei Berechnung des Temperaturkoeffizienten allerdings weniger stören, weit mehr. So finden für einen so gut definierten und leicht rein zu erhaltenden Körper wie Schwefel die besten Beobachter recht verschiedene Werte: Lodge $\lambda = 0{,}00045$, Hecht $\lambda = 0{,}00063$, Lees $\lambda = 0{,}00079$; für festes Paraffin: R. Weber $\lambda = 0{,}00023$, Lees $\lambda = 0{,}00061$. Daher ist es nicht erstaunlich, wenn der Temperaturkoeffizient des festen Paraffins von R. Weber[1]) (1903) zu $+ 0{,}06$ angegeben wird, während er sich aus den Versuchen von Lees[2]) (1905) zu etwa $-0{,}014$ berechnet. Nur die Messungen von Lees an schlecht leitenden Substanzen scheinen uns so exakt ausgeführt, daß die Temperaturkoeffizienten bei seiner älteren Methode auf vielleicht 50—100 Proz., und bei seinen neueren bis zu -180^0 reichenden Messungen auf 100 Proz. richtig sein dürften. Doch sind das die einzigen und nur qualitativ zuverlässigen Bestimmungen von Temperaturkoeffizienten der Isolatoren.

Ähnliche Schwierigkeiten hat die Bestimmung der Abhängigkeit des *Diffusionskoeffizienten* von der Konzentration gemacht. Die Theorien von Nernst und von Riecke weisen darauf hin, daß bei stärkeren Konzentrationen der Diffusionskoeffizient nicht konstant ist. Beilstein, F. Weber, Schuhmeister, Wroblewski, Long haben diese Abhängigkeit aus der Differenz absoluter Messungen bestimmt, aber sehr widersprechende Resultate gefunden. Am besten übereinstimmend und wohl am genauesten sind die Messungen von Scheffer und von Wiedeburg. Letzterer findet in der Gleichung $K = K'(1 + \varkappa c)\ \varkappa$ für Kaliumbichromat und Kupfersulfat negativ, für Kochsalz positiv und von einer Größe, die mit den Fehlern der absoluten Messung vergleichbar ist. Dasselbe gilt für die *Diffusion in Gasen.*

Ganz unmöglich wäre auf indirektem Wege wegen der Kleinheit des zu erwartenden Effektes die *Abhängigkeit der*

1) R. Weber, Ann. d. Phys. **11.** p. 1065. 1903.
2) Ch. H. Lees, Phil. Trans. Roy. Soc. London **204.** p. 456. 1905.

elektrischen Leitfähigkeit vom Potential zu bestimmen, die bei Vorwiegen einer Elektronenart in schlechten Leitern erster Klasse auftreten müßte, oder die des *Reibungskoeffizienten* von der *Geschwindigkeit*, die nach den kinetischen Theorien wahrscheinlich ist.

Die *direkte* Methode, die Fourier schon angedeutet hat, hat Forbes 1852 zuerst angewandt. Warum sie ihm und überhaupt bisher keine befriedigenden Resultate ergeben hat, soll später besprochen werden. Im stationären Zustand wird die abhängige Variable am einfachsten als Funktion von nur *einer* der drei Raumkoordinaten gewählt. Die zu untersuchende Substanz muß dann entweder nach einer Richtung (Stab) oder nach zwei Richtungen (Platte) relativ sehr (theoretisch unendlich) ausgedehnt sein.

Mißt man an drei Punkten 1, 2, 3, deren Abstand voneinander l_{12} bez. l_{23} sein soll, die Größe der Variabeln u, so gilt für den Koeffizienten

$$\text{(I)} \qquad \frac{x_{12}}{x_{23}} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3} \cdot \frac{l_{12}}{l_{23}}.$$

Die Messungen von Forbes waren namentlich deshalb unsicher, weil bei der von ihm angewandten Stabform die Abhängigkeit des äußeren Wärmeleitungsvermögens von der Temperatur die Rechnungen und Beobachtungen verwickelt macht. Die Versuche sind von einem Komitee, dann von Tait und Mitchell nachgeprüft worden, und haben andere Werte ergeben. Später haben E. Hall, Baillie, Quickchild und Lanphear auf dieselbe Art die Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens der Metalle von der Temperatur geprüft.

Im Prinzip ähnlich ist auch die Methode von Berget, der im stationären Zustand die Wärmeleitfähigkeit des Quecksilbers und direkt deren Abhängigkeit von der Temperatur maß. Hierbei war nach dem Prinzip des Schutzringes der Einfluß der äußeren Wärmeleitung eliminiert, so daß die Messungen ganz einwandsfrei sind. Lord Kelvin und Erskine Murray[1]) haben, um von der äußeren Wärmeleitung unab-

1) Lord Kelvin u. E. Murray, Proc. Roy. Soc. London 58. p. 162. 1895.

hängig zu sein, eine sehr ausgedehnte Platte verwandt und auf diese Art den Temperaturkoeffizienten für einen trockenen Granit von Aberdeen gleich $-0{,}0011$ gefunden.

Auf Diffusionskoeffizienten etc. ist die direkte Methode überhaupt noch nicht angewandt worden. Dies wird wohl darin seinen Grund haben, daß schon in den oben erwähnten Untersuchungen (mit Ausnahme von Berget[1]), der eine Flüssigkeit, Quecksilber, in langer Säule benutzte) zwei systematische Fehler das Resultat gründlich fälschen können.

1. Fehler in der Messung der Abstände zwischen den beiden Punkten. Man sieht aus Gleichung (I) sofort, daß $l_{12} : l_{23}$ so genau bekannt sein muß, als man die Änderung der Konstanten $\varkappa$ zu wissen wünscht. Da man aber aus praktischen Gründen (niedriger Schmelzpunkt etc.) kaum Temperaturdifferenzen von mehr als 100^0, in den meisten Fällen viel kleinere anwenden muß — dasselbe gilt in verstärktem Maß für die Konzentration bei der Diffusion etc. —, so muß man, um den Temperaturkoeffizienten auf $\pm 0{,}0001$ sicher bestimmen zu können, die Längen auf mindestens 0,003 genau messen. Das ist schwierig, wenn es sich um die Lage von Thermoelementen im Innern eines festen Körpers handelt. Da, wie oben auseinandergesetzt, wegen des äußeren Wärmeleitungsvermögens für exakte Messungen die Plattenform zunächst wünschenswert ist, so ist, um genügende Annäherung an die theoretischen Voraussetzungen zu erreichen, für eine Plattendicke von 10 cm mindestens eine Fläche von 25×25 cm (und außerdem ein schmaler Schutzring von Holz) notwendig, also z. B. eine Granitmasse von mindestens 16 kg.[2]) Man kann aber die Lage der Lötstelle oder des wirksamen Teiles der Lötstelle eines Thermoelementes im Innern kaum mit Sicher-

1) A. Berget, Journ. de phys. 7. p. 2. 1888.

2) Von uns wurde, um möglichst alle systematischen Fehler zu vermeiden, mit solchen sehr großen Platten gearbeitet. Im allgemeinen aber darf man die Forderung, daß nur Platten verwendet werden, fallen lassen. Auf den stationären Wärmefluß ist die Schutzringmethode von Berget anwendbar, sie kann nur sehr kleine Fehler in der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten verursachen. Bei kostbarem Material kann man also kleine Stäbe in einer großen Schutzringplatte aus anderem Material untersuchen.

heit auf 1 mm angeben, und das bedingt für eine Strecke von 10 cm bereits eine Unsicherheit von 1 Proz., während der Fehler nur $\pm 0{,}3$ Proz. sein sollte. Dasselbe gilt für Diffusion, Reibung.

2. Die zweite Quelle systematischer Fehler bei den Messungen in festen Körpern ist die oft *sehr beträchtliche Inhomogenität*, die sich für Wärmeleitung, Elektrizitätsleitung etc. nicht anderweitig im voraus feststellen läßt.

§ 3. Verbesserung der direkten Bestimmung und daraus hervorgehende neue Methode.

Diese *beiden Fehlerquellen* lassen sich durch *Vertauschung der Richtung* des Wärmestromes etc., also der Temperaturen, Konzentrationen etc. eliminieren, und es ist *nicht nötig*, beim Kommutieren beidemal *dieselben* Temperaturdifferenzen etc. anzulegen, wie im folgenden rechnerisch gezeigt werden soll.

Es gelte die Differentialgleichung von Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

und es sei die Strommenge

$$-q_x = \varkappa \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

wobei zwischen $\varkappa$ und a^2 die Beziehung besteht $a^2 = c \,.\, \varkappa$. Es sei ferner $\varkappa = \varkappa'(1 + \alpha u)$.

Dann gilt für den stationären Zustand in einer *Platte*, bei der das äußere Wärmeleitungsvermögen nicht in Betracht kommt,

$$u = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2q}{\varkappa' \alpha} x + c}.$$

Für drei Punkte der Platte mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 gilt:

$$u_1 + \frac{\alpha}{2} u_1^2 = -\frac{q}{\varkappa'} \cdot x_1 + c,$$

$$u_2 + \frac{\alpha}{2} u_2^2 = -\frac{q}{\varkappa'} \cdot x_2 + c,$$

$$u_3 + \frac{\alpha}{2} u_3^2 = -\frac{q}{\varkappa'} \cdot x_3 + c,$$

und nach Vertauschung, wobei q und q' verschieden sein können,

$$u_1' + \frac{\alpha}{2} u_1'^2 = -\frac{q'}{\varkappa'} x_1 + c,$$

. . . . . .

woraus folgt:

$$\alpha = 2 \cdot \frac{(u_2' - u_1')(u_3 - u_2) - (u_2 - u_1)(u_3' - u_2')}{(u_3'^2 - u_2'^2)(u_2 - u_1) + (u_3^2 - u_1^2)(u_3' - u_2') - (u_3'^2 - u_1'^2)(u_3 - u_2) - (u_3^2 - u_2^2)(u_2' - u_1')}.$$

Man ersieht sofort, daß eine genaue Messung von α *nur* die sorgfältige Bestimmung der *Differenzen* $(u_3 - u_1)$ etc. erfordert, und daß Fehler in dem absoluten Wert von u_1, u_3 etc. von geringem Einfluß sind. *Andere Größen* als die *abhängige* Variable gehen *nicht* in die Formel ein; es ist nicht notwendig, daß etwa $u_1 = -u_2'$, daß also ein exaktes Kommutieren stattfindet. Daher sind die experimentellen Bedingungen die für diesen Zweck denkbar einfachsten.

Um ein sehr kleines α, von der Größe 0,00025, noch zu bestimmen (d. h. einen mittleren Fehler von nicht mehr $\pm 0{,}000125$), müssen, wie man leicht sieht, bei Temperaturdifferenzen von 15° die Differenzen auf etwa $\pm 0{,}6$ Proz. genau, die absoluten Werte von u auf 5 Proz. genau gemessen werden, wobei es am günstigsten ist, wenn $x_3 - x_1$ nicht sehr verschieden von $x_2 - x_3$ ist.

Für Kontrollrechnungen und bei kleinem α auch zur Ausrechnung, sind folgende angenäherte Formeln praktisch:

$$2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} + \frac{u_3' - u_1'}{u_3' - u_2'} = 2L$$

und

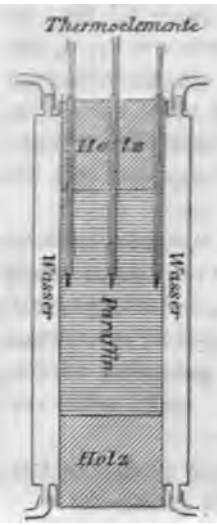
$$\alpha(u_1 - u_3) = 2L \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_2 - u_1} - 2.$$

§ 4. Anwendung auf Wärmeleitung.

Versuchsanordnung.

Die beiden Substanzen, die zur Untersuchung gelangten, hatten die Form eines Parallelepipeds, dessen Kanten bei Paraffin $23 \times 23 \times 9$ cm, bei Granit $24 \times 24 \times 9{,}5$ cm betrugen. Um dieselben war ein Schutzring aus Holz von 10 cm Breite gelegt (vgl. Figur). Damit war, wie schon erwähnt, die unendlich ausgedehnte Platte praktisch mit genügender Annäherung realisiert, weil die störenden Wirkungen der freien Enden in den breiten Holzring fallen. Das Paraffin wurde eingegossen, der Granit geschliffen. Das Holz war in Leinöl getränkt und außen mit heißem Paraffin verstrichen. Zwischenräume und

Fugen wurden sorgfältig mit Marineleim und Paraffin verschmiert, und Zwischenlagen von Gummibändern angekittet und genagelt, um *jeden* Wasserdurchtritt zu verhindern. Technisch war dies wegen der ständigen Zusammenpressung des Paraffins der mühsamste Teil der Versuche. Beiderseits trugen



die Klötze durch Asbest geschützte Blechkästen, von etwa 1 cm Dicke, die am Holzring wasserdicht befestigt waren; dieselben hatten den Zweck, das Wasser von konstanter Temperatur aufzunehmen, welches unten durch drei Röhren zugeführt, oben durch ebenso viele entfernt wurde. Einerseits wurde Wasser der Wasserleitung durchgeschickt, welches nur geringe Temperatur- und Druckschwankungen zeigte, auf der anderen Seite Wasser von ca. 50° durch die Pumpe eines Henricimotors durchgedrückt, welches einem ca. 30 Liter fassenden Thermostaten entnommen wurde. Dieser war mit Hilfe von Rührer und Thermoregulatur auf 0,1—0,2° C. konstant gehalten. Die Temperaturdifferenz des austretenden und zurückfließenden Thermostatenwassers betrug bei den verschiedenen Versuchen zwischen 0,5 und 1,5°. Sie war bei dem einzelnen Versuch bis auf 0,1° konstant. Die Temperaturerniedrigung ist teilweise dem Wärmeverlust in den Blechkästen, zum größeren Teil dem Verlust durch Wärmeleitung des Isolators zuzuschreiben. Die Temperatur wurde mit drei Thermoelementen Manganin–Eisen gemessen; mit je einer Lötstelle in der Substanz und je einer in einem gemeinschaftlichen Bad. An drei Stellen waren sie (vgl. Figur) in die Substanzen durch den Holzring hindurch eingeführt und ragten bei Paraffin bis in die Mitte, im Granit hingegen wegen Bohrungsschwierigkeiten nur bis $^1/_3$ hinein. Damit die Lötstellen die Temperatur der Umgebung rasch annahmen, war in die Kanäle des Granits Quecksilber gefüllt; bei Paraffin wurde genügende Wärmezufuhr durch Einbetten in das noch flüssige Paraffin gesichert. Der senkrechte Abstand, dessen Kenntnis für die Untersuchungen nicht erforderlich war, betrug etwa 3,1 bez.

3,5 cm. Gegen außen und voneinander waren die Drähte mit Glasröhren oder Guttaperchaschläuchen isoliert.

Die in $^1/_{10}{}^0$ geteilten Quecksilberthermometer waren mit einem Normalthermometer verglichen worden. Die elektromotorischen Kräfte wurden kompensiert und mit einem Normal-Westonelement verglichen. Durch Kommutieren an verschiedenen Stellen des Stromkreises konnten alle Thermoeffekte mit Ausnahme der zu messenden eliminiert werden. Wegen der schlechten inneren Leitfähigkeit des Paraffins ist der stationäre Zustand erst nach ca. 10 Stunden erreicht; daher konnte der jedesmalige Gegenversuch erst am folgenden Tag vorgenommen werden. Bei Granit dagegen wurden an einem Tage zwei zugehörige Versuche gemacht entsprechend der 10mal besseren Leitfähigkeit. Folgende Tabelle sei als Beispiel für einen derartigen Paraffinversuch angeführt.

Zeit	Temperaturdifferenzen in willkürlichen Einheiten			Wasserleitung in C.°	Thermostat in °C.	Petroleum in °C.
	links	Mitte	rechts			
$12^h 30^m$	− 9	14	39,0	10,5	48,5	15,2
2 20	− 8	17,6	42,8	10,0	48,5	15,8
4 15	− 9,3	19,8	47,5	9,7	49,0	16,3
4 40	− 9,7	20,1	48,1	9,7	48,7	16,3
6 00	− 9,6	20,8	48,6	10,2	48,6	16,7
6 30	− 9,5	20,7	48,6	10,2	48,8	16,75
6 40	− 9,50	20,85	48,70	10,2	48,7	16,75
7 15	−10,0	21,2	48,8	10,2	48,7	16,85
7 30	− 9,90	21,10	48,85	10,2	48,7	16,9

Die Ablesung der Temperatur von Thermostat und Wasserleitung war nur insofern wichtig, als man dadurch eine Kontrolle für ihre Konstanz hatte. Das Petroleum brauchte nicht konstante Temperatur zu haben, aber dieselbe mußte angenähert bekannt sein, um die Korrektionen für Änderung der thermoelektrischen Kraft pro 1° Temperaturdifferenz mit der absoluten Temperatur anzubringen. Bei dem angeführten Beispiel wurde nun das arithmetische Mittel der beiden Schlußablesungen, die ihrerseits das Mittel aus mehreren Ablesungen sind, nämlich − 9,90, + 21,10, + 48,85 benutzt.

Beim Granit verlief die Messung wesentlich schneller, wie folgende Tabelle zeigt.

Zeit	Temperaturdifferenzen in willkürlichen Einheiten			Wasserleitung in ° C.	Thermostat in ° C.	Petroleum in ° C.
	links	Mitte	rechts			
$10^h 40^m$	62,2	38,0	12,2	9,1	50,1	16,3
11 00	63,1	38,8	12,5	8,7	50,0	16,3
12 00	63,5	39,3	13,7	8,8	50,0	16,3
12 30	63,6	39,6	13,7	8,8	50,0	16,35
12 45	63,8	40,2	14,6	9,7	50,0	16,35
1 00	64,0	39,5	12,8	9,5	50,0	16,35
1 10	64,0	39,6	13,2	9,5	50,0	16,37
1 15	64,00	39,60	13,15	9,5	50,0	16,37

Gute Trockenelemente sind die beste konstante Stromquelle für elektrische Ströme unter $^1/_{1000}$ Amp. Das hier verwendete änderte sich während der ganzen Messungen innerhalb eines Jahres um nicht mehr als 1—2 Tausendstel seines Wertes und ist von der Temperatur fast unabhängig. Die elektromotorische Kraft der benutzten Thermoelemente wurde durch besondere Eichversuche ermittelt, bei denen die *Lötstellen unverändert in die Substanz eingepackt* waren; sie wurden auf die *gleichen Temperaturen* wie bei den *eigentlichen Versuchen* gebracht und bei *denselben Temperaturdifferenzen* geeicht. Auf andere Weise ist es, wie uns Versuche zeigten, kaum möglich, genügend zuverlässige Werte zu erhalten, da die thermoelektrischen Kräfte bei der geringsten Veränderung an der Lötstelle um einige Zehntel Prozent schwanken.

§ 5. Resultate.

Im folgenden sind zunächst drei Messungen an *Paraffin* (solid von Merck in Darmstadt, Schmelzpunkt 74°) herausgegriffen, um zu zeigen, daß die verschiedenen Messungen, bei denen die Blechkästen mehrmals geöffnet, auch Paraffin aufgegossen wurde, den Temperaturkoeffizient stets auf einige Prozent genau ergeben.

Versuch 2. Die Temperatur der drei Lötstellen waren:

$t_1 = 45{,}55, \quad t_2 = 30{,}05, \quad t_3 = 19{,}95;$
$t_1' = 12{,}80, \quad t_2' = 25{,}30, \quad t_3' = 36{,}55;$

woraus sich $\alpha = -0{,}0076$ berechnet.

Versuch 4.

$t_1 = 45{,}45, \quad t_2 = 29{,}85, \quad t_3 = 19{,}70;$
$t_1' = 12{,}70, \quad t_2' = 25{,}40, \quad t_3' = 86{,}45;$

woraus $\alpha = -0{,}0070.$

Versuch 5.

$t_1 = 44{,}80, \quad t_2 = 28{,}50, \quad t_3 = 18{,}45;$
$t_1' = 11{,}90, \quad t_2' = 24{,}45, \quad t_3' = 35{,}60;$

woraus $\alpha = -0{,}0075.$

Im Mittel aller Versuche war

$\alpha = -0{,}00756$ ($\pm 0{,}00025$) zwischen 10° und 45°.

Dies Resultat stimmt qualitativ mit dem aus Lees Kurve zu entnehmenden Wert $\alpha = -0{,}014$; der immerhin ziemlich große Unterschied erklärt sich aus der Schwierigkeit der von Lees angewandten indirekten Methode. Dagegen ist der Wert von R. H. Weber $\alpha = +0{,}061$ offenbar nur durch die großen systematischen Fehler der schwierigen indirekten Messung bedingt. Damit ist auch die einzige scheinbare Ausnahme von der Regel, daß der *Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung fester kristallinischer Isolatoren negativ ist*, beseitigt.

Wir konnten auch, da wir die Gesamtdicke des Paraffins genau, den Abstand der Thermoelemente $x_3 - x_1$ ziemlich gut messen konnten und da sich aus den Versuchen $x_2 - x_1 / x_3 - x_2$ sehr genau berechnen läßt, den *Temperatursprung: fließendes Wasser–Paraffin* berechnen. Wir fanden, daß derselbe *kleiner als 0,1°* sein muß, bei einem *Temperaturgefälle von etwa 4° pro Zentimeter im Paraffin.*

Ferner wurde an *Granit* vom Gotthardpaß, Banchi di Fibbia (Gotthardgranit, frisch, grobkörnig mit schwacher Bankung) der Temperaturkoeffizient gemessen. Der *Granit wurde mit Wasser durchtränkt*; das geschah aus *zwei Gründen:*

1. Alle Gesteine haben zahllose Risse und kapillare Räume zwischen den Gesteinsmineralien, deren Größe und Abstand sich mit der Temperatur ändert. Mißt man im trockenen Zustand, so ist das der Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit an Pulvern zu vergleichen. Man weiß nicht, inwieweit ein Unterschied bei verschiedener Temperatur der Substanz

selbst oder aber den Veränderungen der Risse und der Wärmeleitung der Luft in ihnen zuzuschreiben ist. Füllt man dagegen die Risse mit einer Flüssigkeit von annähernd ähnlicher Wärmeleitung (was für Wasser zutrifft) wie das Gestein, so mißt man in erster Linie diese letztere und deren Änderungen mit der Temperatur. Der Granit nimmt etwa 1—2 Proz. Wasser auf; man mißt also auf 1—2 Proz. genau, und zwar gerade die Wärmeleitfähigkeit bez. ihre Änderung *viel genauer*, als wenn man das trockene, stets von Rissen durchzogene Gestein nehmen würde.[1])

2. Für geophysikalische Anwendungen muß man den Temperaturkoeffizienten der Gesteine im *natürlichen* bergfeuchten Zustand kennen.

Sechs Versuche ergaben im Mittel:

$$\alpha = -0{,}00020 \text{ zwischen } 10^0 \text{ und } 45^0.$$

Wegen der Kleinheit des Koeffizienten ist sein Wert natürlich prozentisch nur ungenau bestimmbar; doch ist er jedenfalls sehr klein und negativ. Aus den Zahlen von Lord Kelvin und Murray ergibt sich etwa $\alpha = -0{,}001$, also 5 mal größer, was zum Teil auf geringere Genauigkeit der Methode, zum Teil auf die Risse im trockenen Granit zurückzuführen sein dürfte.

§ 6. Der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung von Isolatoren.

Dadurch, daß auch für Paraffin der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung *negativ*, nicht, wie früher angenommen positiv, ist, gilt dies jetzt allgemein für alle kristallinischen Isolatoren, von denen etwa 20, hauptsächlich von Lees, untersucht worden sind.[2]) Es seien im folgenden nur einige der besten neuesten Zahlen von Lees (Mittelwerte seiner Untersuchungen 1898 und 1905) angeführt, um die Größenordnung von α zu veranschaulichen.

1) Der Einwand von L. Graetz (Winkelmanns Handb. d. Physik: Wärme p. 498, Anm. 1. Leipzig 1906) scheint mir daher *nicht* zutreffend, sondern das Gegenteil der Fall zu sein.

2) Vgl. bei L. Graetz, l. c.

	α	t
Eis	−0,0013	−180° bis −50°
	−0,0014	− 50° bis −16°
Naphtalin . . .	−0,003	−148° bis 22°
Diphenylamin . .	−0,00062	−161° bis 2°
β-Naphtol . . .	−0,0005	−180° bis 50°
Schwefel	−0,0040	25° bis 60°

Der negative Temperaturkoeffizient gibt uns einen Anhaltspunkt für Hypothesen über die innere Wärmeleitung von Isolatoren und den Bruchteil der Wärmeleitung von metallisch leitenden Körpern, der wegen des Unterschiedes von der Konstante des Wiedemann-Franzschen Gesetzes nicht auf Elektronenleitung zurückzuführen ist.[1])

H. Schuster[2]) hat gezeigt, daß die Wärmeleitung eines Isolators wie Steinsalz nur zu 0,2 Proz. von der Strahlung beeinflußt werden kann. Doch ist in seiner Theorie von vornherein der Kosinussatz und im Verlauf der Rechnung das Stefansche Gesetz vernachlässigt worden; es läßt sich nicht übersehen, ob diese Vereinfachungen nicht das Resultat stark beeinflussen. — Da aber der Temperaturkoeffizient negativ ist, so läßt sich leicht beweisen, daß bei den Isolatoren die Strahlung nur einen sehr kleinen Anteil an der Wärmeleitung besitzen kann.

Da die Absorption a in erster Annäherung von der Temperatur unabhängig ist, so gilt für die zwischen zwei beliebig absorbierenden Elementen dv von der Temperaturdifferenz dT durch Strahlung ausgetauschte Wärmemenge angenähert

$$W = \sigma . T^3 dT . 4\pi . a . dv .$$[3])

Die Wärmemenge müßte also proportional T^3 zunehmen, der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung von kristallinischen Isolatoren positiv sein, was nicht der Fall ist.[4]) Demnach ist nur eine *kinetische Theorie möglich*, in der die Vorgänge im Molekül zunächst, soweit sie für die Wärmeleitung in Betracht kommen, nichts mit der elektromagnetischen Strahlung zu tun haben.

1) Physik. Zeitschr. 8. p. 237. 1907.

2) A. Schuster, Phil. Mag. (6) 5. p. 253. 1903.

3) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. 12. p. 350. 1903.

4) Daher scheinen uns die Überlegungen von Hrn. A. Einstein (Ann. d. Phys. 22. p. 180. 1907) nicht zwingend.

Würde man freie Bewegung annehmen, so müßte wie in der kinetischen Gastheorie das Wärmeleitungsvermögen proportional $\sqrt{T}$ zunehmen, also auch der Temperaturkoeffizient positiv sein. Wir gelangen also zu der von F. Richarz[1]) aufgestellten Theorie. Nur bei kleinen Schwingungen um eine Ruhelage kann die in der Zeiteinheit übertragene Energie um so kleiner sein, je kleiner prozentisch die Differenz der Schwingungsenergien benachbarter Energien ist. Die Energiemenge, der 1° Temperaturdifferenz entspricht, ist aber ein um so kleinerer Bruchteil der gesamten Energie, je höher die absolute Temperatur ist. Zur Aufstellung einer bestimmten kinetischen Theorie fester Körper dürfte indes das Beobachtungsmaterial, welches die Regel von Dulong und Petit und der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung ergibt, noch nicht hinreichen, zumal da der Widerspruch zwischen den Folgerungen aus den Annahmen von Richarz und denen der Elektronentheorie nicht genügend geklärt ist.[2])

§ 7. Erdwärme und radioaktive Substanzen.

Die Bestimmung des Temperaturkoeffizienten von feuchtem Granit vom Gotthardpaß ist nicht nur für diesen gültig, sondern auch für alle ähnlich zusammengesetzten Gesteine. In ihren physikalischen Eigenschaften unterscheiden sich die Silikatgesteine sehr wenig voneinander, weil ihre chemische Zusammensetzung und ihr spezifisches Gewicht auch nur wenig verschieden sind. Man kann daher den ermittelten Wert des Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung für Granit verwenden, um aus dem beobachteten den wahren Temperaturgradienten der Erde zu berechnen, und um zu prüfen, ob dieser mit dem aus der Abkühlungstheorie von Fourier-Poisson oder aus der Annahme wärmeerzeugender Substanzen gefolgerten Gradienten übereinstimmt. In erster Annäherung ist nämlich der direkt beobachtete Temperaturgradient $(\partial\vartheta/\partial r)_b$, falls die Wärmeleitfähigkeit λ von der Temperatur ϑ in der Weise abhängt, daß

$$\lambda = \lambda_0(1 + \alpha\vartheta),$$

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 708. 1892.

2) Vgl. M. Reinganum, Ann. d. Phys. 2. p. 401. 1900 u. A. Wigand, Physik. Zeitschr. 8. p. 344. 1907; vgl. auch H. A. Lorentz, Ber. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 237. 1907.

auf den aus der Gleichung von Fourier unter Annahme konstantem λ berechneten Temperaturgradienten $\partial\vartheta/\partial r$ pro cm zu reduzieren, indem man

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_b \cdot (1 + \alpha\vartheta)$$

bildet. In dem 2 km tiefen Bohrloch in Paruschowitz wurde eine Temperatur von 60° erreicht; der beobachtete Temperaturgradient war innerhalb der allerdings nicht unbeträchtlichen Beobachtungsfehler konstant. Also wäre $\partial\vartheta/\partial r$ in 2 km Tiefe, wo ϑ etwa gleich 60° ist,

$$= \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_b (1 - 0{,}0002 \cdot 60),$$

also um *ein Prozent kleiner als an der Oberfläche.* Die *Abkühlungstheorien* ergeben, wie eine leichte Rechnung zeigt, für 2 km Tiefe eine sehr geringe *Zunahme*: 0,3 Proz. Die Annahme, daß ein Teil der Wärme von der Oxydation des metallischen Erdinnern (Silicide, Ferride, Karbide etc.) herrührt und nicht von Wärmeproduktion in der ganzen Erde, würde eine sehr starke Zunahme von mehr als 3 Proz. ergeben, ist also jedenfalls ausgeschlossen.

Sind die in Paruschowitz angestellten Beobachtungen auf 1 Proz. genau, was uns aber noch nicht ganz sicher gestellt erscheint, so würde aus unserer Bestimmung von α sich ergeben, daß in den oberen Schichten der Erde eine Wärmeproduktion stattfindet, die einen nicht unerheblichen Bruchteil der gesamten Wärmeströmung betragen muß. Eine solche Wärmeproduktion ergibt sich aus der Annahme von Himstedt[1]), daß die in den Gesteinen vorhandenen radioaktiven Substanzen einen Teil der Erdwärme liefern. Die rechnerischen Folgerungen aus dieser Annahme sind von dem einen von uns dargelegt[2]), und neuerdings haben Elster und Geitel[3]) in einer umfassenden Schrift die Literatur und die experimentellen Grundlagen diskutiert. Wie schon Liebenow auf Grund der damals vorliegenden Messungen folgerte, und wie auch die Untersuchungen von Strutt an Urgesteinen aus allen Teilen der Erde ergeben haben, ist der Radiumgehalt so groß, daß er mehr Wärme liefern

1) F. Himstedt, Verh. Freib. nat. Ges. 14. p. 187. 1903.

2) Physik. Zeitschr. 7. p. 297. 1906.

3) J. Elster u. H. Geitel, Radioaktivität der Erdsubstanz und ihre mögliche Beziehung zur Erdwärme. Wolfenbüttel 1907.

würde, als die Erde fortleitet. Man muß daher — und das steht in Übereinstimmung mit der geringen Radioaktivität der Laven und Fumarolenprodukte — annehmen, daß der Radiumgehalt im Innern der Erde geringer ist. Setzen wir ihn einer beliebigen Potenz n des Erdradius proportional, so folgt[1]), daß

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -0{,}0003 \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} = -0{,}0003 \left(1 - (n+1)\frac{x}{R}\right),$$

wo x den Abstand von der Erdoberfläche, R den Erdradius bezeichnet. Aus den Beobachtungen in Parnschowitz und unserer Messung von α würde sich n etwa gleich 30 ergeben. Der Gehalt an Radium in 10 km Tiefe wäre also um 5 Proz. kleiner als an der Erdoberfläche; die vom Radium gelieferte Wärmemenge wäre nicht mehr zu groß, sondern würde nur einen Bruchteil der gesamten Wärmeströmung betragen. Ein Teil *des Wärmestromes der Erde wäre also jetzt widerspruchsfrei durch die von radioaktiven Substanzen entwickelte Wärme zu erklären.*

Zusammenfassung.

1. Die direkte Methode zur Bestimmung der Abhängigkeit der Konstanten der Differentialgleichung von Fourier von der abhängigen Variablen wurde ausgearbeitet und experimentell auf die Wärmeleitung angewandt. Die Methode ist frei von systematischen Fehlern und hat gut übereinstimmende Resultate ergeben.

2. Es wurde festgestellt, daß Paraffin einen negativen Temperaturkoeffizienten hat. Somit hat der Satz, daß *feste kristallinische Isolatoren einen negativen Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung besitzen*, keine Ausnahme mehr. Das spricht, wie dargelegt, für die Richtigkeit der von Richarz aufgestellten Hypothese der Schwingungen der Moleküle fester Körper.

3. Der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung des Granits weist in Zusammenhang mit den Beobachtungen des Temperaturgradienten in Bohrlöchern auf wärmeproduzierende radioaktive Substanzen der äußeren Schichten der Erde.

Freiburg i. B., Physikal. Institut.

1) Physik. Zeitschr. 7. p. 297. 1906.

(Eingegangen 6. Juni 1907.)

6. *Über Reflexion und Absorption von β-Strahlen;* *von Heinrich Willy Schmidt.*

Theoretische Überlegungen.

Wenn homogene β-Strahlen von der Intensität J_0 eine Platte von der Dicke d durchsetzen, so läßt sich die hindurchgegangene Energie J_d ausdrücken durch:

$$J_d = J_0 \cdot e^{-\nu d}, \tag{1}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und ν eine der betreffenden Strahlenart und dem Plattenmaterial eigentümliche Konstante bedeutet. Man bezeichnet ν allgemein als Absorptionskoeffizienten.

ν kann, wie aus neueren Beobachtungen des Verfassers mit β-Strahlen von Ra *E* hervorgeht[1]), nur innerhalb gewisser Grenzen als konstant angesehen werden. Mit wachsender Plattendicke nimmt ν zu. Diese Zunahme der Absorption ist auf verschiedene Weise zu erklären. Entweder nimmt die Geschwindigkeit der Strahlen und damit die Durchdringungsfähigkeit mit wachsender Filterdicke ab, oder zu der reinen Absorption, d. h. der Vernichtung von Strahlungsenergie, kommt noch ein weiterer Einfluß der durchstrahlten Materie auf die bewegten Elektrizitätsteilchen hinzu.

Daß z. B. β-Strahlen beim Durchgang durch Materie zerstreut werden, ist ebenfalls vom Verfasser nachgewiesen worden. Bei einer Streuung werden aber die beeinflußten Teilchen nicht nur in einem spitzen Winkel zur ursprünglichen Richtung weiter fliegen; vielmehr wird sich ein Teil der zerstreuten Strahlen den ankommenden Teilchen direkt entgegen bewegen, d. h. es wird eine „Reflexion" der Strahlen stattfinden.

Wenn eine derartige Reflexion vorhanden ist, wird die nach Gleichung (1) bestimmte Größe ν gar kein Maß für die wirklich vernichtete ursprüngliche Strahlungsenergie sein; denn

1) H. W. Schmidt, Physik. Zeitschr. 8. p. 361. 1907.

von der in einer bestimmten Richtung fortschreitenden Strahlung wird nur ein Teil durch Absorption vernichtet, während ein anderer Teil durch Reflexion bez. Streuung aus der geraden Richtung abgelenkt wird und deshalb bei der gewählten Versuchsanordnung nicht gemessen werden kann.

Mc Clelland[1]) hat zuerst darauf hingewiesen, daß ε nicht der „wahre Absorptionskoeffizient" ist. Er ging bei seinen theoretischen Überlegungen von der Annahme aus, daß in jedem Volumelement eine der absorbierten Strahlung proportionale Sekundärstrahlung[2]) erzeugt wird. Die Sekundärstrahlen werden in genau derselben Weise beeinflußt wie die Primärstrahlen; es wird also in jedem Volumelement ein bestimmter Prozentsatz davon absorbiert und eine der absorbierenden Menge proportionale Tertiärstrahlung erzeugt. Auch die tertiären und alle weiterhin erzeugten Strahlen sollen sich genau so wie die Primärstrahlen verhalten. Wenn nun die Strahlung R_0 senkrecht auf die Oberfläche A der Platte von der Dicke AB auffällt (vgl. Fig. 1), so gilt nach Mc Clelland für die pro Flächeneinheit herabströmende Energie R:

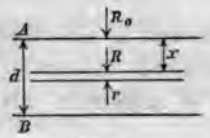


Fig. 1.

$$\frac{dR}{dx} = -\mu R + \frac{\mu k}{2} R + \frac{\mu k}{2} r, \tag{2}$$

und für die heraufströmende Energie:

$$-\frac{dr}{dx} = -\mu r + \frac{\mu k}{2} r + \frac{\mu k}{2} R. \tag{3}$$

Hier bedeutet μ den „wahren Absorptionskoeffizienten", also den Absorptionskoeffizienten, wenn keine Sekundärstrahlung vorhanden wäre, und k das Verhältnis der in der Schicht dx entstehenden Sekundärstrahlenergie zu der in derselben Schicht absorbierten Primärstrahlenergie.

---

1) J. A. Mc Clelland, Dubl. Trans. (2) 9. p. 9. 1906; Beibl. 30. p. 894. 1906; J. A. Mc Clelland u. F. E. Hackett, Dubl. Trans. (2) 9. p. 37—50. 1907.

2) Ob man eine „Sekundärstrahlung" oder eine „zerstreute Primärstrahlung" annimmt, ist formal gleichgültig. Prinzipiell sind natürlich die beiden Annahmen grundverschieden. Eine genaue Definition von Primär- und Sekundärstrahlung habe ich in meiner bereits zitierten Arbeit „Einige Versuche mit β-Strahlen von Ra E", Physik. Zeitschr. 8. p. 361. 1907, gegeben.

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichungen (2) und (3) ist ein Maß für die absorbierte Energie; das zweite drückt aus, daß das k-fache der absorbierten Energie als Sekundärstrahlung wieder frei wird, von der sich angenähert die eine Hälfte nach oben, die andere nach unten fortpflanzt. Das dritte Glied rührt daher, daß in der betrachteten Schicht die Menge μr der aufwärts fließenden Energie absorbiert wird und davon die Menge $(\mu k/2).r$ als Sekundärstrahlung nach unten geht.

Aus den Differentialgleichungen (2) und (3) sind bei gegebenen Grenzbedingungen R und r als Funktionen der Tiefe x unter der Oberfläche zu erhalten. Die Lösung eines derartigen Problems hat jedoch wenig praktisches Interesse, da wir eine Beziehung für Größen erhalten, die der direkten Messung nicht zugänglich sind. Dagegen interessiert uns die Frage, wie groß die durch die Platte AB hindurchgelassene Primärstrahlung und die von der Platte nach oben gehende Sekundärstrahlung ist und wie diese beiden Größen eben von der Dicke AB abhängen. Die Lösung dieses theoretischen Problems, in dem nicht die Tiefe x unter der Oberfläche, sondern die Dicke AB als unabhängige Variable auftritt, gestattet einen direkten Vergleich mit dem Experiment.

Um zu einem hier gültigen mathematischen Ansatz zu kommen, machen wir folgende Annahmen:

1. In der Schicht dx wird von der hindurchgehenden Strahlung i die Menge $\alpha.i.dx$ absorbiert, d. h. in eine andere Energieform umgesetzt, und

2. die Menge $\beta.i.dx$ reflektiert, d. h. in entgegengesetzter Richtung mit der gleichen Geschwindigkeit zurückgeworfen.

3. α und β sind Konstante, die einer bestimmten Strahlenart und einem bestimmten Material charakteristisch sind.

4. Die reflektierte Strahlung verhält sich in bezug auf Absorption und Reflexion genau so wie die primäre Strahlung.

5. Oberflächeneffekte sind nicht vorhanden: wir haben nur „Volumreflexionen“ vor uns.

6. Ebenfalls ist eine eigentliche Sekundärstrahlung nicht vorhanden; zu den primären β-Teilchen kommen also neue, aus der durchstrahlten Materie stammende Elektronen nicht hinzu, oder sie haben, wenn sie wirklich entstehen, eine so

geringe Geschwindigkeit, daß ihre ionisierende Wirkung zu vernachlässigen ist.

7. Von einer Streuung der Strahlung wird abgesehen; es wird also nur eine senkrecht zur Plattenoberfläche nach unten und oben gehende Strahlung angenommen.

Während die meisten dieser Annahmen höchstwahrscheinlich ganz allgemeine Gültigkeit haben und sich den wirklichen Verhältnissen gut anpassen, sind die Annahmen, daß keine Streuung stattfindet und die reflektierten Strahlen in der gleichen Richtung zurückgehen, nur gemacht, um das Problem rechnerisch verfolgen zu können. In Wirklichkeit wird die Streuung einen großen Einfluß haben und überhaupt von der Reflexion nicht zu trennen sein. Denn von einem Parallelstrahlenbündel wird nur ein verhältnismäßig kleiner Teil in derselben Richtung weitergehen und der größte Teil aus der ursprünglichen Richtung durch Kräfte abgelenkt werden, die zwischen den β-Teilchen und den Atomen, bez. den an diesen haftenden Elektronen wirken.

Wie groß ist nun unter den gemachten Voraussetzungen die durchgelassene und reflektierte Strahlungsenergie? Diese Aufgabe hat große Ähnlichkeit mit einer aus der Optik bekannten Aufgabe, nämlich die von einem System gleicher paralleler Platten — etwa einer Glassäule — durchgelassene und reflektierte Intensität zu bestimmen unter Berücksichtigung der unendlich vielen, an jeder Trennungsfläche stattfindenden Reflexionen und Brechungen. Nur haben wir bei unserem elektrischen Problem keine Oberflächenreflexion, sondern eine Volumreflexion.

Das optische Problem ist von F. Neumann[1]) und G. G. Stokes[2]) behandelt worden. Stokes hat Absorption des Lichtes durch die Platten in Betracht gezogen, während Neumann von einer Absorption absieht.

Wir gelangen nach dem Vorgange von F. Neumann am einfachsten zu einem mathematischen Ansatz durch einen Schluß von einer Platte von der Dicke x auf eine Platte von der Dicke $x + dx$.

---

1) F. Neumann, Vorles. über theoret. Optik p. 147. Leipzig 1885.
2) G. G. Stokes, Phil. Mag. (4) 24. p. 480. 1862.

Wenn durch eine Platte von der Dicke x von der einfallenden Intensität 1 der Betrag ϱ reflektiert und δ durchgelassen wird, so kommt nach Hinzufügen einer weiteren Platte von der Dicke dx die aus der schematischen Fig. 2 hervorgehende Intensitätsverteilung zustande. Dabei ist angenommen, daß durch die Platte von der Dicke dx von der einfallenden Intensität 1 der Betrag r reflektiert und d durchgelassen wird.

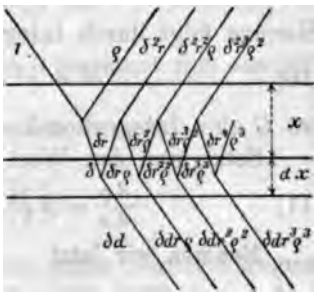


Fig. 2.

Im ganzen wird also reflektiert:

$$(4)\quad \varrho_{x+dx} = \varrho + \delta^2 r(1 + r.\varrho + r^2.\varrho^2 + r^3\varrho^3 \ldots) = \varrho + \frac{\delta^2 r}{1 - r.\varrho},$$

und durchgelassen:

$$(5)\quad \delta_{x+dx} = \delta d(1 + r.\varrho + r^2\varrho^2 + r^3\varrho^3 \ldots) = \frac{\delta d}{1 - r\varrho}.$$

Wir setzen nach unserer Annahme 2:

$$(6)\quad r = \beta.dx.$$

Dann wird also in der Schicht dx von der einfallenden Intensität 1 der Betrag $\beta.dx$ reflektiert und der Betrag $(1-\beta.dx)$ durchgelassen. Davon soll nach Annahme 1 absorbiert werden:

$$(1 - \beta.dx)\alpha.dx = \alpha.dx.$$

Es tritt also unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung aus der Schicht dx heraus:

$$(7)\quad d = 1 - (\alpha + \beta)dx.$$

Setzt man die Werte von r und d aus (6) und (7) in (4) und (5) ein, so wird:

$$\varrho_{x+dx} = \varrho + \frac{\delta^2.\beta.dx}{1 - \varrho.\beta.dx} \quad \text{und} \quad \delta_{x+dx} = \delta\frac{1 - (\alpha+\beta)dx}{1 - \varrho\beta dx},$$

also:

$$(8)\quad \frac{\varrho_{x+dx} - \varrho_x}{dx} = \frac{d\varrho}{dx} = \beta\delta^2$$

und

$$(9)\quad \frac{\delta_{x+dx} - \delta_x}{dx} = \frac{d\delta}{dx} = -(\alpha+\beta)\delta + \beta.\delta.\varrho.$$

Die Differentialgleichungen (8) und (9) sind zu integrieren. Multipliziert man (9) mit 2δ, so erhält man:

$$\frac{d\delta^2}{dx} = 2\delta^2(\beta\varrho - \alpha - \beta),$$

oder nach (8):

$$\frac{d\delta^2}{dx} = \frac{d\varrho^2}{dx} - \frac{2(\alpha+\beta)}{\beta}\frac{d\varrho}{dx}.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\delta^2 = \varrho^2 - \frac{2(\alpha+\beta)}{\beta}\cdot\varrho + C, \tag{10}$$

wo C eine Integrationskonstante bedeutet.

Setzt man den Wert von δ^2 aus (10) in (8) ein, so wird

$$\frac{d\varrho}{dx} = \beta\varrho^2 - 2(\alpha+\beta)\varrho + C.\beta. \tag{11}$$

Nehmen wir jetzt

$$\varrho = z + p,$$

wo p eine Konstante bedeutet, so folgt:

$$\frac{dz}{dx} = \beta z^2 + 2p\beta z + p^2\beta - 2(\alpha+\beta)z - 2(\alpha+\beta)p + C.\beta. \tag{12}$$

Führen wir für p die Bedingung ein:

$$\beta.p^2 - 2(\alpha+\beta)p + C.\beta = 0, \tag{13}$$

so wird aus (12):

$$\frac{dz}{dx} + 2\mu z = \beta z^2, \tag{14}$$

wo

$$\mu = \alpha + \beta - p\beta \tag{15}$$

gesetzt ist. — Das Integral von (14) ist:

$$\frac{1}{z}e^{-2\mu x} = N - \beta\int e^{-2\mu x}dx = N + \frac{\beta.e^{-2\mu x}}{2\mu},$$

oder:

$$z = \frac{2\mu e^{-2\mu x}}{2N\mu + \beta.e^{-2\mu x}}, \tag{16}$$

wo N die zweite von den Grenzbedingungen abhängige Konstante bedeutet.

Setzt man jetzt wieder $z = \varrho - p$, so wird aus (16):

$$\varrho = \frac{(2\mu + p\beta)e^{-2\mu x} + 2N\mu.p}{2N\mu + \beta.e^{-2\mu x}} = \frac{\beta C.e^{-2\mu x} + 2N\mu p^2}{2N\mu p + \beta p.e^{-2\mu x}}, \tag{17}$$

weil nach (13) und (15) ist:

$$2(\alpha+\beta) - p\beta = \frac{C.\beta}{p} = 2\mu + p.\beta. \tag{18}$$

Die Konstante N in (17) bestimmt sich aus der Bedingung, daß für $x = 0$ auch $\varrho = 0$ werden muß. Also:

$$N = -\frac{C.\beta}{2\mu p^2}.$$

Dann wird aus (17):

$$\varrho = \frac{p(1 - e^{-2\mu x})}{1 - \frac{p^2}{C} \cdot e^{-2\mu x}}. \tag{19}$$

Die andere Integrationskonstante C bestimmt sich aus (10): für $\varrho = 0$ wird $\delta = 1$; also:

$$C = 1 \tag{20}$$

und aus (19)

$$\varrho = \frac{p(1 - e^{-2\mu x})}{1 - p^2 e^{-2\mu x}}. \tag{21}$$

Setzt man jetzt (21) in (10) ein unter Berücksichtigung der Bedingungen für C, p und μ ((20), (13), (15)), so wird:

$$\delta = \frac{e^{-\mu x}}{1 - p^2 \cdot e^{-2\mu x}} \cdot (1 - p^2). \tag{22}$$

Die in den Gleichungen (21) und (22) vorkommenden Konstanten μ und p sind experimentell leicht zu ermitteln. Für $x = \infty$ wird aus (21)

$$\varrho = p. \tag{23}$$

p ist also der Teil der einfallenden Strahlungsintensität, der von einer sehr dicken Platte reflektiert wird.[1]) — Da p stets kleiner ist als 1, kann für große x in (22) $p^2 \cdot e^{-2\mu x}$ gegen 1 vernachlässigt werden. Dann wird:

$$\delta = (1 - p^2) e^{-\mu x}. \tag{24}$$

Für große x klingt also δ nach einem reinen Exponentialgesetz ab, d. h. μ in Gleichung (24) ist für große x mit der Konstanten ν der Gleichung (1) identisch. *μ ist also die bisher als Absorptionskoeffizient bezeichnete Konstante.*

Wenn p und μ bekannt, so berechnet sich der „wahre Absorptionskoeffizient“ α und der „Reflexionskoeffizient“ β nach Gleichung (18) zu:

$$\alpha = \mu \cdot \frac{1 - p}{1 + p} \quad \text{und} \quad \beta = 2\mu \cdot \frac{p}{1 - p^2}. \tag{25}$$

Experimenteller Teil.

Um die Formeln (21) und (22) zu prüfen, wurde als β-Strahler Uran X verwandt. Es war nach der Moore-

1) Hierfür gebraucht Mc Clelland (l. c.) ebenfalls die Bezeichnung p.

Schlundtschen Methode durch Fällen mit Eisenhydroxyd aus einer Lösung von Urannitrat in Aceton gewonnen.[1]) Das Eisenhydroxyd war nach dem Eintrocknen mit etwas Kopallack und Chloroform zu einer breiigen Masse angerührt worden und in dünner Schicht mit einem Pinsel auf eine Aluminiumplatte von 0,095 mm Dicke aufgetragen. Die aktive Masse bedeckte eine Kreisfläche von 8 cm Durchmesser und haftete auf der Unterlage verhältnismäßig gut an.

Die mit Uran X bedeckte Platte wurde auf das Zerstreuungsgefäß eines früher beschriebenen Blattelektrometers gelegt.[2]) Bei den Absorptionsmessungen wurde das absorbierende Material in dünnen Platten zwischen die aktivierte Seite der Al-Platte und das oben offene Zerstreuungsgefäß geschoben. Die jedesmal durchgelassene Strahlung δ war dann der Wanderungsgeschwindigkeit des Blättchens proportional.

Bei den Reflexionsmessungen wurde die nach oben gewandte aktive Seite mit dem zu untersuchenden Material bedeckt und der reflektierte Teil der Strahlung aus dem Zuwachs der Zerstreuung im Elektrometer bestimmt. Da die aktive Materie nach allen Seiten gleichmäßig strahlt, also gleichviel Teilchen nach unten und oben geschleudert werden, so ist:

$$\varrho = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta}, \tag{26}$$

wo δ_1 und δ die im Elektrometer gemessene Strahlung bedeutet, wenn die reflektierende Platte aufgelegt oder weggenommen ist. Diese äußerst einfache Methode hat freilich den Nachteil jeder Differenzmethode, daß der wahrscheinliche prozentuale Fehler bei der Differenz größer ist als bei den ursprünglichen Messungen. Da sich diese jedoch mit großer Genauigkeit ausführen ließen und die Differenzen relativ groß waren, dürften die Fehler in den Differenzen kaum 1 Proz. übersteigen.

Der β-Strahler wurde deshalb in flächenförmiger Verteilung angewandt, um von einer Streuung der Strahlen möglichst absehen zu können. Von jedem Punkt der aktiven Fläche

1) R. B. Moore u. H. Schlundt, Phil. Mag. (6) 12. p. 393. 1906.
2) H. W. Schmidt, Physik. Zeitschr. 6. p. 561. 1905.

gehen nämlich Strahlen nach allen Richtungen aus. Es wird also ein Verlust, den die in einer bestimmten Richtung fortschreitenden Strahlen durch Streuung erleiden, ganz oder wenigstens zum größten Teil aufgehoben werden durch den Zuwachs von Strahlen, die durch Streuung aus einer beliebigen in die „bestimmte" Richtung abgelenkt sind.

Wenn wir deshalb berechtigt sind, von einer Streuung der Strahlen abzusehen, so müssen wir andererseits berücksichtigen, daß wir es bei der gewählten Anordnung nicht mit Parallelstrahlen, sondern mit Strahlen aller möglichen Richtung zu tun haben. Denn wir sind ursprünglich bei unseren theoretischen Entwickelungen von Parallelstrahlen ausgegangen und haben nur von einer nach unten und oben gehenden Richtung gesprochen. In Wirklichkeit sind aber alle Richtungen im Raume gleichmäßig vertreten. Wir können dieser Tatsache insofern gerecht werden, wenn wir die früher definierten Größen α und β, d. h. den Absorptions- und Reflexionskoeffizienten, nicht auf Parallelstrahlen beziehen, sondern auf ein Strahlenbündel, in dem alle Richtungen gleichmäßig verteilt sind. Wir werden auf diesen Punkt noch später zu sprechen kommen (p. 688).

Die Reflexion und Absorption wurde für eine Anzahl von Metallen bestimmt, die genügend rein und in dünnen Schichten

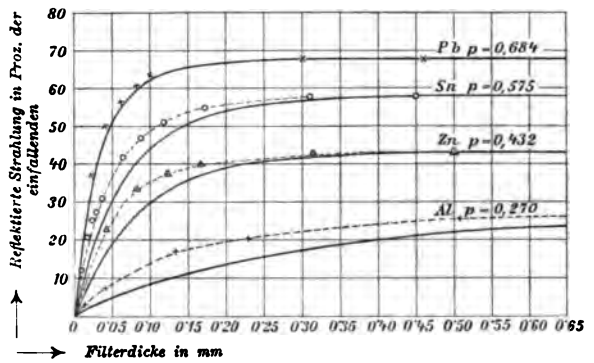


Fig. 8.

zu erhalten waren. Bei einigen Metallen, die in gleichmäßigen, sehr dünnen Blättchen zur Verfügung standen, war es möglich, die Formeln (21) und (22) einer genauen experimentellen Prüfung

zu unterwerfen. Die Resultate für die reflektierte Strahlung sind in Fig. 3, die für die durchgelassene Strahlung in Figg. 4 und 5 zusammengestellt. In Fig. 4 ist die Abszisse bei jedem einzelnen Versuch so gewählt, daß die anfängliche Neigung für alle Kurven ungefähr gleich groß ist. Bei dieser Einteilung ist die jedem Metall charakteristische Kurve am besten zu erkennen.

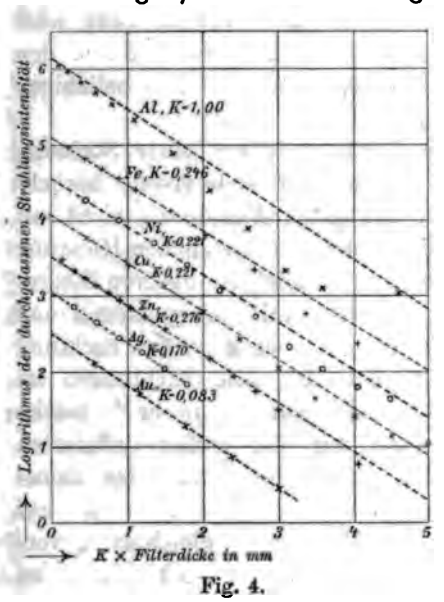


Fig. 4.

Aus Fig. 3 geht hervor, daß die reflektierte Strahlung mit zunehmender Filterdicke ansteigt und sich rasch einem Grenzwert nähert, aus Figg. 4 und 5, daß die durchgelassene Strahlung sich innerhalb bestimmter Grenzen durch ein einfaches Exponentialgesetz darstellen läßt. Betrachtet man freilich größere Intervalle, so ist deutlich zu

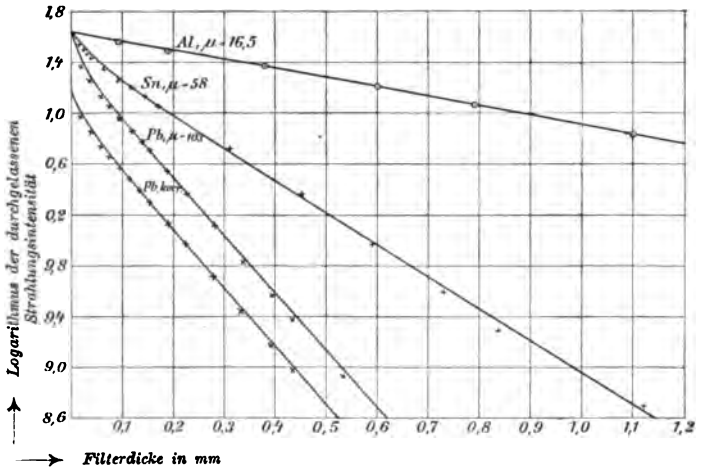


Fig. 5.

erkennen, daß mit zunehmender Filterdicke bei sämtlichen Metallen die Neigung der im logarithmischen Maßstab gezeichneten Kurven gegen die Abszissenachse zunimmt.[1]) Diese Zunahme ist bei den leichteren Metallen mehr ausgeprägt als bei den schweren. Die Kurven für Blei und Zinn — und überhaupt für alle schwereren Metalle — fallen außerdem bei sehr kleinen Filterdicken steiler ab, als es dem Exponentialgesetz bei größeren Filterdicken entspricht. Dieser anfängliche steile Abfall wurde bereits von Crowther[2]) bei Metallen mit hohem Atomgewicht festgestellt und durch das Vorhandensein einer Sekundärstrahlung gedeutet.

Vergleichen wir diese Resultate mit den theoretischen Entwickelungen, so ist anzunehmen, daß der aus Fig. 3 folgende Grenzwert für die reflektierte Strahlung mit der Größe p in Gleichung (23) identisch ist. Dagegen können wir aus den Neigungen der Kurven in Figg. 4 und 5 die Größe μ der Gleichung (24) nicht ohne weiteres ersehen. Denn aus Gleichung (24) folgt Konstanz von μ für dicke Filter. Eine solche Konstanz ist tatsächlich nicht vorhanden. Um nun die Gleichungen (21) und (22) numerisch auswerten zu können, ist μ aus der Neigung der logarithmischen Kurve für kleine Filterdicken berechnet, bez. für die Metalle, bei denen ein anfänglich steilerer Abfall der Kurve vorhanden ist, aus den Stellen der Kurve, wo sich dieser steilere Abfall nicht mehr bemerkbar macht.

Bei dieser Festsetzung bleibt dem Beobachter ein gewisser Spielraum in der Bestimmung von μ. Denn wenn man nur wenig Punkte der experimentell festgelegten Kurve benutzt, so wird μ kleiner ausfallen, d. h. die Exponentialkurve flacher verlaufen, als bei Benutzung von mehr Punkten. Namentlich bei schwach absorbierenden Metallen macht sich die Krümmung der Kurven in Fig. 4 schon bei verhältnismäßig kleinen Intensitätsverminderungen bemerkbar. Man ist dann bei einer graphischen Auswertung von μ leicht versucht, eine Exponential-

1) Für noch größere Filterdicken ($K \times$ Filterdicke größer als 4 mm, vgl. Fig. 4) nimmt die Neigung der Kurve wieder ab: es macht sich die von Uran X ausgehende γ-Strahlung bemerkbar. Die Intensität der γ-Strahlen ist fast genau 0,001 der Intensität der β-Strahlen.

2) J. A. Crowther, Phil. Mag. (6) 12. p. 379. 1906.

kurve zu zeichnen, die sich der gesamten Kurve und nicht gerade den Anfangswerten gut anschließt. Und wenn man nur die Anfangswerte berücksichtigt, so machen sich die Ungenauigkeiten der einzelnen nur wenig verschiedenen Intensitätsbestimmungen störend bemerkbar.

Die Genauigkeit, mit der sich die maximale reflektierte Strahlung p angeben läßt, ist bedeutend größer als für den Koeffizienten μ. Es wurden verschiedene Beobachtungen mit denselben Metallen in einem Zwischenraum von drei Wochen gemacht, in denen die Intensität der β-Strahlen auf die Hälfte des Anfangswertes gesunken war. Die Unterschiede in den einzelnen Beobachtungen wichen im Maximalfall um 0,008 vom jeweiligen Mittelwert ab. (0,008 ist in denselben Einheiten gemessen wie p; Einheit ist also die direkte Strahlung).

Bei der numerischen Auswertung der Gleichungen (21) und (22) sind folgende Werte zugrunde gelegt:

Für Aluminium	$\mu = 16{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$	$p = 0{,}270$
„ Zink	52,5 „	0,432
„ Zinn	58 „	0,575
„ Blei	103 „	0,684

Die so nach Gleichungen (21) und (22) berechneten Kurven sind in unseren Figg. 3 und 5 eingetragen. Wir ersehen hieraus, daß die experimentellen und theoretischen Kurven im allgemeinen denselben Charakter haben, daß sie aber nicht zur völligen Deckung kommen. Die experimentell gefundenen Kurven für die reflektierte Strahlung steigen steiler an, als die theoretischen. Am geringsten ist der Unterschied bei Blei, am größten bei Aluminium.[1])

Bei den theoretischen Kurven für die durchgelassene Strahlung ist die anfängliche Abweichung vom Exponentialgesetz noch ausgeprägter als bei den experimentell gefundenen. Dieser anfängliche steile Abfall macht sich, wie eine nume-

1) Bei Al ist in Fig. 4 für die eingezeichnete Exponentialkurve $\mu = 15$, in Fig. 5 $\mu = 16{,}5$ gewählt. Obwohl sich diese Kurve der experimentell gefundenen Kurve in ihrem gesamten Verlauf besser anschließt, hat der Wert $\mu = 15$ größere Berechtigung, da er eben aus den Anfangswerten der experimentellen Kurve berechnet ist. In Tab. 2 ist deshalb $\mu = 15$ gesetzt. — In Fig. 3 ist es kaum zu unterscheiden, ob man zur Berechnung der reflektierten Strahlung $\mu = 16{,}5$ oder $\mu = 15$ zugrunde legt.

rische Berechnung von (22) ergibt, nur bei großem $p\,(p > 0{,}5)$ deutlich bemerkbar. Bei kleinem p, z. B. beim Aluminium $p = 0{,}27$, ist die berechnete Kurve kaum von einer reinen Exponentialkurve zu unterscheiden. Das stimmt völlig mit dem Experiment. Für bestimmte Filterdicken kommt bei allen Stoffen die theoretische und experimentelle Kurve zur Deckung; bei größeren Filterdicken muß die experimentelle Kurve steiler abfallen, als die theoretische, da wir eben bei unserer Berechnung von der experimentellen Kurve bei kleinen Filterdicken ausgegangen sind.

Es fragt sich jetzt, ob diese Unterschiede zwischen Theorie und Experiment durch Mängel in der gewählten Versuchsanordnung oder durch falsche Annahmen bei der Aufstellung der Differentialgleichungen bedingt sind.

Wir haben unsere sämtlichen Versuche mit einer dünnen Aluminiumplatte gemacht, die mit der aktiven Materie bedeckt war. Von dieser Platte und der Schicht aktiver Materie wird eine reflektierte Strahlung ausgehen. Den Einfluß dieser Strahlung dürfen wir nicht vernachlässigen. Bezeichnen wir nämlich mit dem Index u die unter der aktiven Schicht, mit dem Index 0 die über der aktiven Schicht liegende Platte, mit ϱ_u, ϱ_0 und δ_u, δ_0 die von jeder Platte reflektierte und durchgelassene Strahlung, so erhält man (vgl. Fig. 6) aus ähnlichen Gründen, wie bei Gleichung (5), für die gesamte nach unten gehende Strahlung (die also mit dem Elektrometer gemessen wird):

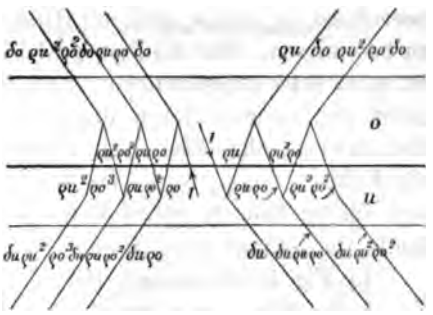


Fig. 6.

$$(27)\qquad \begin{cases} \delta = \delta_u(1 + \varrho_u \cdot \varrho_0 + \varrho_u^2 \cdot \varrho_0^2 + \ldots) \\ \quad + \delta_u \varrho_0 (1 + \varrho_u \cdot \varrho_0 + \varrho_u^2 \cdot \varrho_0^2 + \ldots) \\ \quad = \delta_u \dfrac{1 + \varrho_0}{1 - \varrho_u \cdot \varrho_0}. \end{cases}$$

Da ϱ_u und ϱ_0 stets positiv sind, ist der zweite Faktor

in (27) größer als 1, d. h. die wirklich gemessene durchgelassene Strahlung δ ist stets größer als die nach Gleichung (22) berechnete δ_u. Für $\varrho_0 = 0$, d. h. für eine unendlich dünne obere Platte, wird:

$$\delta = \delta_u,$$

wie eigentlich selbstverständlich ist. Für konstantes ϱ_0 wächst δ mit wachsendem ϱ_u, d. h. mit wachsender Dicke der unteren Platte. Wenn also die nach relativem Maß, nach Theorie und Experiment gezeichneten Kurven für den Nullpunkt zur Deckung gebracht sind, so müssen mit wachsender Filterdicke die theoretischen Kurven immer weiter unter die experimentellen zu liegen kommen und ihnen von einer bestimmten Filterdicke an parallel laufen. Das haben wir in Fig. 5 tatsächlich gefunden, nur haben wir dort die Werte für größere Filterdicken zur Deckung gebracht, so daß also die experimentelle Kurve anfänglich unter die theoretische zu liegen kommt.

Falls δ_u, ϱ_u und ϱ_0 bekannt, können wir δ aus Gleichung (27) berechnen. δ_u und ϱ_u sind mit Hilfe von Gleichungen (22) und (21) zu bestimmen. Für die dünne Al-Platte mit der aktiven Materie ist $\varrho_0 = 0{,}15$ angenommen. Den genauen Wert brauchen wir nicht zu kennen. Denn das Glied $1 + \varrho_0$ in (27) ist für die Relativwerte ohne Bedeutung; ϱ_0 kommt außerdem in (27) nur als Faktor von ϱ_u vor. Da nun ϱ_u im Maximalfall 0,7 wird (vgl. später Tab. 2), gehen Veränderungen von ϱ_0 in der zweiten Stelle im Nenner von (27) erst in der dritten Stelle ein.

In Fig. 5 ist die mit Hilfe von Gleichung (27) korrigierte Kurve für Blei etwas unterhalb der nicht korrigierten, direkt aus Gleichung (22) berechneten Kurve eingezeichnet. Man sieht, daß die theoretischen und experimentellen Werte jetzt fast zur völligen Deckung kommen.[1])

Der Einfluß der mit der aktiven Materie bedeckten Al-Platte muß sich auch bei Bestimmung der reflektierten Strahlung ϱ bemerkbar machen. Diese erhielten wir aus (26) zu:

$$\varrho = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta}.$$

1) Die Übereinstimmung wird noch etwas besser, wenn man für ϱ_u nicht die aus (21) berechneten, sondern die experimentell gefundenen Werte einsetzt. Bei dem etwas zu kleinen Maßstab der Fig. 5 kommen die Unterschiede in den berechneten Kurven kaum zur Geltung.

Setzt man jetzt für δ_1 und δ die aus (27) folgenden Werte ein, in denen die Reflexion ϱ_u der unten befindlichen Al-Platte berücksichtigt ist, so wird:

$$\varrho = \frac{1}{\delta_u}\left(\delta_u \frac{1+\varrho_0}{1-\varrho_u\varrho_0} - \delta_u\right) = \varrho_0 \frac{1+\varrho_u}{1-\varrho_u\varrho_0}. \tag{28}$$

Wir wollen uns zunächst an unsere Versuchsbedingungen anlehnen, also ϱ_u, die Reflexion der unten befindlichen Al-Platte, als konstant ansehen. Dann folgt aus Analogieschlüssen mit (27), daß die experimentell ermittelte reflektierte Strahlung ϱ stets größer ist, als die theoretische aus Gleichung (21) berechnete ϱ_0. Nun kann man aus dem bekannten $\varrho_u = 0{,}15$ und dem experimentell gefundenen Grenzwert $\varrho = p$ (vgl. Gleichung (23)) den Grenzwert $\varrho_0 = p_0$ berechnen. Mit Hilfe dieses Grenzwertes bestimmt sich aus Gleichung (21) ϱ_0 für verschiedene Filterdicken und nach Einsetzen von ϱ_0 in (27) ϱ selbst. Eine derartige Berechnung ist in Tab. 1 durchgeführt.

Tabelle 1.

Reflektierte Strahlung von Al ohne und mit Berücksichtigung der aktivierten Platte.

Filterdicke in mm	$\varrho_u = 0$; $p = p_0 = 0{,}27$	$\varrho_u = 0{,}15$, $p = 0{,}27$, $p_0 = 0{,}227$	
	$\varrho = \varrho_0$	ϱ_0	ϱ
0,01	0,0096	0,0079	0,0091
0,03	0,0271	0,0223	0,0258
0,05	0,0433	0,0361	0,0418
0,1	0,0795	0,0662	0,0770
0,2	0,136	0,113	0,1325
0,5	0,221	0,185	0,219
1,0	0,260	0,218	0,260
2,0	0,270	0,227	0,270

Aus Tab. 1 geht hervor, daß bei Berücksichtigung der aktivierten Al-Platte ϱ etwas flacher ansteigt, als ohne Berücksichtigung dieser Platte. Der Unterschied zwischen den theoretischen und experimentellen Kurven ist also durch diese Korrektionsrechnung noch größer geworden (freilich nur sehr wenig). Die gefundenen Abweichungen von Gleichung (21) sind also keinesfalls durch Reflexion der unteren Al-Platte zu erklären.

Wir wollen versuchen, Gleichung (28) noch von einer anderen Seite aus zu prüfen. Läßt man ϱ_0 konstant und verändert ϱ_u, so nimmt ϱ mit wachsendem ϱ_u zu; d. h. schiebt man unter die aktivierte Al-Platte weitere Metallplatten, so nimmt das Verhältnis der reflektierten Strahlung zur durchgelassenen Strahlung zu. — Diese theoretische Folgerung wurde einer experimentellen Prüfung unterzogen. Als reflektierendes Metall wurde eine dicke Schicht Zinn benutzt; unter die aktivierte Platte wurden weitere Al-Bleche geschoben. Die Zerstreuung im Elektrometer wurde bei verschiedener Dicke des Aluminiums gemessen, einmal, wenn das Zinn die aktive Schicht bedeckte, und dann, wenn es fortgenommen war. Die Resultate sind in Fig. 7 zusammengestellt. Wir ersehen daraus, daß das Verhältnis der Strahlung ohne Zinn zur Strahlung mit Zinn sich immer mehr der Eins nähert, d. h. daß die reflektierte Strahlung mit zunehmender Filterdicke stärker abnimmt als die direkte Strahlung. Also auch in diesem Falle haben wir eine Abweichung zwischen Theorie und Experiment.

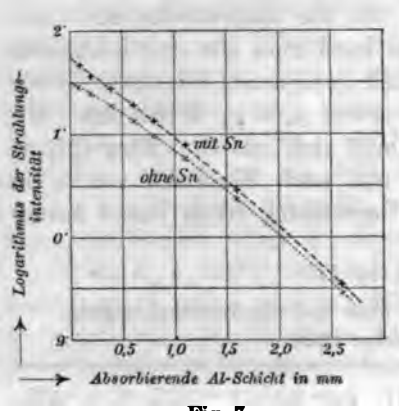


Fig. 7.

Die Versuche mit der reflektierten Strahlung lassen sich mit den theoretischen Ergebnissen nicht in völligen Einklang bringen. Doch erklären sich die gefundenen Unterschiede höchstwahrscheinlich dadurch, daß wir bei Aufstellung der Formeln eine Streuung der Teilchen nach allen Seiten vernachlässigten und daß wir außerdem unsere Versuche nicht mit senkrecht zur Plattenoberfläche einfallenden Strahlen angestellt haben. Betrachten wir z. B. ein Bündel Parallelstrahlen, die unter einem Einfallswinkel größer als 0° in das obere Metall eindringen (vgl. Fig. 8). Wir wollen annehmen,

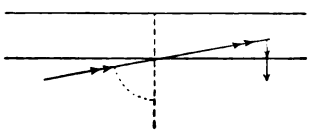


Fig. 8.

daß von diesem Bündel die Teilchen nach allen Seiten gleichmäßig zerstreut werden. Dann wird eine Gruppe von Teilchen senkrecht zur Plattenoberfläche wieder austreten. Diese Teilchen haben einen verhältnismäßig kleinen Weg im Metall zurückzulegen; sie werden also viel weniger beeinflußt werden, als wenn sie denselben Weg wie die einfallenden Strahlen zurücklegen müßten. Die Intensität der reflektierten Strahlung wird deshalb bei gleichmäßiger Streuung nach allen Seiten im Verhältnis zur einfallenden um so größer sein, je größer der Einfallswinkel der Strahlen ist.

So erklärt sich, daß die Kurven für die reflektierte Strahlung steiler ansteigen, als nach Gleichung (21) berechnet wird. Daß der Anteil der reflektierten Strahlung an der Gesamtstrahlung mit zunehmender Filterdicke der aktivierten Platte entgegen der Theorie abnimmt, wird wohl ebenfalls einer Streuung der Strahlen zuzuschreiben sein. Unsere Formeln gelten streng nur für unendlich große Platten und ein unendlich ausgedehntes Elektrometer. Es muß also bei unserer Anordnung stets eine Randwirkung vorhanden sein; d. h. es werden Teilchen, die nach dem Rand hin abgelenkt werden, gar nicht in unser Zerstreuungsgefäß gelangen oder in diesem nur eine verhältnismäßig kleine Luftstrecke durchlaufen. Dieser Verlust an meßbarer Strahlungsenergie wird mit der *absoluten* Dicke der durchstrahlten Schicht ansteigen müssen. Wenigstens ist es sehr wohl möglich, daß in Fig. 7 die scheinbare Verminderung der reflektierten Strahlung durch eine Randwirkung zustande kommt.

Unsere Erörterungen lassen es also unbestimmt, ob p, der Grenzwert der reflektierten Strahlung, zu groß oder zu klein gefunden wird. Denn die Streuung wirkt in verschiedenem Sinne: einmal erscheint die reflektierte Strahlung eines schräg einfallenden Strahlenbündels zu groß, dann vermindern Randwirkungen die gemessene Strahlungsenergie. Da wir über diesen Effekt nichts Näheres aussagen können, ist es wohl am besten, wenn wir den unkorrigierten Grenzwert p unseren Rechnungen zugrunde legen (vgl. später Tab. 2).

Die vorhin erwähnte Randwirkung muß sich auch bei der durchgehenden Strahlung bemerkbar machen; und zwar wird mit zunehmender Dicke der durchstrahlten Schicht weniger

Strahlungsenergie gemessen werden, als tatsächlich durch die Platte hindurchgeht. Daß dies der Fall ist, haben wir ja bereits bei den Kurven der Fig. 4 gesehen. Die damals gefundene Abweichung vom Exponentialgesetz war beim schwach absorbierenden Aluminium am größten, beim stark absorbierenden Gold am kleinsten. Höchstwahrscheinlich ist eben die absolute Dicke der durchstrahlten Materie für die Größe der Randwirkung maßgebend.

Die Abweichungen vom Exponentialgesetz sind auch dadurch zu erklären, daß die Durchdringungsfähigkeit der Teilchen mit wachsender Filterdicke abnimmt. Freilich ist bei dieser Annahme schwer zu deuten, daß die Verminderung der Durchdringungsfähigkeit von der absoluten Dicke der durchstrahlten Schicht und nicht von dem Energieverlust der Strahlen abhängt (vgl. Fig. 4).

Scheinbare Analogie zwischen Licht- und β-Strahlen.

Es bliebe noch die bereits auf p. 679 angeschnittene Frage zu erörtern, ob ein Strahlenbündel, in dem alle Richtungen gleichmäßig verteilt sind, durch absorbierende Platten genau so beeinflußt wird, wie ein Parallelstrahlenbündel von gleicher Intensität. Oder schärfer ausgedrückt: Wenn bei einem einzelnen in bestimmter Richtung fortschreitenden Strahlenbündel sich die durchgelassene Strahlungsenergie durch ein Exponentialgesetz darstellen läßt, gilt dann dieses Gesetz auch noch bei gleichmäßiger Verteilung der Strahlen nach allen Richtungen? Es hat eine genaue Erörterung dieser Frage deshalb Interesse, weil man — wenigstens innerhalb gewisser Grenzen — gefunden hat, daß sich die von einem Punkt ausgehenden β-Strahlen der absorbierenden Materie gegenüber gerade so verhalten, wie ein Bündel paralleler Lichtstrahlen, daß sie nämlich nach einem Exponentialgesetz absorbiert werden.

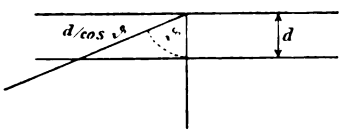


Fig. 9.

Denken wir uns einen leuchtenden Punkt (vgl. Fig. 9), der sich über einer unendlich ausgedehnten Platte von der Dicke d befindet und der nach allen Seiten gleichmäßig Strahlen

aussendet.[1]) Jeder Strahl soll nach einem Exponentialgesetz absorbiert werden, d. h. an irgend einer Stelle soll sich die Intensität di des Strahles ausdrücken lassen durch:

$$di = di_0 . e^{-\varepsilon x},$$

wo x die durchlaufene Wegstrecke, ε eine Konstante, und di_0 die Anfangsintensität des Strahles bedeutet. Wenn wir die Gesamtzahl der nach unten gehenden Strahlen gleich 1 setzen, so gehen unter dem Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ zur Plattennormalen $\sin\vartheta\, d\vartheta$ Strahlen durch die Platte hindurch. Jeder dieser Strahlen hat in der Platte den Weg $d/\cos\vartheta$ zurückzulegen. Die Intensität dieser Strahlen nach dem Austritt ist also:

$$di = J \sin\vartheta\, d\vartheta\, e^{-\frac{\varepsilon d}{\cos\vartheta}},$$

wenn J die Anfangsintensität aller Strahlen bedeutet. Integriert man diesen Ausdruck über ϑ, so bekommt man für die hindurchgehende Gesamtintensität

$$J_d = J \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta\, e^{-\frac{\varepsilon d}{\cos\vartheta}}. \tag{29}$$

Setzt man in (29):

$$\frac{\varepsilon d}{\cos\vartheta} = y,$$

so wird:

$$\frac{J_d}{J} = \varepsilon d \int_{\varepsilon d}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} dy = e^{-\varepsilon d} - \varepsilon d \int_{\varepsilon d}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = e^{-\varepsilon d} + Ei(-\varepsilon d), \tag{30}$$

wo $Ei(-\varepsilon d)$ eine transzendente Funktion bedeutet, die unter dem Namen „Exponentialintegral" bekannt ist.[2])

Aus (30) erkennen wir, daß J_d/J bloß von dem Produkt $\varepsilon . d$ abhängt. Nimmt man also $\varepsilon . d$ als Abszisse, so hat für alle absorbierenden Körper die J_d/J-Kurve gleiche Gestalt.

---

1) Unsere Überlegungen gelten übrigens auch in unveränderter Form für eine leuchtende Ebene.

2) Die Kenntnis dieser Funktion, sowie die Lösung der Differentialgleichungen (8) und (9) verdanke ich Hrn. W. v. Ignatowsky. Tabellen zur numerischen Berechnung des Exponentialintegrals sind u. a. aufgestellt von J. W. L. Glaisher, Phil. Trans. London Roy. Soc. **160**. p. 367. 1870.

In Fig. 10 ist nicht J_d/J, sondern der Briggsche Logarithmus von J_d/J und von $e^{-\varepsilon . d}$ eingetragen. Wir ersehen aus dem Vergleich dieser beiden Kurven, daß J_d/J anfänglich steil abfällt und sich dann einer Kurve nähert, die große Ähnlichkeit mit einer Exponentialkurve $e^{-\varepsilon' d}$ hat. ε' berechnet sich aus dem Differentialquotienten der in Fig. 10 eingezeichnen Kurve bei $\varepsilon d = 5$ zu 1,16. Bei einer Plattendicke $d = 5/\varepsilon$ wird also ein Bündel Strahlen, in dem alle Richtungen gleichmäßig verteilt sind, durch eine hinzugefügte Platte von der Dicke $x/1{,}16$ annähernd genau so absorbiert, wie ein Bündel Parallelstrahlen durch eine hinzugefügte Platte von der Dicke x.

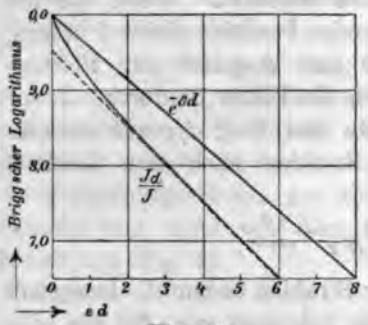


Fig. 10.

Bei geringen Filterdicken weicht die J_d/J-Kurve freilich stark von einer Exponentialkurve ab. Eine ähnliche Abweichung vom Exponentialgesetz hatten wir bei unseren Versuchen mit β-Strahlen feststellen können, freilich nur bei ganz bestimmten Stoffen und sehr kleinen Filterdicken (vgl. Fig. 5 und das im Anschluß daran Gesagte auf p. 681). Deshalb weisen gerade diese Versuche darauf hin, daß bei der Absorption von β-Strahlen durchaus andere Verhältnisse gelten, als bei der Absorption von Lichtstrahlen. Denn wir hatten bei den Versuchen mit β-Strahlen eine anfängliche Abweichung vom Exponentialgesetz nur bei einigen Stoffen feststellen können, während bei der Absorption des Lichtes die verschiedenen absorbierenden Körper keine qualitativen Unterschiede zeigen.

Bei beiden Strahlenarten läßt sich die hindurchgegangene Strahlung durch eine Exponentialformel darstellen, wenn man bei Licht mit Parallelstrahlen, bei β-Teilchen mit Strahlen gleichmäßiger Verteilung experimentiert. — Zu einem Exponentialgesetz kommt man stets durch den Ansatz:

$$d i = - \varepsilon . i . d x .$$

Wir müssen also den „wahren Absorptionskoeffizienten“ α und den Reflexionskoeffizienten β — aus diesen beiden Größen

setzt sich ja bei β-Strahlen ε zusammen — auf gleichmäßig verteilte Strahlen und nicht auf Parallelstrahlen beziehen. Eine derartige Festetzung hatten wir ja bereits auf p. 679 getroffen.

Immerhin ist es möglich, daß auch für die einzelnen β-Teilchen ein ähnliches Absorptionsgesetz gilt, wie für parallele Lichtstrahlen. Wenn wir annehmen, daß durch die Absorption ein bestimmter Prozentsatz sämtlicher Teilchen vernichtet wird, so hat der Ansatz Berechtigung:

$$dn = -\varepsilon . n . da,$$

wo n die Anzahl der Teilchen und a den tatsächlich vom Elektron durchlaufenen Weg bedeutet. Durch Integration folgt:

$$n = n_0 . e^{-\varepsilon a}.$$

Wenn nun die Elektronen in der Materie, ähnlich wie die Gasteilchen im Raume, Zickzackwege zurücklegen — und das ist höchstwahrscheinlich der Fall —, so wird der Weg a für jedes Elektron einen anderen Wert haben. Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind bei ursprünglich gleichmäßiger Verteilung der Strahlen sehr große und sehr kleine Wege unendlich unwahrscheinlich. Man wird von einer mittleren Weglänge $\bar{a}$ sprechen können. Und wenn man $\bar{a}$ mit $d/\cos\vartheta$ in Gleichung (29) identifiziert, so bekommt man durch Integration von (29) tatsächlich eine Exponentialformel.

Aus diesen Überlegungen geht hervor, daß das so einfache Gesetz für die Absorption der β-Strahlen, oder besser für die durchgelassene Strahlungsenergie der β-Strahlen, erst auf ziemlich umständliche Weise aus dem — scheinbar — analogen Verhalten der Lichtstrahlen zu erklären. Eine strenge mathematische Behandlung des Problems erscheint vorläufig aussichtslos, solange wir über den eigentlichen Mechanismus der Absorption und Streuung nichts Näheres wissen. Vielleicht sind Versuche über die Streuung von parallelen β-Strahlen in sehr dünnen Metallblättchen geeignet, unsere Kenntnisse über diese Vorgänge zu fördern.

Absorption und Reflexion bei verschiedenen Metallen.

Nachdem wir jetzt gesehen haben, was wir bei unseren Versuchen eigentlich messen und auf was wir zu achten haben, wollen wir zur Bestimmung von p und μ bei den verschiedenen

Metallen übergehen. Über Beschaffenheit und Herkunft der Metalle, die bis auf eine Ausnahme als „rein" bez. „technisch rein" bezogen waren, kann ich folgende Angaben machen[1]):

Mg, 2 Bleche von 0,52 mm Dicke, von Merck-Darmstadt.
Al, Folie und Bleche unbekannter Herkunft. Bereits in früheren Arbeiten des Verfassers benutzt.
Fe, „Papierblech", 0,0450 mm dick, von der Bismarckhütte, Oberschlesien.
Ni, 10 Bleche, 0,10 mm dick, von Basse & Selve-Altena.
Co, 2 Bleche von 0,53 mm Dicke, nicht nickelfrei, von Merck-Darmstadt.
Cu, 10 Bleche, 0,11 mm dick, von Basse & Selve- Altena.
Zn, 20 Bleche, 0,041 mm dick, unbekannter Herkunft.
Pd, 5 Bleche, 0,021 mm dick, von Heraeus-Hanau.
Ag, 6 Bleche, 0,051 mm dick, von der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a. M.
Sn, Folie und Bleche von 0,14 mm, von Haendler & Natermann-Hannov. Münden.
Pt, 5 Bleche, 0,020 mm dick, von Heraeus-Hanau.
Au, 5 Bleche, 0,050 mm dick, von der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a. M.
Pb, Folie von 0,0114 mm Dicke, von der Stanniol- und Metallkapselfabrik Eppstein i. T.
Bi, von Merck-Darmstadt; es wurden aus großen linsenförmigen Gußstücken Platten von 0,40 und 0,51 mm Dicke in der hiesigen Institutswerkstatt ausgedreht.

p, die maximale reflektierte Strahlung, ist verhältnismäßig einfach zu ermitteln: man braucht nur die aktive Materie mit einer genügend dicken Schicht des zu untersuchenden Materials zu bedecken und den Zuwachs der Zerstreuung im Elektrometer zu messen (vgl. Gleichung (26)). Bei Palladium konnte der Grenzwert der reflektierten Strahlung nicht direkt festgestellt werden, weil die fünf benutzten Bleche etwas zu dünn waren. Es wurde deshalb eine Reflexionskurve wie in Fig. 3 aufgenommen und durch Vergleich mit ähnlichen Kurven der Wert von p extrapoliert.

Dagegen machte die Bestimmung von μ in einigen Fällen mehr Schwierigkeiten. Bei Kobalt z. B. standen mir nur Bleche von 0,5 mm Dicke zur Verfügung. Bei zwei aufgelegten Blechen würde sich bereits die γ-Strahlung von Uran X be-

1) Die angegebenen Dicken sind Durchschnittswerte. Das Material wurde uns zum Teil gratis von den betreffenden Firmen zur Untersuchung überlassen. Für dieses Entgegenkommen sei auch an dieser Stelle bestens gedankt.

merkbar machen; bei einem Blech muß man die β-Strahlung kennen, wenn keine Filter aufgelegt sind. Und die kann man nicht direkt ermitteln, weil ja Uran X auch α-Strahlen aussendet. Wenn man das aktivierte Blech so auflegt, daß die Strahlen erst die Al-Schicht durchdringen müssen, so macht sich die Reflexion dieser Schicht störend bemerkbar.[1]) Beim Kobalt wurde deshalb über das zu untersuchende Blech ein dünnes Eisenblech und über dieses die aktive Schicht gelegt. Da Kobalt und Eisen, wie aus Vorversuchen ermittelt war, nur unerhebliche Unterschiede in ihrem Absorptions- und Reflexionsvermögen zeigen, sind bei dieser Anordnung erhebliche Fehler ausgeschlossen. In derselben Weise wurde bei Wismut und Magnesium mit dünnen Blei- und Aluminiumblechen verfahren.

Übrigens war es in den meisten Fällen möglich, die Absorptionsmessungen in regelmäßigen Zwischenräumen bis zum Auftreten der γ-Strahlung auszudehnen oder wenigstens den geradlinigen Teil der in Figg. 4 und 5 gezeichneten Kurven zu erhalten. Nur bei Platin waren die Bleche so dünn, daß man kaum über den anfänglichen steilen Abfall der Absorptionskurve (vgl. Fig. 5) hinauskam. Deshalb haftet dem hier mitgeteilten Wert von μ beim Platin eine gewisse Unsicherheit an.

Die erhaltenen Resultate sind in Tab. 2, p. 694, zusammengestellt, in der die Metalle nach steigendem Atomgewicht geordnet sind.

Wir ersehen aus Tab. 2, daß p mit wachsendem Atomgewicht zunimmt, aber langsamer als das Atomgewicht. Das wurde bereits von Mc Clelland (l. c.) festgestellt. Die von diesem Forscher mitgeteilten Werte sind sämtlich ca. 0,7 mal so groß als die hier gefundenen. Vielleicht rührt dieser Unterschied daher, daß Mc Clelland mit Radiumstrahlen arbeitete oder daß seine ziemlich umständliche Methode zur Ermittelung der absoluten Werte von p nicht genügend genau ist. — Crowther (l. c.) fand mit β-Strahlen von Uran viel kleinere Werte für die reflektierte Strahlung. Doch kann seine Methode

1) Hierauf beruht die vom Verfasser (Physik. Zeitschr. 8. p. 361. 1907) beschriebene Erscheinung, daß die Absorptionskurve für ein bestimmtes Metall ihre Form ändert, wenn man die Strahlen erst ein anderes Metall durchdringen läßt. Hier gültige Formeln sind leicht nach Art der Gleichung (27) abzuleiten.

Tabelle 2.

	Atomgewicht A	Dichte D	μ in cm^{-1}	$100\,p$	α in cm^{-1}	β in cm^{-1}	$\frac{\alpha}{D}$	$\frac{100\,\beta}{A\,.\,D}$	$\frac{\alpha}{D}\cdot\sqrt[3]{A}$
Mg	24,3	1,74	10,5	25,5	6,30	5,76	3,62	13,6	10,4
Al	27,0	2,65	15,0	27,0	8,65	9,63	3,26	12,2	10,9
Fe	56,0	7,80	57	40,8	24,0	55,9	3,08	12,8	11,8
Ni	58,7	8,90	66	43,4	26,1	70,5	2,94	13,5	11,5
Co	59,3	8,5	61	41,0	25,7	60,0	3,02	11,9	11,8
Cu	63,4	8,93	66	42,5	27,0	70,0	3,03	12,4	12,0
Zn	65,3	7,19	52,5	43,2	21,6	56,0	3,00	11,9	12,1
Pd	106	11,9	103	55,0	30,0	160	2,52	12,7	11,9
Ag	108	10,5	90	55,3	26,0	144	2,48	12,8	11,8
Sn	118	7,30	58	57,5	15,6	100	2,14	11,6	10,5
Pt	195	21,5	200	66,0	41,0	468	1,90	11,2	11,0
Au	197	19,3	187	68,4	36,2	480	1,88	12,6	11,0
Pb	206	11,4	103	68,4	19,3	266	1,69	11,3	10,0
Bi	208	9,8	92,5	70,0	16,3	254	1,66	12,5	9,8

zur Messung der „Sekundärstrahlung" kaum einen Anspruch auf Zuverlässigkeit machen.

Eine Ausnahme von der Mc Clellandschen Regel macht in meiner Versuchsreihe allein Nickel. Dieses Metall zeigt bei Mc Clelland dieselbe Reflexion wie Kobalt. Irgendwelche Versuchsfehler sind bei mir ausgeschlossen, da ich für Fe, Ni, Co und Cu mehrmals gemessen habe und immer dieselbe Reihenfolge fand. Übrigens hat G. G. Thomson[1]) eine ähnliche Ausnahmestellung des Nickels bei Versuchen mit sekundären Röntgenstrahlen festgestellt.

Für μ konnte ich aus Tab. 2 keine Gesetzmäßigkeiten ableiten. Crowther (l. c.) fand, daß der Quotient aus μ/D eine gewisse periodische Funktion des Atomgewichtes ist. Diese Resultate werden durch Tab. 2, wie man sich durch Auswertung des Quotienten μ/D überzeugen kann, nicht bestätigt.

Berechnet man sich dagegen aus μ und p mit Hilfe der Gleichung (25) den „wahren Absorptionskoeffizienten" α und

1) G. G. Thomson, Cambridge Proc. **14.** p. 109. 1907.

den „Reflexionskoeffizienten" β, so lassen diese beiden Größen gewisse Gesetzmäßigkeiten erkennen. Der Quotient α/D nimmt im allgemeinen mit wachsendem Atomgewicht ab, der Quotient β/D mit wachsendem Atomgewicht zu. Die Zunahme von β/D ist ungefähr dem Atomgewicht A proportional, während die Abnahme von α/D langsamer als die Abnahme von $1/A$ und $1/\sqrt{A}$ erfolgt und ungefähr $1/\sqrt[3]{A}$ proportional ist. Bildet man deshalb

$$\frac{\beta}{A \cdot D} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{D}\sqrt[3]{A},$$

so kommt man zu zwei Reihen, deren Zahlenwerte sich nur wenig voneinander unterscheiden. Und während α und β sehr große numerische Unterschiede aufweisen — β für Gold ist z. B. 80mal größer als β für Magnesium — beträgt die Abweichung von den beiden Mittelwerten

$$\frac{100 \cdot \beta}{A \cdot D} = 12{,}4 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{D}\sqrt[3]{A} = 11{,}2$$

im Maximalfall 14 Proz.

Es ist anzunehmen, daß die gefundenen Übereinstimmungen nicht zufällig sind, sondern auf gewissen Gesetzmäßigkeiten beruhen. Für den Durchgang von β-Strahlen durch Materie werden eben zwei ganz bestimmte Konstanten in Betracht kommen, die nur von der Geschwindigkeit der β-Strahlen und nicht von der besonderen Art der Materie abhängen. Wenn man an ähnliche Gesetzmäßigkeiten denkt, die Bragg[1]) für den Durchgang der α-Strahlen durch Materie gefunden hat, erscheint es eigentlich selbstverständlich, daß auch den β-Strahlen gegenüber die typischen Unterschiede der Materie verschwinden.

Ob die eben erwähnten Mittelwerte wirkliche Konstanten sind, kann natürlich bei dem wenigen bis jetzt vorliegenden Material nicht entschieden werden. Wir haben ja bereits darauf hingewiesen (vgl. p. 681), daß die Bestimmung von μ wegen der Krümmung der in Fig. 4 eingezeichneten Kurven nicht sehr genau ist und daß wir bei der Gleichsetzung der gemessenen maximalen reflektierten Energie mit dem p der Gleichung (23) vielleicht prinzipielle Fehler machen (vgl. p. 687).

1) Vgl. z. B. W. H. Bragg, Phil. Mag. (6) 11. p. 617. 1906.

Es ist deshalb nicht ausgeschlossen, daß die jetzt noch vorhandenen Unterschiede in den beiden letzten Zeilen der Tab. 2 bei völlig einwandfreien Messungen überhaupt verschwinden. — Aber ganz davon abgesehen: es ist gar nicht nötig, daß diese Unterschiede völlig verschwinden. Es kann für jedes Element eine gewisse — vielleicht nur sehr geringe — Abhängigkeit von der speziellen Art der Atome gewahrt bleiben. Ich erinnere an ähnliche Gesetze, z. B. das Dulong-Petitsche Gesetz von der Atomwärme, wo die Abweichungen von einem Mittelwert noch viel größer sind als hier.

Falls $\frac{\alpha}{D} \cdot \sqrt[3]{A}$ und $\frac{\beta}{A \cdot D}$ wirklich universelle Konstanten sind, können wir schreiben:

$$\alpha = c_1 \frac{D}{\sqrt[3]{A}} \quad \text{und} \quad \beta = c_2 \cdot A \cdot D. \tag{31}$$

Nun ist:

$$D \sim N \cdot A,$$

wo N die Anzahl der Atome im Kubikzentimeter bedeutet. Nimmt man an, daß die Atome der verschiedenen Elemente kugelförmige Gestalt haben und aus dem gleichen Grundstoffe aufgebaut sind, so ist:

$$A \sim \tfrac{4}{3} \pi r^3,$$

wo r den Radius des kugelförmigen Atoms bedeutet. Führt man diese Werte in die Gleichung (31) ein, so wird:

$$\alpha = c_1' N \cdot \pi r^2 \quad \text{und} \quad \beta = c_2' A \cdot N \cdot \tfrac{4}{3} \pi r^3, \tag{32}$$

wo c_1' und c_2' ebenfalls universelle Konstanten bedeuten. α ist also proportional der „Querschnittssumme" aller Atome.[1]) Das erscheint sehr plausibel. Denn die Anzahl der aufgehaltenen Teilchen, d. h. die absorbierte Menge, wird proportional sein der Gesamtfläche $N \cdot \pi r^2$, die sich ihnen beim Durchgang durch Materie entgegenstellt. Die Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten β von den Konstanten eines Atoms ist vielleicht so zu erklären, daß die reflektierte Strahlung proportional ist einmal der anziehenden Masse eines Atoms, d. h. A, und ferner dem ganzen von den Atomen eingenommenen Raum, d. h. $N \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$.

1) Vgl. O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. Kap. X. Breslau 1899.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Beim Durchgang der β-Strahlen durch Materie wird ein Teil der Strahlen absorbiert, ein anderer Teil infolge der Streuung reflektiert.

2. Unter der Annahme, daß eine Volumreflexion stattfindet, lassen sich unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen für die reflektierte und durchgelassene Strahlung Differentialgleichungen aufstellen, deren Lösungen qualitativ mit dem Experiment übereinstimmen. Dabei wird zur Messung der reflektierten Strahlung eine neue, sehr einfache Methode angewandt.

3. Bei allen Messungen, namentlich bei Vergleichsmessungen, muß man berücksichtigen, daß die aktive Materie, bez. eine aktivierte Platte, die Strahlen reflektiert, also die zu messende Strahlung scheinbar vergrößert bez. verkleinert.

4. Das analoge Verhalten von Licht- und β-Strahlen gegenüber der absorbierenden Materie ist scheinbar und nur durch bestimmte Annahmen über die Bahn der β-Teilchen zu erklären.

5. Der „wahre Absorptionskoeffizient“ und der „Reflexionskoeffizient“ scheint durch sehr einfache Gesetzmäßigkeiten mit dem Atomgewicht und der Dichte der untersuchten Substanz verknüpft zu sein.

Giessen, Physik. Inst. d. Univ., 15. Juni 1907.

(Eingegangen 16. Juni 1907.)

7. *Zur Theorie der elektromagnetischen Gleichungen in bewegten Medien;* von *Franz Koláček.*

I.

Eine Gruppe der Hertzschen Gleichungen wird bekanntermaßen von dem Prinzip hergeleitet, daß das Arbeitsintegral der elektrischen Kräfte längs einer geschlossenen, stets von denselben materiellen Teilchen gebildeten Linie durch die auf die Zeiteinheit bezogene Abnahme der Induktionslinien bestimmt ist, welche die umschlossene Fläche passieren. Gegen die Richtigkeit dieser Gleichungen sind nun auf Grund der Versuche von Blondlot[1]) und H. A. Wilson[2]) Einwände erhoben worden, die mir nicht berechtigt zu sein scheinen, weil sie ein wesentliches Glied im Ausdrucke für die elektrische Kraft, nämlich den durch Potentialkräfte ausdrückbaren Teil derselben, nicht berücksichtigen.

Wir benutzen zur Darstellung der Hertzschen Gleichungen das sonst beliebige (französische) Koordinatensystem $x\,y\,z$, verstehen unter $X_e\,Y_e\,Z_e\,u_e\,v_e\,w_e$ bez. $X_m\,Y_m\,Z_m\,u_m\,v_m\,w_m$ die elektrischen bez. magnetischen Kraft- und Induktionskomponenten, unter a, b, c die Relativgeschwindigkeiten der materiellen Teilchen diesem Systeme gegenüber; ferner nehmen wir an, solche Teilchen seien im ganzen Raume vorhanden, um Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, welche sich einstellen, wenn gewisse Teile des Raumes als frei von ihnen anzusehen sind. Bei Benutzung des elektrostatischen Maßsystems (V = Webersche Zahl) lauten die Hertzschen Gleichungen folgendermaßen:

1) R. Blondlot, Compt. rend. **133.** p. 778. 1901.
2) H. A. Wilson, Roy. Soc. Trans. **204 A.** p. 121. 1904.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(Z_e-\bar{Z}_e)}{\partial y}-\dfrac{\partial(Y_e-\bar{Y}_e)}{\partial z}=\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial(X_e-\bar{X}_e)}{\partial z}-\dfrac{\partial(Z_e-\bar{Z}_e)}{\partial x}=\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial v_m}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial(Y_e-\bar{Y}_e)}{\partial x}-\dfrac{\partial(X_e-\bar{X}_e)}{\partial y}=\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w_m}{\partial t}; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u_m}{\partial x}+\frac{\partial v_m}{\partial y}+\frac{\partial w_m}{\partial z}=0.$$

Dabei ist:

$$(3)\quad \bar{X}_e.V=cv_m-bw_m,\quad \bar{Y}_e.V=aw_m-cu_m,\quad \bar{Z}_e.V=bu_m-av_m.$$

$\bar{X}_e$, $\bar{Y}_e$, $\bar{Z}_e$ sind die bekannten Faradaykräfte, die in einem materiellen Linienelemente infolge des Schneidens magnetischer Induktionslinien entstehen.

In den Versuchen von Blondlot und Wilson sind in Raumpunkten xyz, die mit Rücksicht auf die Erde fest sind, die Zustände von t unabhängig. Es folgt dann aus (1)

$$(4)\qquad X_e=\bar{X}_e-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y_e=\bar{Y}_e-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad Z_e=\bar{Z}_e-\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Unsere, mit den Hertzschen Gleichungen vereinbare Annahme ist nun die, daß die willkürliche Funktion $\varphi(x,y,z)$ das elektrostatische Potential der wahren sowie der durch Polarisation des Dielektrikums geweckten Ladungen vorstellt. Die Raumdichte der ersteren sei ϱ, der letzteren

$$-\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

wobei $A\ B\ C$ elektrische Momente der Volumeneinheit vorstellen. Für ein homogenes isotropes Medium gilt

$$A=kX_e,\quad B=kY_e,\quad C=kZ_e,$$

unter k die elektrische Suszeptibilität verstanden, welche mit der Dielektrizitätskonstante K durch die Relation $K=1+4\pi k$ verknüpft ist.

Vom Standpunkte der Mosotti-Clausiusschen Theorie der Dielektrika gilt

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi=-4\pi\varrho+4\pi\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial B}{\partial y}+\dfrac{\partial C}{\partial z}\right) \\ \qquad =-4\pi\varrho+4\pi k\left(\dfrac{\partial X_e}{\partial x}+\dfrac{\partial Y_e}{\partial y}+\dfrac{\partial Z_e}{\partial z}\right), \end{cases}$$

daher mit Rücksicht auf die Gleichung (4)

$$(6) \qquad K\Delta\varphi = -4\pi\varrho + (K-1)\left(\frac{\partial \bar{X}_e}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_e}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Z}_e}{\partial z}\right).$$

Im Versuche von Blondlot wird zwischen zwei Kondensatorplatten (die parallel der xy-Ebene angenommen werden sollen) ein Luftstrom (in der Richtung der x-Achse, $a > 0$, $b = c = 0$) hindurchgetrieben. Nebenbei bestehe zwischen ihnen ein senkrechtes homogenes Magnetfeld

$$u_m = 0, \quad w_m = 0, \quad v_m = Y_m = -H.$$

Es ist dann

$$\bar{X}_e = \bar{Y}_e = 0, \quad \bar{Z}_e = \frac{aH}{V}.$$

Sind die Platten unendlich groß und hängt die Geschwindigkeit nur von z ab, so gilt bei Abwesenheit wahrer Ladungen laut (6)

$$K\frac{d^2\varphi}{dz^2} = (K-1)\frac{da}{dz}\cdot\frac{H}{V} \quad \text{und} \quad K\frac{d\varphi}{dz} = (K-1)\frac{aH}{V},$$

weil für $a = 0$ auch $d\varphi/dz$ Null sein muß. Als Potentialdifferenz zwischen den zwei Kondensatorplatten, deren Distanz d ist, ergibt sich

$$\varphi_d - \varphi_0 = \frac{K-1}{K}\cdot\frac{H}{V}\int_{z=0}^{z=d} a\,dz.$$

Diese Differenz ist das eigentliche Messungsobjekt. Der negative Versuch von Blondlot erklärt sich aus dem Umstande, daß K für Luft von der Einheit nur äußerst wenig unterschieden ist.

Im Wilsonschen Versuche rotiert ein Hohlzylinder von Ebonit in einem der Rotationsachse (y) parallelen homogenen Magnetfelde ($v_m = H$, $u_m = w_m = 0$). Ist ω die Drehgeschwindigkeit im Uhrzeigersinne, so gilt

$$b = 0, \quad a = -\omega z, \quad c = \omega x,$$

$$V.\bar{X}_e = \omega x H, \quad \bar{Y}_e = 0, \quad V\bar{Z}_e = \omega z H,$$

daher

$$\frac{\partial \bar{X}_e}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_e}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Z}_e}{\partial z} = \frac{2\omega H}{V}.$$

Bei hinreichend langem Zylinder hängt φ nur von $r = \sqrt{x^2 + z^2}$

ab. Gleichung (6) ergibt dann bei Abwesenheit von wahrer (apriorer, auch ohne Rotation bestehender) Ladung

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{K-1}{K}\cdot\frac{2\omega H}{V},$$

ferner

$$\frac{d\varphi}{dr}\cdot r = \frac{K-1}{K}\frac{\omega H r^2}{V} + \text{Const.},$$

wobei Const. = 0 sein muß, weil für $\omega = 0$ auch $d\varphi/dr = 0$ ist. Zwischen der äußeren ($r = r_2$) und der inneren Mantelfläche ($r = r_1$) ergibt sich die Potentialdifferenz

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{K-1}{2K}\frac{\omega H}{V}(r_2^2 - r_1^2), \tag{7}$$

die bestehen bleibt, wenn die Mantelflächen des Ebonitzylinders mit je einer dünnen Metallschicht bedeckt werden, da durch Influenz in derselben elektrische Doppelschichten von verschwindendem elektrischen Momente entstehen. Durch Formel (7) hat bekanntlich H. A. Wilson seine Messungen in sehr vollkommener Weise dargestellt.

II.

Im allgemeinen Falle, wo u_m etc. auch von t abhängt, genügen den Gleichungen (1) die Integrale

$$\left\{\begin{aligned} X_e &= \overline{X}_e + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)_{xyz} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ Y_e &= \overline{Y}_e + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ Z_e &= \overline{Z}_e + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

wobei φ eine vorderhand willkürliche Funktion und F, G, H Vektorpotentiale

$$F = \frac{1}{4\pi V}\int\frac{u_m\, d\tau}{r}, \quad G = \frac{1}{4\pi V}\int\frac{v_m\, d\tau}{r}, \quad H = \frac{1}{4\pi V}\int\frac{w_m\, d\tau}{r} \tag{9}$$

bedeuten. Die Integration reicht ins Unendliche.

Da der magnetische Induktionsvektor $u_m \ldots$ solenoidal verteilt ist und seine Normalkomponente an Unstetigkeitsflächen als stetig angenommen wird, gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Die in (8) vorkommenden Derivationen sind gemeint bei konstantem $x\,y\,z$, was in der ersten Zeile durch angehängte Indizes angedeutet ist.

Die Gleichungen (1) bleiben bekanntlich ihrer Form nach bestehen für jedes andere Koordinatensystem $x'\,y'\,z'$, das gegenüber jenem $x\,y\,z$ in beliebiger relativer Bewegung begriffen ist. Bezeichnen wir mit $X_e' \ldots$, $u_m' \ldots$, a', b', c', F', G', H' die Komponenten der elektrischen Kraft, magnetischen Induktion, bez. relativer Geschwindigkeit und des Vektorpotentials im Punkte $x'\,y'\,z'$ zur Zeit t, so gilt, ähnlich wie in (8)

$$(11) \qquad Z_e' = \overline{Z}_e' + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G'}{\partial x'} - \frac{\partial F'}{\partial y'}\right)_{x'y'z'} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z'},$$

wobei $\overline{Z}_e' = b' u_m' - a' v_m'$ etc. und φ' eine *andere* Funktion von $(x'\,y'\,z'\,t)$ sein soll. Wir wählen nun das System $x'\,y'\,z'$ derart, daß es in einem bestimmten, aber sonst beliebigen Zeitpunkte $t = t_0$ mit dem Systeme $x\,y\,z$ zusammenfällt. In diesem Augenblicke repräsentieren die $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ Koordinaten ein und desselben materiellen Punktes, in welchem *nur ein* Wert für die elektrische Kraft herauskommen muß, mag man sich bei der Rechnung eines oder des anderen Koordinatensystems bedienen. In demselben Augenblicke ist auch

$$u_m = u_m' \ldots, \qquad F = F' \ldots,$$

ferner

$$\frac{\partial F'}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ etc.}$$

Ferner sei zur Zeit $t = t_0 \ldots a_0\,b_0\,c_0$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich das System $x'\,y'\,z'$ parallel zu $x\,y\,z$ verschiebt und $p_0\,q_0\,r_0$ seine Drehgeschwindigkeit um die $x\,y\,z$-Achse. Für naheliegende Zeiten t gilt dann für die Koordinaten ein und desselben Punktes

$$(12) \qquad \begin{cases} x = x' + (t - t_0)\,\alpha, & \text{wobei } \alpha = a_0 - r_0\,y' + q_0\,z', \\ y = y' + (t - t_0)\,\beta, & \quad ,, \quad \beta = b_0 - p_0\,z' + r_0\,x', \\ z = z' + (t - t_0)\,\gamma, & \quad ,, \quad \gamma = c_0 - q_0\,x' + p_0\,y'. \end{cases}$$

Weil die Größen a, b, c durch $dx/dt \ldots$, ferner a', b', c' durch dx'/dt etc. definiert sind, gilt für $t = t_0$

$$(13) \qquad a' = a - \alpha, \quad b' = b - \beta, \quad c' = c - \gamma.$$

Das Schema der Richtungskosinusse beider Achsensysteme ist:

(14)

	x	y	z
x'	1	$r_0(t-t_0)$	$-q_0(t-t_0)$
y'	$-r_0(t-t_0)$	1	$p_0(t-t_0)$
z'	$q(t-t_0)$	$-p_0(t-t_0)$	1

Wir setzen für die Komponenten des Wirbelvektors von FGH bez. $F'G'H'$ abkürzungsweise

$$(14a)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}, \quad \eta = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}, \quad \zeta = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}, \\ \xi' \ldots, \quad \eta' \ldots, \quad \zeta' = \dfrac{\partial G'}{\partial x'} - \dfrac{\partial F'}{\partial y'}. \end{cases}$$

Es ist dann laut Schema (14)

$$\zeta' = \zeta + \xi(t-t_0)q_0 - \eta p_0(t-t_0),$$

ferner für $t = t_0$

$$(15)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G'}{\partial x'} - \frac{\partial F'}{\partial y'}\right)_{x'y'z'} = \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial t}\right)_{x'y'z'} = \xi q_0 - \eta p_0 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{x'y'z'}.$$

Wenn man sich in $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ die Größen $x\,y\,z\,t$ ausgedrückt denkt durch $x'\,y'\,z'\,t$, folgt

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{x'y'z'} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{xyz} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x'y'z'} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x'y'z'} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x'y'z'}.$$

Benutzt man (12), so gilt für $t = t_0$, wo $x = x'$ etc. besteht:

$$(16)\quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{x'y'z'} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{xyz} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\gamma,$$

wobei

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha = a_0 - r_0 y + q_0 z = a - a', \quad \beta = b_0 - p_0 z + r_0 x = b - b', \\ \gamma = c - c'. \end{cases}$$

Es ist nun mit Rücksicht auf (10) und (9)

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial G}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial z}\right) \\ \quad = \Delta G + \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = -\dfrac{v_m}{V} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = \dfrac{u_m}{V} + \dfrac{\partial \eta}{\partial z}, \end{cases}$$

daher statt (15) bei Rücksicht auf (16), (17), (18) zur Zeit $t = t_0$

$$\left(\frac{\partial \zeta'}{\partial t}\right)_{x'y'z'} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{xyz} + \frac{\beta}{V} u_m - \frac{\alpha}{V} v_m + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

Diesen Wert führen wir ein in (11), berücksichtigen, daß zur Zeit $t = t_0$ Z_e' zusammenfallen muß mit dem durch (8) gegebenen Werte

$$Z_e = \bar{Z}_e + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{xyz} - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

bemerken, daß wegen $u_m' = u_m$ gilt

$$V\bar{Z}_e' = b' u_m - a' v_m = V\bar{Z}_e - \beta u_m + \alpha v_m,$$

setzen ferner

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right)_{t'y'z'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_{tyz} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)_{tyz} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x'}\right)_{tyz},$$

was nach (12) zu $(\partial \varphi'/\partial x)_{tyz}$ führt, und bekommen so

$$\frac{\partial}{\partial z}[\varphi' - \varphi - \alpha\xi - \beta\eta - \gamma\zeta] = 0,$$

und in ähnlicher Weise zwei andere Gleichungen, in welchen vor der eckigen Klammer statt der Derivation nach z jene nach x und y zu setzen sind. Hieraus folgt bis auf eine belanglose Zeitfunktion

$$(18^*) \qquad \varphi' - \varphi = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta.$$

Die dem Koordinatensystem $x'\,y'\,z'$ zugehörige Funktion φ' ist also bestimmt, wenn sie für *ein* System $x\,y\,z$ als bekannt vorausgesetzt wird. Die Größen $\alpha\,\beta\,\gamma$ sind Relativgeschwindigkeiten beider Systeme, ξ, η, ζ sind Wirbelkomponenten des Vektors $F\,G\,H$, welcher zu V im reziproken Verhältnisse steht. Daher ist $\varphi' - \varphi$ eine Größe von der Ordnung: „Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme dividiert durch Lichtgeschwindigkeit" und in praktischen Fällen sehr klein.

III.

Wir wollen nun annehmen, es gäbe für ein bestimmtes Raumgebiet, für welches die Gleichungen (8) richtig sein sollen, *ein* [1]) Koordinatensystem $x\,y\,z$ (wir nennen es das

1) Starr verbundene Koordinatensysteme sind gleichwertig; unter *verschiedenen* Koordinatensystemen verstehen wir relativ bewegte.

charakteristische) von der Beschaffenheit, daß die ihm entsprechende Funktion φ mit dem elektrostatischen Potential der wahren und der Polarisationsladungen zusammenfällt. Diese Annahme ist möglich, weil sie den Wilsonschen[1]) Versuch erklärt; sie besagt übrigens laut (8) nichts weiter, als daß in einem materiellen Punktsystem, welches bezüglich eines charakteristischen Systems ruht, nur rein elektrostatische Kräfte vorkommen können, wenn die magnetischen von der Zeit nicht abhängen. Dies gehört zu den Grundannahmen der Elektro- und Magnetostatik.

Laut (18*) können in ein und demselben Raumgebiete zwei charakteristische Systeme nicht vorkommen, solange ξ, η, ζ, daher auch u_m, v_m, w_m von Null verschieden sind, wenn beispielsweise neben statischen Ladungen nur noch stationäre Ströme und permanente Magnete vorkommen. Aber auch bei Abwesenheit dieser Quellen des Magnetfeldes kann es nur ein charakteristisches System geben, weil sonst der experimentell feststehende Rowlandeffekt nicht mehr eindeutig wäre, wenn es *zwei* relativ gegeneinander bewegte Koordinatensysteme gäbe von der Beschaffenheit, daß Ladungen, welche bezüglich derselben ruhen, keinen magnetischen Effekt erzeugen.

Ein Koordinatensystem, welches charakteristisch ist für materielle Punkte eines gewissen Gebietes, wird man in Beziehung setzen dürfen zu räumlichen Merkmalen desselben, welche von der Bewegung der Materie innerhalb desselben unabhängig sind. Gehört beispielsweise zum Umkreises eines jeden als starr vorausgesetzten Weltkörpers *ein* selbständiges System, so wird man es ihm gegenüber als ruhend annehmen dürfen. Gibt es für den ganzen Weltraum nur *ein* charakteristisches System, so wird man wegen der relativen Bewegung der Weltkörper untereinander als Träger desselben ein starr sich bewegendes, den ganzen Weltraum ausfüllendes Gebilde, den Fresnel-Lorentzschen *Weltäther* supponieren müssen. Die später gemachte Hypothese charakteristischer

1) Die Wilsonschen Versuchsresultate sind noch kein Beweis dafür, daß, wie früher angenommen wurde, das charakteristische System der Erde gegenüber ruht. Geschähe dies gegenüber der Sonne, würden sie gleichgut erklärbar sein, da sie nicht genau genug sein können, um die eventuelle kleine Differenz $\varphi' - \varphi$ unzweideutig hervortreten zu lassen.

Systeme, welche mit Bezug auf jeden Weltkörper ruhen, aber zwischen den Weltkörpern von Ort zu Ort verschieden sind, wird man im Sinne der Stokesschen Aberrationstheorie sich durch einen von Ort zu Ort in Bewegung begriffenen, aber in der Umgebung der Weltkörper relativ zu diesen ruhenden Äther veranschaulichen können. Der Äther spielt in diesen Erörterungen überhaupt nur die Rolle eines Trägers von Bezugsystemen.

IV.

Die Komponenten der elektrostatischen Induktion $u_e \ldots$ sind definiert durch

$$u_e = X_e + 4\pi A, \quad v_e = Y_e + 4\pi B, \quad w_e = Z_e + 4\pi C.$$

Aus (8) und (14a) folgt durch Addierung von $4\pi A$ etc.

$$(19) \qquad \begin{cases} U_e = u_e - \bar{X}_e = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + 4\pi A, \\ V_e = v_e - \bar{Y}_e = \dfrac{\partial \eta}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + 4\pi B, \\ W_e = w_e - \bar{Z}_e = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + 4\pi C. \end{cases}$$

Ist xyz ein charakteristisches Bezugsystem, so ist nach der **Mosottischen Theorie der Dielektrika**

$$(20) \qquad \Delta\varphi = -4\pi\varrho + 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Aus (19) und (20) folgt dann die wichtige Relation

$$(21) \qquad \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial V_e}{\partial y} + \frac{\partial W_e}{\partial z} = 4\pi\varrho,$$

wobei

$$(22) \qquad U_e = u_e - \frac{c\,v_m - b\,w_m}{V} = u_e - \bar{X}_e \text{ etc.}$$

Die Raumdichte der wahren Ladung ϱ ist hier gegeben durch die Divergenz eines von $u_e v_e w_e$ *verschiedenen* Vektors $U_e V_e W_e$ (Gleichung (22)), der mit ihm für $a = b = c = 0$ zusammenfällt. Dieser auf Grund der Elektronentheorie schon von Lorentz hergeleitete Satz (21) überrascht, weil man seit Maxwell gewohnt war, die Größe ϱ durch die Divergenz von $u_e v_e w_e$ zu *definieren*. Der Ursprung dieser Behauptung ist im Gaussschen Satze zu suchen, wo sie auf Grund des Coulombschen Fernwirkungsgesetzes beweisbar ist. Handelt

es sich um die Verteilung der *elektrostatischen* Kräfte in einem ruhenden von Ort zu Ort veränderlichen Medium, so ist zwar auf Grund des Energieprinzips die Existenz eines Kräftepotentials nachweisbar, aber von einer Fernwirkung der wahren Ladungen, wenigstens von einer solchen, wo sie nach geraden Linien erfolgte, kann keine Rede sein. Den Begriff der wahren Ladung an einer Raumstelle kann man überhaupt nicht mit Worten definieren, wohl kann man aber den Ladungsprozeß, dessen Endglied die Ladung ist, beschreiben und auch von einem Quantum der Ladung reden, wenn man sich zur Messung desselben eines ballistischen Galvanometers bedient. Hierdurch wird der Begriff der Ladung substantialisiert. Hypothetisch kann man also auch bei einem örtlich veränderlichen Dielektrikum die Ansicht aussprechen, daß die Raumdichte der Ladung durch die Divergenz eines Vektors $(u_e v_e w_e)$ bestimmt ist, und es ist Sache der Erfahrung, seine Abhängigkeit von den durch die Potentialgradienten gegebenen Kräften zu ermitteln. Der Satz vom Zusammenhange der Raumdichte mit $u_e v_e w_e$ bleibt Hypothese, mag man auch zur Veranschaulichung derselben Maxwells „displacement" heranziehn. Vorderhand gilt er erfahrungsgemäß für *elektrostatische* Erscheinungen.

Gibt man — wieder hypothetisch — seine Gültigkeit zu für zeitlich veränderliche Zustände in *ruhenden* Körpern, so ergibt sich aus der weiteren Vorstellung, daß wahre Elektrizität aus einem ruhenden Raume nur durch Leitungsströme $(\alpha \beta \gamma)$ entfernt werden kann, der vorderhand nur eine Paraphrase derselben Vorstellung bildende Satz, daß der totale Strom mit den Komponenten $(\partial u_e/\partial t).(1/4\pi) + \alpha$ etc. solenoidal verteilt ist. Erst die weitere Annahme, daß auch die ersten Anteile desselben $\partial u_e/\partial t . 1/4\pi$ etc. magnetische Wirkungen ausüben, führt zu den durch die Erfahrung bestätigten Maxwellschen Gleichungen. Ob der Satz von dem Zusammenhange des ϱ mit der Divergenz $u_e v_e w_e$ wahr bleibt auch bei bewegten Medien, darüber kann nur die Erfahrung entscheiden, keineswegs kann man im Vorhinein behaupten, daß die Größe ϱ durch die Divergenz von $u_o v_e w_e$ definiert sei. Die Mosottische Theorie der Dielektrika geht insofern weiter, als sie auch hier im Verein mit den Hertzschen Gleichungen eine bestimmte Aussage zuläßt.

V.

An Stelle der zweiten Gruppe der Hertzschen Gleichungen, die bekanntermaßen mit den Versuchen von Fizeau und Eichenwald im Widerspruche sind, haben bei der gegenwärtigen Sachlage die Lorentzschen zu treten. Es ist nicht notwendig, ihrer Herleitung die Elektronentheorie zugrunde zu legen.

Wir wählen folgendes einfache, allerdings empirische Verfahren. Wir definieren den Totalkurrent durch den Wirbel der magnetischen Kraft, wodurch solenoidale Verteilung derselben ausgesprochen ist. Seine empirisch *bekannten* Teilkomponenten sind:

1. Der Ohmsche Strom mit den Dichten α, β, γ, die definiert sein sollen als gegebene Funktionen der elektrischen Kraft.

2. Der Rowlandstrom, dessen Dichte definiert ist durch das Produkt der an der Materie haftenden *freien* Elektrizität und der Relativgeschwindigkeit der Materie gegenüber einem charakteristischen System. Die Einführung der *freien* Elektrizität ist notwendig zufolge der Versuche von Eichenwald.

3. Der Polarisationsstrom, welcher die Änderung der elektrischen Ladungen der Oberflächenelemente eines materiellen Raumteilchens zu besorgen hat, wenn sich die elektrischen Momente $A\,B\,C$ ändern.

Die Komponenten dieser Stromdichte seien α_p, β_p, γ_p.

Die obengenannten bekannten Teilströme ergänzen wir noch durch unbekannte Stromkomponenten $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$, die so zu wählen sind, daß die Gesamtsumme einen solenoidal verteilten Totalstrom ergibt. Der *einfachste* der hier möglichen Fälle führt zu den Lorentzschen Gleichungen, wenn mir noch annehmen, daß *wahre* Ladung aus einem Raumelemente nur durch Konvektion und Ohmsche Ströme weggeführt werden kann. Es sei wieder $x\,y\,z$ ein charakteristisches Koordinatensystem, $a\,b\,c$ die Geschwindigkeiten der Materie in demselben.

Der Ausdruck der zuletzt angeführten Hypothese ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a\,\varrho + \alpha) + \frac{\partial}{\partial y}(b\,\varrho + \beta) + \frac{\partial}{\partial z}(c\,\varrho + \gamma) = 0,$$

oder nach Einführung der Vektoren

$$U_e = u_e - \frac{c v_m - b w_m}{V}, \quad V_e, \quad W_e, \tag{26}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U_e}{\partial t} + a\varrho + \alpha\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_e}{\partial t} + b\varrho + \beta\right) \\ \qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial W_e}{\partial t} + c\varrho + \gamma\right) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Die Komponenten der Rowlandschen Stromdichte sind:

$$a\varrho_f, \quad b\varrho_f, \quad c\varrho_f,$$

wobei

$$\varrho_f = \varrho - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial z}. \tag{28}$$

Etwas umständlicher ist die Herleitung der Stromdichten α_p, β_p, γ_p.

Die Polarisationshypothese stellt sich vor, daß es möglich sei, ein Dielektrikum in unendlich kleine Volumenelemente derart zu teilen, daß in jedem derselben die Gesamtsumme der durch Polarisation entstandenen elektrischen Massen immer Null bleibt. Sie verlegt diese Ladungen in die Oberflächen der Elemente, und definiert die Dichten derselben durch die Normalkomponente

$$A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz$$

eines Vektors ABC, der in einem und demselben Volumenelement als konstant vorausgesetzt wird. Ist das Volumenelement speziell ein den Koordinatenachsen paralleles Prisma, so sind die Ladungsdichten an den einzelnen Prismaflächen $\pm A$, $\pm B$, $\pm C$, und natürlich identisch mit den auf die Raumeinheit entfallenden elektrischen Momenten. Bleibt das Volumenelement an seiner Stelle und ändert sich in der Zeit dt A um dA etc., so muß während derselben ein Ladungsstrom bestehen, welcher jeder Flächeneinheit auf der negativen Prismenseite die positive Menge dA entzieht, um sie zur positiven Seite zu transportieren. Die Dichtekomponenten des Ladungsstromes sind also $\partial A/\partial t$, $\partial B/\partial t$, $\partial C/\partial t$. Ist das Dielektrikum in Bewegung begriffen, so wird der Schwerpunkt

eines prismatischen Volumenelementes in der Zeit dt an eine andere Stelle gerückt, wo ABC die Werte

$$A' = A + dt\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}a + \frac{\partial A}{\partial y}b + \frac{\partial A}{\partial z}c\right) \text{ etc.}$$

besitzen.

Die im Augenblicke t der positiven z-Achse entgegenblickende und auf ihr senkrechte Prismenfläche ω wird in $\omega' = \omega + \delta\omega$ übergehen und ihre Normale n wird sich gegen die z-Achse neigen, weil das Prisma um Achsen, die parallel zu x und y durch den Schwerpunkt gelegt sind, gewisse Drehgeschwindigkeiten besitzt ($\partial c/\partial y$ um die x-Achse, $-\partial c/\partial x$ um die y-Achse).

Die Dichte der positiven Elektrizität auf der Fläche ω in ihrer neuen Stellung ist also

$$A'\cos nx + B'\cos ny + C'\cos nz.$$

Es ist nun bis auf Größen der Ordnung dt^2

$$\cos nz = 1, \quad \cos nx = -\frac{\partial c}{\partial x}dt, \quad \cos ny = -\frac{\partial c}{\partial y}dt.$$

Infolgedessen ist die Gesamtladung auf der Fläche ω' zur Zeit $t + dt$

$$e' = \omega\left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega}\right)\left(C' - A'\frac{\partial c}{\partial x}dt - B'\frac{\partial c}{\partial y}dt\right),$$

oder bis auf Größen höherer Ordnung

$$e' = \omega\left(C' - A\frac{\partial c}{\partial x}dt - B\frac{\partial c}{\partial y}dt + \frac{\delta\omega}{\omega}C\right).$$

Die Ladung e zur Zeit t ist $e = \omega C$.

Daher die der z-Achse parallele Komponente γ_p der Ladungsstromdichte wegen

$$\delta\omega = \omega\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)dt,$$

$$\gamma_p = \frac{e' - e}{\omega\, dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + a\frac{\partial C}{\partial x} + b\frac{\partial C}{\partial y} + c\frac{\partial C}{\partial z}$$
$$- \left(A\frac{\partial c}{\partial x} + B\frac{\partial c}{\partial y} + C\frac{\partial c}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right),$$

oder

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_p = {} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(aC - Ac) - \frac{\partial}{\partial y}(Bc - Cb) \\ & + c\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Addiert man hierzu die Komponenten des Leitungs- und Rowlandstromes, sowie noch die unbekannte Komponente γ_0, so ist die z-Komponente des Totalkurrents γ_t

$$(30)\quad \gamma_t = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(aC - Ac) - \frac{\partial}{\partial y}(Bc - Cb) + c\varrho + \gamma_0 + \gamma.$$

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich α_t und β_t.

Solenoidale Verteilung fordert

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial x} + \frac{\partial \beta_t}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_t}{\partial z} = 0.$$

Führen wir die eben angedeutete Operation aus und benutzen Gleichung (27), so folgt zur Bestimmung von $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$ die Gleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \alpha_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U_e}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \beta_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial W_e}{\partial t}\right).$$

Man erfüllt dieselbe am einfachsten durch Nullsetzung der hinter den Derivationssymbolen stehenden Klammerausdrücke. Die hieraus folgenden Werte $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$ sind in (30) einzusetzen.

Da im elektrostatischen Maße die z-Komponente der Dichte des Totalstromes durch

$$\frac{V}{4\pi}\left(\frac{\partial X_m}{\partial y} - \frac{\partial Y_m}{\partial x}\right)$$

gegeben ist, und einen anderen Wert die Gleichung (30) liefert, so folgt durch Gleichstellung derselben die Gleichungenreihe

$$(31)\quad \begin{cases} V\left[\dfrac{\partial(X_m - \bar{X}_m)}{\partial y} - \dfrac{\partial(Y_m - \bar{Y}_m)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial W_e}{\partial t} + 4\pi\varrho c + 4\pi\gamma, \\ V\left[\dfrac{\partial(Y_m - \bar{Y}_m)}{\partial z} - \dfrac{\partial(Z_m - \bar{Z}_m)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial U_e}{\partial t} + 4\pi\varrho a + 4\pi\alpha, \\ V\left[\dfrac{\partial(Z_m - \bar{Z}_m)}{\partial x} - \dfrac{\partial(X_m - \bar{X}_m)}{\partial z}\right] = \dfrac{\partial V_e}{\partial t} + 4\pi\varrho b + 4\pi\beta. \end{cases}$$

Dabei ist

$$(32)\quad \begin{cases} V\bar{X}_m = 4\pi(Cb - Bc), \quad V\bar{Y}_m = 4\pi(Ac - Ca), \\ V\bar{Z}_m = 4\pi(Ba - Ab). \end{cases}$$

Der Zusatzstrom

$$\alpha_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_e}{\partial t} - 4\pi\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(X_e - \bar{X}_e)$$

(laut (19)) ist proportional mit dem Zeitgradienten der um die *Faradaykräfte* verminderten elektrischen Kräfte.

Die Gleichungen (31), (32), ferner (1), (3), (21), (22) sind identisch mit dem Lorentzschen Gleichungssysteme. Sie gelten für ein charakteristisches Bezugsystem, können daher auch mit den negativen Versuchsergebnissen von Michelson und den nicht minder wichtigen von Trouton und Noble[1]) in Einklang gebracht werden, wenn statt der Lorentzschen Ätherhypothese jene von Stokes zugrunde gelegt wird.

Es erübrigt nur noch die Erklärung der Aberration.

Zu diesem Behufe transformieren wir zuerst die Gleichungen (31), (32) auf ein beliebiges gegebenes Koordinatensystem $x'y'z'$, demgegenüber das charakteristische System in vorgeschriebener relativer Bewegung begriffen ist.

Die gegenseitige Stellung beider Koordinatensystem ist bestimmt durch die Koordinaten $x' = f$, $y' = g$, $z' = h$ des Ursprunges O des Systems $Oxyz$ und durch das Schema der Richtungskosinusse

	x'	y'	z'
x	λ_1	λ_2	λ_3
y	μ_1	μ_3	μ_3
z	ν_1	ν_2	ν_3

Die Größen $f\,g\,h$, $\lambda\,\mu\,\nu$ sind vorgeschriebene Zeitfunktionen zufolge freier Wahl der Lage des $O'x'y'z'$-Systems.

Die Vektorkomponenten $\bar{X}_m\,\bar{Y}_m\,\bar{Z}_m$ enthalten neben den elektrischen Momenten $A\,B\,C$ noch die auf $Oxyz$ bezogenen Geschwindigkeiten $a\,b\,c$ eines materiellen Punktes $x\,y\,z$ (bez. $x'y'z'$). Die Komponenten parallel den Achsen $x'y'z'$ sollen mit $\bar{\bar{X}}_m\,\bar{\bar{Y}}_m\,\bar{\bar{Z}}_m$ bezeichnet werden. Es ist dann (vgl. Gleichung (32))

$$(33)\qquad \bar{\bar{X}}_m = \lambda_1\,\bar{X}_m + \mu_1\,\bar{Y}_m + \nu_1\,\bar{Z}_m = \frac{4\pi}{V}(C'b'' - B'c'') \text{ etc.},$$

wobei $A'\,B'\,C'$ die den $x'y'z'$ parallelen Komponenten von $A\,B\,C$

1) F. T. Trouton u. H. R. Noble, London Trans. A. 202. p. 165. 1903.

bedeuten. Die in (33) vorkommenden Projektionen der Relativgeschwindigkeiten $a\,b\,c$ auf die neuen Achsen $x'\,y'\,z'$ sind gegegeben durch die Relationen

$$a'' = \lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c \text{ etc.} \tag{34}$$

In ähnlicher Weise seien $U_e''\,V_e''\,W_e''$ die Komponenten von $U_e\,V_e\,W_e$ bezüglich der $x'\,y'\,z'$-Achsen. Also (vgl. (26))

$$U_e'' = \lambda_1 U_e + \mu_1 V_e + \nu_1 W_e = u_e' - \frac{c''\,v_m' - b''\,w_m'}{V}. \tag{33a}$$

Hierin bedeuten $u_e'\,v_e'\,w_e'$, bez. $u_m'\,v_m'\,w_m'$ Projektionen des elektrischen bez. magnetischen Momentes auf die neuen Achsen. In ähnlicher Weise ist $X_e'\,Y_e'\,Z_e'$, $X_m'\,Y_m'\,Z_m'$ zu verstehen.

Ferner gilt

$$x' = f + x\lambda_1 + y\mu_1 + z\nu_1 \text{ etc.} \tag{35}$$

Die Geschwindigkeiten eines materiellen Punktes $P(x'\,y'\,z')$ bezogen auf diese Achsen sind a', b', c', wobei

$$\frac{dx'}{dt} = a' = \left(\frac{df}{dt} + x\frac{d\lambda_1}{dt} + y\frac{d\mu_1}{dt} + z\frac{d\nu_1}{dt}\right) + \lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c,$$

oder auch

$$a' = a'' + a_0, \quad b' = b'' + b_0, \quad c' = c'' + c_0, \tag{36}$$

wobei

$$\frac{df}{dt} + x\frac{d\lambda_1}{dt} + y\frac{d\mu_1}{dt} + z\frac{d\nu_1}{dt} = a_0 = \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)_{xyz},$$

$$b_0 = \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)_{xyz}, \qquad c_0 = \left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)_{xyz}.$$

Dabei bedeuten $a_0\,b_0\,c_0$ die Geschwindigkeiten des Punktes P, die er besitzen würde, falls er mit $O\,x\,y\,z$ starr verbunden wäre.

Drückt man in a_0 die $x\,y\,z$ durch die $x'\,y'\,z'$ aus, so folgt

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)_{xyz} = a_0 = \frac{df}{dt} + (y' - g)r - (z' - h)q, \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)_{xyz} = b_0 = \frac{dg}{dt} + (z' - h)p - (x' - f)r, \\ \left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)_{xyz} = c_0 = \frac{dh}{dt} + (x' - f)q - (y' - g)p, \end{cases} \tag{37}$$

wobei gesetzt ist

$$p = \frac{d\lambda_2}{dt}\lambda_3 + \frac{d\mu_2}{dt}\mu_3 + \frac{d\nu_2}{dt}\nu_3,$$

$$q = \frac{d\lambda_3}{dt}\lambda_1 + \frac{d\mu_3}{dt}\mu_1 + \frac{d\nu_3}{dt}\nu_1,$$

$$r = \frac{d\lambda_1}{dt}\lambda_2 + \frac{d\mu_1}{dt}\mu_2 + \frac{d\nu_1}{dt}\nu_2.$$

Die in (31) linker Hand vorkommenden Größen in der eckigen Klammer sind Wirbelvektoren der Größen $X_m - \overline{X}_m$ etc. Wir multiplizieren in (31) der Folge nach mit ν_3, λ_3, μ_3, addieren und bekommen linker Hand die Projektion des Wirbelvektors auf die z'-Achse, daher

$$(38)\quad \begin{cases} V\left[\frac{\partial}{\partial y'}(X_m' - \overline{X}_m) - \frac{\partial}{\partial x'}(Y_m' - \overline{Y}_m)\right] \\ \quad = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda_3 U_e + \mu_3 V_e + \nu_3 W_e)_{xyz} \\ \quad - \left(U_e \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} + V_e \frac{\partial \mu_3}{\partial t} + W_e \frac{\partial \nu_3}{\partial t}\right) + 4\pi\varrho c'' + 4\pi\gamma'. \end{cases}$$

Dabei ist γ' die Ohmsche Stromdichte parallel der z'-Achse. Für den ersten Summanden rechts in (38) läßt sich auch schreiben:

$$\left(\frac{\partial W_e''}{\partial t}\right)_{xyz} = \left(\frac{\partial W_e''}{\partial t}\right)_{x'y'z'} + \frac{\partial W_e''}{\partial x'} \cdot \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)_{xyz} + \frac{\partial W_e''}{\partial y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)_{xyz} + \frac{\partial W_e''}{\partial z'}\left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)_{xyz},$$

oder mit Rücksicht auf (37)

$$(39)\quad \left(\frac{\partial W_e''}{\partial t}\right)_{xyz} = \left(\frac{\partial W_e''}{\partial t}\right)_{x'y'z'} + \frac{\partial W_e''}{\partial x'} a_0 + \frac{\partial W_e''}{\partial y'} b_0 + \frac{\partial W_e''}{\partial z'} c_0.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung beruht auf der Überlegung, daß W_e'' auch als Funktion von $x'\,y'\,z'\,t$ darstellbar ist.

Im zweiten Klammerausdruck rechts in (38) ersetzen wir die $U_e V_e W_e$ durch $U_e = U_e'' \lambda_1 + V_e'' \lambda_2 + W_e'' \lambda_3$ etc. und erhalten

$$U_e \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} + V_e \frac{\partial \mu_3}{\partial t} + W_e \frac{\partial \nu_3}{\partial t} = q\, U_e'' - p\, V_e''.$$

Wir schreiben noch in (39)

$$\frac{\partial W_e''}{\partial z'} = 4\pi\varrho - \frac{\partial U_e''}{\partial x'} - \frac{\partial V_e''}{\partial y'},$$

bemerken, daß infolge von (37) gilt:

$$\frac{\partial a_0}{\partial x'} = 0, \quad q = \frac{\partial c_0}{\partial y'}, \quad \frac{\partial b_0}{\partial y'} = 0, \quad p = -\frac{\partial c_0}{\partial y'},$$

und setzen in (38) ein. Es ergibt sich dann nach einigen Kontraktionen

$$(40)\quad \begin{cases} V\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(X_m' - \overline{\overline{X}}_m + \frac{V_e'' c_0 - W_e'' b_0}{V}\right)\right. \\ \qquad \left. - \frac{\partial}{\partial x'}\left(Y_m' - \overline{\overline{Y}}_m + \frac{W_e'' a_0 - U_e'' c_0}{V}\right)\right] \\ \qquad = \left(\frac{\partial W_e''}{\partial t}\right)_{x'y'z'} + 4\pi\varrho(c'' + c_0) + 4\pi\gamma'. \end{cases}$$

Statt der in $\overline{\overline{X}}_m \ldots U_e'' \ldots$ vorkommenden Geschwindigkeiten $a'' b'' c''$ kann man (vgl. (36)) auch $a' - a_0$, $b' - b_0$, $c' - c_0$ setzen. Es bedeutet hierin $a' b' c'$ die totale Geschwindigkeit eines materiellen Punktes $x' y' z'$ gegenüber dem System $x' y' z'$, und $a_0 b_0 c_0$ jenen Anteil derselben, welcher infolge der Relativbewegung des xyz-Systems diesem Punkte zukäme, falls er mit $Oxyz$ starr verbunden wäre.

Im Begriffe des charakteristischen Bezugsystems ist die Zugehörigkeit eines räumlich ausgedehnten Gültigkeitsgebietes enthalten. Ist dasselbe unendlich klein, d. h. das charakteristische System von Ort zu Ort variabel, so hat man sich den ganzen Raum in unendlich kleine Volumenelemente geteilt zu denken, derart, daß die Größen, welche die Relativgeschwindigkeit der zugehörigen Koordinatensysteme definieren, sich von einem zum anderen Elemente unendlich wenig, aber sprungweise ändern. Infolge dieser Festsetzung wird die Anwendung der Formeln (40) ermöglicht. Den Ursprung des zu einem Volumelement gehörigen Koordinatensystems wird man passend in das Volumelement selbst verlegen, so daß sich die Differenzen $x' - f$ etc. für Punkte dieses Gebietes in limite auf Null reduzieren.

Die Größen $a_0 b_0 c_0$ bedeuten dann zufolge (37) die Geschwindigkeiten des Koordinatenursprunges selbst, also im Sinne der Ätherhypothese die Geschwindigkeit des an einer Raumstelle befindlichen Ätherteilchens, wogegen $a' b' c'$ die Geschwindigkeit des an derselben Stelle vorhandenen materiellen Teilchens bedeuten; die Differenzen $a'' = a' - a_0$ etc. stellen die Relativgeschwindigkeit der Materie dem Äther gegenüber vor.

Handelt es sich um den zwischen den Weltkörpern vorhandenen Raum, also speziell um Erklärung der Aberration, so ist

$$A' = B' = C' = 0,$$

daher

$$\overline{\overline{X}}_m = \overline{\overline{Y}}_m = \overline{\overline{Z}}_m = 0$$

zu setzen, ferner ist

$u_e' = X_e'$ etc., $u_m' = X_m'$ etc. und $\varrho = 0$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$,

ferner

$$\overline{\overline{U}}_e = X_e' - \frac{c'' v_m' - b'' w_m'}{V}.$$

Als Koordinatensystem $x'y'z'$ soll ein mit der Erde festverbundenes System angenommen werden. Die Relativgeschwindigkeit des Fixsternäthers zur Erde beträgt etwa *30 km/sec*, daher ist a_0/V etc. eine Größe der Ordnung 10^{-4}. Derselben Ordnung ist auch die Aberrationskonstante.

Von der Relativgeschwindigkeit der Materie $a''b''c''$ zum Bezugsystem in einem Punkte des Weltraumes wissen wir nichts. Auf unserem Planeten ist es eine Größe von der Ordnung der Luftströmungen, deren Geschwindigkeit nur Bruchteile eines Prozentes von 30 km/sec erreicht, daher bei Erklärung der Aberration vernachlässigt werden kann. Dieselbe Annahme machen wir auch bezüglich der Punkte des Weltraumes und setzen daher $a'' = b'' = c'' = 0$. Es darf dann für $\overline{\overline{U}}_e$, $\overline{\overline{V}}_e$ etc. X_e', Y_e' etc. geschrieben werden. Wir haben dann an Stelle von (40) die Gleichungen

$$(41)\quad \frac{\partial}{\partial y'}\left(X_m' + \frac{Y_e' c_0 - Z_e' b_0}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial x'}\left(Y_m' + \frac{Z_e' a_0 - X_e' c_0}{V}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial Z_e'}{\partial t} \text{ etc.}$$

Die erste Gruppe der Hertzschen Gleichungen (1) behält ihre Form in jedem Koordinatensystem bei: Man hat also an Stelle von (1)

$$(42)\quad \frac{\partial (Y_e' - Y_e')}{\partial x'} - \frac{\partial (X_e' - X_e')}{\partial y'} = \frac{1}{V}\frac{\partial w_m'}{\partial t},$$

wobei

$$X_e' = \frac{c' v_m' - b' w_m'}{V} \text{ etc.}$$

Hierin bedeutet $a'b'c'$ die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes $x'y'z'$.

Im Sinne der obigen Hypothese läßt sich für $a' = a_0 + a''$ etc. einfach a_0 etc. setzen. An Stelle von (42) tritt dann die zweite Gruppe der Gleichungen

$$(43)\quad \frac{\partial}{\partial x'}\left(Y_e' - \frac{a_0 Z_m' - c_0 X_m'}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(X_e' - \frac{c_0 Y_m' - b_0 Z_m'}{V}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial Z_m'}{\partial t}.$$

Die Gleichungen (41) und (43) sind nichts weiter als die beiden Gruppen der Hertzschen Gleichungen, angewendet auf einen in Bewegung begriffenen Äther. Daß sich aus denselben die Aberrationserscheinung erklären läßt, hat schon Lorentz[1]) nachgewiesen, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten $a_0\, b_0\, c_0$ ein Potential besitzen. Diese Annahme ist schwer vereinbar mit der Vorstellung, daß der Äther an den Weltkörpern haftet, es sei denn, daß man voraussetzt, derselbe sei ein den Gravitationskräften unterworfenes Gas, welches dann in der Nähe derselben außerordentlich stark verdichtet sein muß, wenn Gleiten längs derselben *nur durch Gravitationskräfte* verhindert werden soll.[2]) Es bietet sich noch eine andere Möglichkeit. Der Äther der elektromagnetischen Theorien, welchem die mechanischen Eigenschaften des Fresnelschen Äthers nicht zugeschrieben werden müssen, kann ein aus den Weltkörpern und ihrer Gashülle langsam emanierendes Gas sein, dessen Bewegung relativ zu denselben sehr gering ist, das aber bei einem gewissen niedrigen Grade von Dichtigkeit sich bis in den Weltraum fortsetzen kann, wo es sich wirbelfrei bewegen wird. Der Partialdruck dieses Gases p soll mit seiner Dichte ϱ durch die Poissonsche Relation $p = C\varrho^\gamma$; $\gamma = c_p/c_v$ verknüpft sein. Es seien ferner $\bar{p}$, $\bar{\varrho}$ die Werte an der Oberfläche eines Weltkörpers vom Radius R, g die Fallbeschleunigung und $\bar{T}$ die absolute Temperatur an seiner Oberfläche. Die hydrostatischen Gleichungen ergeben dann für eine Entfernung r vom Zentrum des Weltkörpers

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}} - \frac{g R(\gamma-1)}{\gamma}\left(1 - \frac{R}{r}\right).$$

Setzt man

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}\frac{T}{273},$$

so ergibt sich

$$T = \bar{T} - \frac{g R(\gamma-1)}{\gamma}\,\frac{273\,\varrho_0}{p_0}\left(1 - \frac{R}{r}\right).$$

Soll sich das Gas ins Unendliche fortsetzen, muß daselbst die absolute Temperatur T positiv bleiben. Dies führt zu

$$\varrho_0 \leqq \frac{p_0 \bar{T}}{g R}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{1}{273}.$$

1) H. A. Lorentz, Proceed. Amsterd. Akad. 1898/99. p. 443.

2) Planck in derselben Abh. von Lorentz.

Ein Gas, welches von einem Fixstern aus ins Unendliche gelangen kann, wird auch von der Erde *nicht* festgehalten werden können. Das Nächstliegende wäre also, unter

$$g(=280\,\mathrm{m}),\quad R(=7.10^8\,\mathrm{m}),\quad \bar{T}(=6000)$$

die der Sonne zugehörigen Werte zu verstehen. Für das als einatomig vorausgesetzte Gas setzen wir $\gamma = 5/3 = 1{,}66$. Zufolge der letzten Formel ist das Gas etwa 3200 mal leichter als zweiatomiger Wasserstoff, sein Atomgewicht $^1/_{1600}$. Diesem Grenzwerte dürfte es nahe kommen, da T im Weltraum dem Werte $\bar{T}$ gegenüber zu vernachlässigen sein wird. Hieran ließen sich interessante Spekulationen knüpfen, die jedoch dem in dieser Abhandlung vorgesteckten Ziele ferne liegen.

Prag, 11. Juni 1907.

(Eingegangen 13. Juni 1907.)

8. *Über Hochfrequenzladung; von Alexander Jollos.*

(Auszug aus der Straßburger Inaugural-Dissertation.)

Einleitung.

In den gebräuchlichen Systemen zur Erzeugung schneller elektrischer Schwingungen wird die Kapazität eines Kondensatorkreises durch die langsamen Oszillationen der Sekundärspule eines Induktors geladen. Dieser langsamen Ladung gegenüber hat eine Ladung, die selbst wieder durch schnelle Schwingungen erfolgt, zwei Vorzüge. Einmal nämlich bietet sie den sicheren Vorteil, daß sie gestattet, auf die Isolation der zu ladenden Kapazität weniger Wert zu legen, daher z. B. auch schlecht leitende Flüssigkeiten als Dielektrika zu verwenden. Ferner aber läßt es sich nachweisen, daß bei dieser Art von Ladung die Spannung an der Funkenstrecke nicht dieselbe zu sein braucht, wie die an der geladenen Kapazität. Man kann bei gleicher eingeladener Energie mit einer kleineren Funkenstrecke, möglicherweise also, sofern der Funkenwiderstand mit der Funkenlänge abnimmt, mit kleinerer Dämpfung arbeiten.

Eine solche Ladung durch schnelle Schwingungen, kürzer als Hochfrequenzladung bezeichnet, erfolgt offenbar in jeder Anordnung, in der ein aus Selbstinduktion und Kapazität bestehender Kreis durch die Schwingungen eines anderen Kondensatorkreises zum Mitschwingen erregt wird. Da jedoch im erregten Kreis im allgemeinen zwei Schwingungen stattfinden, so erhält man auf diese Weise keinen einfachen Schwingungsvorgang, wie bei langsam geladenen Kondensatorkreisen. Mit einem einfachen Schwingungsvorgang unter Verwendung induktiv gekoppelter Kreise hat man es bei einer von Fleming[1]) angegebenen und von der Marconigesellschaft be-

1) J. A. Fleming, Electrician **50.** p. 140. 1902/03 und **52.** p. 85. 1903/04.

nutzten Anordnung zu tun. Ob die gute Wirkung dieser Anordnung der Hochfrequenzladung zuzuschreiben ist oder besonders günstigen Transformierungsbedingungen, läßt sich von vornherein nicht entscheiden. Ein System mit fester Koppelung unter Benutzung mehrerer Funkenstrecken hat neuerdings Czudnochowski versucht.[1]) Diese Anordnungen arbeiten jedoch unter beträchtlichem Energieverlust während des Ladevorgangs.

Es lag somit die Aufgabe vor, eine Anordnung für Hochfrequenzladung zu finden, die einerseits in dem geladenen Kondensatorkreis den einfachen Schwingungsvorgang erzeugte, der in den bisher gebräuchlichen, vom Induktor aus langsam geladenen Kreisen vor sich geht und mit genügender Genauigkeit durch die Thomsonsche Gleichung dargestellt wird, — und die andererseits während des Ladevorgangs keine großen Energieverluste aufwiese.

Diesen Ansprüchen schien eine von Mandelstam und Papalexi[2]) ursprünglich zur Erzeugung phasenverschobener Schwingungen angegebene Anordnung zu genügen. Angesichts ihrer praktischen Bedeutung stellte sich Verf. auf Vorschlag von Dr. Mandelstam die Aufgabe, sie theoretisch und experimentell genauer zu untersuchen. Wie im folgenden gezeigt wird, gestattet die Anordnung, die Funkenlänge in einem gewissen Spielraum zu variieren, und zwar bis etwa zu der der halben Spannung entsprechenden Länge zu verkleinern, ohne daß die Spannung an der Kapazität (oder die Stromstärke, die eingeladene Energie) variiert. Daher konnte man, abgesehen von den oben genannten praktischen Gesichtspunkten, neue Aufschlüsse über den Charakter der Funkenentladung erwarten, wenn man mit Hilfe dieser Methode den Einfluß von Änderungen der Funkenlänge und von Änderungen der Spannung an der Kapazität (Stromstärke, Energie) auf die Dämpfung der Schwingungen (den Funkenwiderstand) getrennt voneinander untersuchte. Schließlich schien eine Prüfung der Wirkungsweise der genannten Anordnung um so mehr erwünscht, als sie als Hilfsvorrichtung zum Studium des optischen

1) W. B. v. Czudnochowski, Physik. Zeitschr. 7. p. 183. 1906.
2) L. Mandelstam u. N. Papalexi, Physik. Zeitschr. 7. p. 303. 1906.

Verhaltens schlecht leitender Flüssigkeiten im elektrischen Felde auch in der Optik Eingang gefunden hat.[1])

Schema der Anordnung.

Das Schema der genannten Anordnung ist in Fig. 1 dargestellt. C_1, C_2 sind Kapazitäten, L_1, L_2 Selbstinduktionen, S ist ein sehr großer Widerstand oder eine sehr große Selbstinduktion. C_1 wird durch die langsamen Schwingungen des

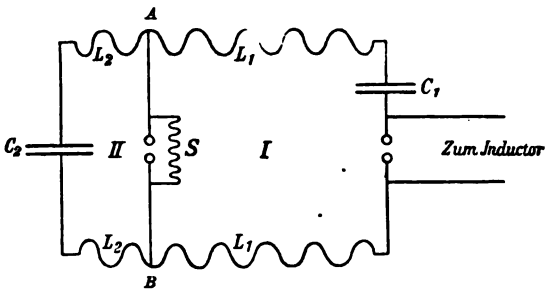


Fig. 1.

Induktors auf dem Wege durch S geladen und entlädt sich in schnellen Oszillationen durch den von L_1, L_2 und C_2 gebildeten, im folgenden als Gesamtkreis bezeichneten Kreis. Hierbei wird C_2 mit Hochfrequenz auf Kosten von C_1 geladen. Wird nun zwischen zwei passend zu wählenden Punkten A und B des Kreises eine zweite Funkenstrecke eingeschaltet und so eingestellt, daß sie erst zu einer Zeit durchschlägt, zu der die gesamte Ladung von C_1 auf C_2 übergegangen ist, so wird ein Zurückschwingen der Ladung nach C_1 verhindert, und die weiteren Schwingungen erfolgen innerhalb des Kreises $A\,C_2\,B$ mit der Kapazität C_2 und der Selbstinduktion L_2, der weiterhin mit II bezeichnet werde.

I. Mathematische Theorie.

Für ungedämpfte Schwingungen.

Die genauere mathematische Ausführung gestaltet sich, zunächst unter Vernachlässigung des Widerstandes, also der

1) E. Baetge, Straßburger Dissertation 1907; vgl. auch G. Aeckerlein, Physik. Zeitschr. 7. p. 594. 1906.

Dämpfung, wie folgt: Sei C und L die aus C_1 und C_2 bez. L_1 und L_2 resultierende Kapazität und Selbstinduktion des Gesamtkreises, ferner q_1 und q_2 die variablen Ladungen von C_1 bez. C_2, i die Stromstärke, so lauten die Gleichungen für den Gesamtkreis:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = i. \tag{2}$$

Unter Benutzung der Anfangsbedingungen, daß für $t = 0$, $i = 0$, $q_2 = 0$ und q_1 gleich einer vom Induktor aus der Kapazität C_1 erteilten Ladung $C_1 V_1$ ist, ergibt sich die Lösung der Gleichungen:

$$q_1 = C V_1 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + C V_1 \cdot \frac{C_1}{C_2},$$

$$q_2 = C V_1 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}} - C V_1,$$

$$i = -\frac{C V_1}{\sqrt{LC}} \sin\frac{t}{\sqrt{LC}},$$

wo V_1 die Spannung bedeutet, auf die C_1 vom Induktor geladen wird. Zwischen zwei Punkten A und B, welche auf verschiedenen Seiten der Kapazität C_2 liegen, beträgt die Spannung

$$-V = L_2\frac{di}{dt} + \frac{q_2}{C_2},$$

also

$$V = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2}\left[\left(\frac{L_2 C_2}{LC} - 1\right)\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + 1\right].$$

Das zeitliche Maximum der Spannung tritt ein:

für $\frac{L_2 C_2}{LC} > 1$ zur Zeit $t = 0$,

für $\frac{L_2 C_2}{LC} < 1$ zur Zeit $t = \pi \cdot \sqrt{LC}$.

Am kleinsten wird dieses zeitliche Maximum für den Grenzfall

$$\frac{L_2 C_2}{LC} = 1 \quad \text{oder} \quad L_2 C_2 = LC = L_1 C_1,$$

es beträgt dann:

$$V = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2}$$

und ist überhaupt unabhängig von der Zeit.

Das Ergebnis der Rechnung läßt sich folgendermaßen aussprechen: Hält man die Kapazitäten C_1 und C_2 und die gesamte Selbstinduktion L konstant und läßt man die Punkte A und B, zwischen denen die zweite Funkenstrecke eingeschaltet wird, sich so bewegen, daß L_2 vom Werte L bis zum Werte 0 variiert (während gleichzeitig natürlich L_1 von 0 bis L wächst), so nimmt das mittels der Funkenstrecke beobachtbare zeitliche Maximum der Spannung zuerst ab vom Werte V_1 an der Stelle $L_2 = L$, d. h. an der Kapazität C_1, bis zum Werte $C_1 V_1 / C_1 + C_2$ an der Stelle, an der $L_2 C_2 = L_1 C_1 = L C$ ist, und dann wieder zu bis zum Werte $2 C_1 V_1 / C_1 + C_2$ an der Stelle $L_2 = 0$, d. h. an der Kapazität C_2. Und zwar tritt das Maximum der Spannung im ersten Teil, also bis zur Stelle $L_2 C_2 = L_1 C_1$ zur Anfangszeit ($t = 0$) ein, im zweiten Teil, also von der Stelle $L_2 C_2 = L_1 C_1$ bis zur Stelle $L_2 = 0$, nach einer halben Schwingung des Gesamtkreises ($t = \pi . \sqrt{L C}$).

Brauchbar für den gedachten Zweck — Erzielung der Hochfrequenzladung von C_2 mit daran anschließenden Oszillationen im Kreise II — ist nur der zweite Bereich, da nur in diesem die Ladung von C_2 nach einer halben Schwingung des Gesamtkreises, also gleichzeitig mit dem Maximum der Spannung an der zweiten Funkenstrecke, ihr Maximum erreicht. Zur Zeit $t = 0$ dagegen ist C_2 ungeladen und bleibt ungeladen, wenn man die zweite Funkenstrecke im ersten Bereich anbringt und durchschlagen läßt, da sie hier eben zur Zeit $t = 0$ durchschlägt und alsdann die Oszillationen in dem in der Figur mit I bezeichneten Kreis $A B C_1$ (der zwei Funkenstrecken enthält) verlaufen. Man muß also die Punkte A und B so wählen, daß $L_2 C_2 \leqq L_1 C_1$ (oder $L C$) ist. Gleichzeitig erkennt man, daß die Spannung, die C_2 erhält, dieselbe bleibt, wie man auch innerhalb dieses Bereiches die Punkte A und B wählen mag, daß man also mit einer bestimmten Spannung ($2 C_1 V_1 / C_1 + C_2$) an C_2 kleinere Spannungen an der Funkenstrecke kombinieren kann. Und zwar ist die Spannung an der Funkenstrecke im Verhältnis zu der an der Kapazität

am kleinsten, nämlich halb so groß ($= C_1 V_1 / C_1 + C_2$) im Grenzfalle $L_2 C_2 = L_1 C_1$. Man erhält also einen Kondensatorkreis, der, verglichen mit den bisher üblichen, bei gleicher Ladung der Kapazität, also gleicher Energie, eine kleinere und zwar bis halb so große Spannung an der Funkenstrecke, d. h. — für nicht zu lange Funken, wenn Spannung und Funkenlänge annähernd proportional sind — eine nur halb so lange Funkenstrecke besitzt.

Dieser Sachverhalt führte auf die Vermutung, es ließe sich auf diesem Wege die aus dem Funkenwiderstand resultierende Dämpfung herabsetzen, und ergab jedenfalls die bisher fehlende Möglichkeit, ceteris paribus den Einfluß von Änderungen der Energie oder des Stromes, der durch den Funken fließt, und von bloßen Änderungen der Funkenlänge auf den Widerstand des Funkens und damit auf die Dämpfung der Schwingungen zu *trennen* und *unabhängig voneinander* zu untersuchen.[1])

Die Kapazität C_1 hat zur Zeit $t = \pi \sqrt{L C}$, d. h. in dem Moment, in dem sie infolge Durchschlagens der zweiten Funkenstrecke aus dem weiteren Schwingungsvorgang ausgeschaltet wird, die Ladung:

$$q_1 = C V_1 \cdot \left(\frac{C_1}{C_2} - 1 \right).$$

Dieser Wert wird $= 0$, d. h. es wird die ganze ursprünglich in C_1 vorhandene Ladung an den Kreis II abgegeben, wenn $C_1 = C_2$ ist. Man arbeitet am sparsamsten, wenn man gleiche Kapazitäten C_1 und C_2 wählt.

Durch Einführung des Widerstandes, der in der vorstehenden Rechnung vernachlässigt wurde, wird an den Grundzügen des Resultates nichts Wesentliches geändert.[2])

Während für die vorstehende theoretische Untersuchung der Gesamtkreis als konstant und die Kreise I und II als innerhalb des Gesamtkreises variabel angesehen wurden, wird man in der Praxis hauptsächlich vor die Aufgabe gestellt,

1) Die von K. Simons (Ann. d. Phys. 13. p. 1044. 1904) hierfür angegebene Methode gewährt diese Möglichkeit nur für sekundär in einen Kondensatorkreis eingeschaltete Funkenstrecken, nicht aber für den Entladungsfunken selbst.

2) Vgl. die Durchrechnung für gedämpfte Schwingungen in der Dissertation.

einen *gegebenen* Kondensatorkreis zu laden. Man führt dies aus, indem man den gegebenen Kreis als Kreis II schaltet und als Ladevorrichtung einen dazu passenden Kreis I baut, der also jedenfalls der Bedingung $L_1 C_1 \geqq L_2 C_2$ genügen muß, und dessen Kapazität C_1 (wenn man sich an die Rechnung für ungedämpfte Schwingungen hält) zweckmäßig möglichst gleich der Kapazität C_2 des zu ladenden Kreises ist. Durch Variation von L_1 zwischen einem gegen L_2 sehr großen Wert und dem Wert $L_1 = L_2 C_2 / C_1$ kann man bei gleichbleibender primärer Funkenstrecke und gleicher Ladung von C_2 die Funkenlänge des gegebenen Kreises II bis etwa auf die Hälfte reduzieren.

II. Experimentelle Untersuchung.

a) Qualitative Prüfung.

Anordnung.

Für die experimentelle Untersuchung ergab sich zunächst die Aufgabe einer qualitativen Prüfung der Richtigkeit obiger Theorie. Zu diesem Zwecke wurde ein Aufbau genau nach dem Schema der Fig. 1 hergestellt. S war eine sehr große Selbstinduktion, C_1 und C_2 je eine Leidener Flasche aus englischem Flintglas, welche die gleiche Kapazität von je 1950 cm hatten. Die Selbstinduktion L des Gesamtkreises bestand aus zwei symmetrisch zwischen den Kapazitäten angeordneten geraden Solenoiden aus dickem, blankem Draht, von denen jedes in einem Versuch eine Länge von 78 cm, einen Windungsdurchmesser von 11,5 cm und die Windungszahl $53^1/_2$, in einem anderen eine Länge von 1 m, einen Windungsdurchmesser von 10 cm und die Windungszahl 40 hatte. An beliebigen Punkten A und B des blanken Drahtes dieser Solenoide konnten die Zuleitungen der zweiten Funkenstrecke angelegt und mit Hilfe des Funkens die Spannungen gemessen werden.

Spannungsgefälle.

Es ergab sich eine qualitativ befriedigende Bestätigung der Theorie, indem die Funkenlänge in der erwarteten Weise abnahm, wenn man mit den Punkten A und B von den Enden nach der Mitte rückte. Quantitative Übereinstimmung ist von vornherein nicht sehr wahrscheinlich, da die durchgeführte Rechnung für gedämpfte Schwingungen einen konstanten Wider-

stand R' der primären Funkenstrecke in Ansatz brachte, was um so mißlicher scheint, als hier gerade nur der Widerstand der ersten halben Schwingung in Frage kommt. Erwähnt sei, daß die Stelle des Funkenminimums gegenüber dem von der Theorie verlangten Wert $L_2 C_2 = L C$, oder hier $L_2 = {}^1/_2 L = L_1$, nach kleineren Werten von L_2 verschoben erschien.

„Erster" Funke.

Ob man sich links oder rechts von dieser Stelle befand, und ob also Hochfrequenzladung von C_2 stattfand oder nicht, dafür war das Aussehen des primären Funkens ein gutes Kriterium. Im ersteren Falle geht durch den primären Funken nur eine Halbschwingung, daher erscheint er „mager", als lichtschwache dünne Linie, im zweiten Falle gehen sämtliche Oszillationen durch Kreis I, und man erblickt einen normalen „fetten" Funken.[1])

Der magere Funke zeigt bei entsprechenden Bedingungen, spektroskopisch untersucht, fast nur das Spektrum der Luft, noch keine oder nur schwache Metallinien.[2])

Sprühen.

Ein zweites interessantes Kriterium für die Wirkungsweise der Anordnung bot bei größeren Spannungen — in der beschriebenen Anordnung, in der $C_1 = C_2 = 1950$ cm, aus je einer Flasche bestand, schon mit primären Funkenlängen von ca. 6 mm, und sehr schön bei 9—10 mm — das Sprühen der Kapazitäten. Es besteht in büschelförmigen Entladungen, die von den Flaschenbelegungen ausgehend längs der Oberfläche des Glases verlaufen und mit wachsender Spannung heller und länger werden. Lodge[3]) hat zuerst konstatiert, daß das Sprühen mit den Oszillationen zusammenhängt. In einem gewöhnlichen Kondensatorkreis sprüht die Kapazität desto lebhafter je kleiner ceteris paribus die Selbstinduktion ist. Einschalten von Widerstand setzt das Sprühen herab. Bei

1) L. Mandelstam u. N. Papalexi, Physik. Zeitschr. 7. p. 305. 1906.

2) Ausfürlicher in der Dissertation. Vgl. hierzu A. Schuster u. G. A. Hemsalech, Phil. Trans. 193. p. 189. 1899; G. A. Hemsalech, Compt. rend. 140. p. 1103 u. 141. p. 1227. 1905.

3) O. Lodge, Proc. of Roy. Soc. 50. p. 2. 1891.

gleichbleibender Schwingungszahl kann man die Stärke des Sprühens als bedingt ansehen durch den Stromeffekt $\int i^2 dt$. Die Berechtigung dieser Anschauung konnte in den im folgenden angegebenen Versuchen geprüft werden, indem man die Kapazitäten mit Geisslerröhren verband — das Leuchten der Röhren ging dem Sprühen parallel — oder auch durch die späteren quantitativen Messungen des Integraleffektes. Hat man sich auf diese Weise davon überzeugt, daß das Sprühen in der Tat einen qualitativen Vergleich verschiedener Spannungen an derselben Kapazität ermöglicht, so kann es als sehr bequemes und deutliches Kriterium für die Spannung dienen. Man findet dann folgende mit der Anordnung für Hochfrequenzladung gemachten Beobachtungen in Übereinstimmung mit der Theorie.

Bei genügend großer primärer Funkenstrecke und genügend gleichen Kapazitäten zeigt die durch Hochfrequenz geladene, dem ausschwingenden Kreis II angehörende Kapazität C_2 lebhaftes Sprühen, die langsam geladene, an den Oszillationen nur während einer Halbschwingung teilnehmende Kapazität C_1 einen kaum merklichen Lichtschein am Rande der Belegungen. Vergrößert man die zweite Funkenstrecke, so daß der Funke aussetzt und nunmehr der Gesamtkreis ausschwingt, so weisen beide Kapazitäten ein gleiches kleines Sprühen auf. Verkleinert man die zweite Funkenstrecke, während ihr Funke springt, so bekommt der Theorie zufolge C_2 nicht mehr die gesamte Ladung, C_1 behält eine Restladung, es erfolgen Schwingungen auch durch Kreis I und den Gesamtkreis. Dem entspricht in der Tat ein stetiges Sinken des Sprühens von C_2 und ein gleichzeitiges Steigen des Sprühens von C_1, bis bei sehr kleinem Funken C_2 fast dunkel wird, C_1 dagegen so lebhaft sprüht wie vorher bei voller Ladung C_2. Letzteres ist natürlich auch der Fall, wenn man die zweite Funkenstrecke von vornherein so anbringt, daß alle Oszillationen durch den Kreis I gehen und keine Hochfrequenzladung stattfindet. Ebenso kann man sich davon überzeugen, daß man innerhalb des Bereiches möglicher Hochfrequenzladung die Länge der zweiten Funkenstrecke variieren kann, ohne daß das Sprühen, also die Spannung an C_2 schwächer wird. Wählt man schließlich diesen Funken möglichst klein und lädt man dann zum Vergleich denselben Kondensatorkreis II in der gewöhnlichen Weise, langsam, direkt vom

Induktor aus, so erhält man wieder ein sehr viel kleineres Sprühen von C_2. Auch diese Beobachtung steht im Einklange mit der Theorie, derzufolge im Falle der Hochfrequenzladung mit demselben Funken eine bedeutend größere Spannung an der Kapazität verbunden werden kann.

Diese Versuche, die sich sehr gut zur Demonstration eignen, wurden hauptsächlich schon mit der weiter unten beschriebenen Anordnung für quantitative Messungen vorgenommen.

b) Quantitative Versuche.

Anordnung der Apparate.

Da durch diese qualitativen Beobachtungen eine weitgehende Übereinstimmung mit der Theorie gesichert war, wurde zu quantitativen Untersuchungen gemäß den in der Einleitung dargelegten Gesichtspunkten übergegangen. Diese bestanden in Messungen des thermischen Integraleffektes der

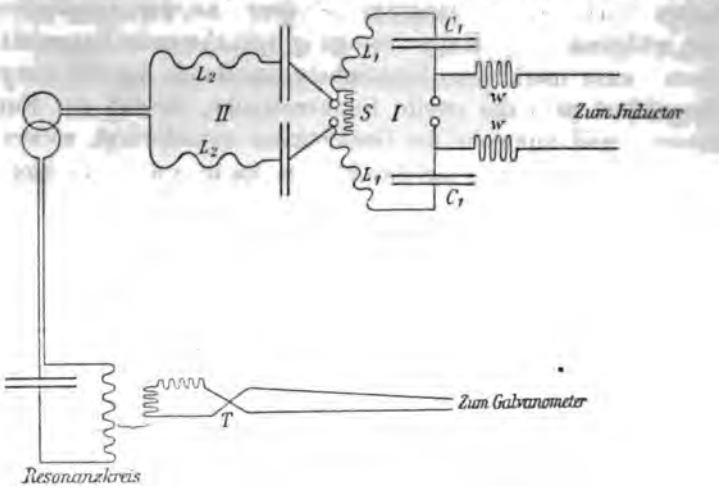


Fig. 2.

Stromstärke (im folgenden kurzweg als Integraleffekt bezeichnet) im Kreise II und namentlich in der Aufnahme von Resonanzkurven zur Bestimmung des logarithmischen Dekrementes der Schwingungen. Der Aufbau der Apparate ist in Fig. 2 dargestellt. Die Kapazitäten C_1 und C_2 waren verschiedene, einander möglichst gleiche Kombinationen von

Leidener Flaschen aus englischem Flintglas, für die im folgenden nachstehende abgekürzte Bezeichnungsweise gebraucht wird:

Bezeichnung der Anordnung	C_1		C_2	
I	1910 cm	(*eine* Flasche)	1930 cm	(vier Flaschen, je zwei parallel, die Paare hintereinander)
II	975 „	(zwei Flaschen hintereinander)	975 „	(wie C_1)
III	1950 „	(*eine* Flasche)	1950 „	(wie C_1)
IV	453,5 „	(vier Flaschen hintereinander)	456 „	(wie C_1)

Durch kurze Drähte konnten die beiden Funkenstrecken direkt miteinander verbunden werden, und so (unter gleichzeitiger Ausschaltung von S und Kreis I) dem Kreis II zum Vergleich eine gewöhnliche langsame Ladung direkt vom Induktor aus mitgeteilt werden. Die Selbstinduktion L_2 blieb während jeder Versuchsreihe unverändert, so daß in dem auf Integraleffekt und Dämpfung zu untersuchenden Kreis II nichts variiert wurde außer der Funkenlänge. Dies geschah in der gewünschten Weise durch Änderung der Selbstinduktion L_1, welche stufenweise durch Ein- oder Ausschalten von einzelnen Spulen vergrößert und verkleinert werden konnte. Hierbei bildeten zwei kreisförmige Selbstinduktionen von je 2.10^5 cm die gegen L_2 sehr große Selbstinduktion, die erforderlich ist, um den Funken möglichst nahe maximal zu erhalten (die Theorie verlangt hierfür $L_1 = \infty$). W sind große elektrolytische Widerstände, T ein Thermoelement. Über die für genaue Messungen erforderlichen Vorsichtsmaßregeln (die viel umfangreicher sind als bei Untersuchung einfacher Kondensatorkreise) vgl. die Dissertation.

Methode der Messungen.

Die Werte des logarithmischen Dekrementes wurden in der bekannten Weise durch Aufnahme von Resonanzkurven mit der beschriebenen Anordnung und Rechnung nach der von Bjerknes[1]) gegebenen Theorie gefunden. Und zwar

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 85. 1891 u. **55.** p. 121. 1895; vgl. G. Rempp, Ann. d. Phys. **17.** p. 627. 1905.

wurden (bei gleichbleibender primärer Funkenlänge) Kurven aufgenommen für maximalen und für ungefähr minimalen Funken in der zweiten Funkenstrecke bei Hochfrequenzladung und für dieselben beiden Funkenlängen bei langsamer Ladung direkt vom Induktor aus. Diese vier Kurven bez. die aus ihnen berechneten Dekremente bildeten jedesmal eine Beobachtungsreihe. Das Dekrement des Resonanzkreises wurde durch Einschalten eines bekannten Manganinwiderstandes bestimmt und von der sich aus den Kurven ergebenden Summe der Dekremente von Kreis II und Resonanzkreis in Abzug gebracht.

Für dieselben vier Funken wurde der Integraleffekt bestimmt, indem der Resonanzkreis auf Resonanz eingestellt und der so erhaltene maximale Galvanometerausschlag abgelesen wurde. Da der Integraleffekt auch von der Dämpfung abhängt, so sind diese Ausschläge nicht ohne weiteres, sondern nur unter gleichzeitiger Berücksichtigung der logarithmischen Dekremente miteinander vergleichbar. Die experimentelle Genauigkeit kann, verglichen mit Resonanzkurven und den daraus berechneten Dekrementen, keine allzu große sein, um so mehr, als während einer ganzen Beobachtungsreihe mit ihren jedesmaligen Umschaltungen der Gang des Turbinenunterbrechers gleich bleiben muß (wenngleich dies selbstverständlich kontrolliert wurde). Für die Bestimmung der Dekremente ist dies nur während der Dauer einer einzelnen Kurvenaufnahme erforderlich.

Resultate.[1])

Die Bestimmung der logarithmischen Dekremente ergab, wenn man zunächst die Werte für langsame Ladung unter sich vergleicht, gute, auch quantitative Übereinstimmung mit den Messungen von Rempp und namentlich wieder die auf den ersten Blick auffallende Tatsache, daß für kleinere Funken (und langsame Ladung) das Dekrement mit Verkürzung der Funkenstrecke stark anwächst. — Was nun die Werte für die beiden Funken der Anordnung für Hochfrequenzladung betrifft, so ist das Dekrement des maximalen nicht merklich verschieden von dem des gleichgroßen und mit gleicher Ladung der

1) Vgl. die Tabellen in der Dissertation.

Kapazität verbundenen Funkens bei langsamer Ladung: Die Art der Ladung ist ohne merklichen Einfluß auf das Dekrement. Eine im Fall der Hochfrequenzladung vielleicht vorhandene geringfügige Abnahme des Dekrementes (vgl. weiter unten die Diskussion der Messungen des Integraleffektes) liegt jedenfalls innerhalb der Fehlergrenzen. Dagegen weist der besonders interessierende, mit derselben Ladung der Kapazität verbundene, aber nur annähernd halb so große minimale Funke jenen beiden Funken gegenüber durchweg eine kleinere Dämpfung auf (wenngleich in einigen Fällen sich auch diese Abnahme nur innerhalb der Fehlergrenzen hält). Beispielsweise erhält man (mit Anordnung II der Kapazitäten) für den 3,2 mm langen Funken bei langsamer Ladung und als maximalen Funken der Hochfrequenzladung die Dekremente 0,137 bez. 0,134, für den 1,8 mm langen annäherd minimalen Funken der Hochfrequenzladung den Wert 0,125. Aus diesem Sachverhalt ergibt sich für kleinere Funken ein auffallender Kontrast zwischen der Dämpfung des minimalen Funkens bei Hochfrequenzladung und dem weit größeren Dekrement der gleichen Funkenstrecke bei langsamer Ladung (in dem angeführten Beispiel 0,125 gegen 0,179 für den ebenfalls 1,8 mm langen Funken bei langsamer Ladung). Gleichzeitig ist aber jenes Steigen der Dämpfung mit Verkleinerung der Funkenstrecke bei langsamer Ladung aufgeklärt. Dort verkleinert man nämlich zugleich mit der Funkenstrecke die Ladung der Kapazität, also den durch den Funken gehenden Strom. Hier dagegen war es möglich, diese beiden Variationen zu *sondern*, und es ergibt sich, daß Verkleinerung des Funkens eine geringe Abnahme, Verkleinerung des Stromes eine beträchtliche Zunahme der Dämpfung bedingt. Das von Rempp konstatierte Steigen der Dämpfung für kleinere Funken beruht auf dem Überwiegen der letzteren Wirkung. — Für größere Funken nimmt bekanntlich umgekehrt die Dämpfung mit wachsender Funkenlänge (also zugleich wachsendem Strome) zu. Nach dem vorher erhaltenen Ergebnis, demzufolge die Dämpfung mit wachsendem Strome abnimmt, mit wachsender Funkenlänge wächst, war also für größere Funken, wie sie gerade für die Praxis in Frage kommen, eine stärkere Abhängigkeit des Funkenwiderstandes von der Funkenlänge und demnach bei An-

wendung des minimalen Funkens der Hochfrequenzladung eine beträchtliche Verkleinerung der Dämpfung zu erwarten. Der Versuch, die Experimente mit Hochfrequenzladung auf dieses Bereich auszudehnen, hatte jedoch ein eigentümliches Ergebnis.

Deformierte Resonanzkurven.

Es gelang nicht, in dieses Bereich zu kommen, ohne daß, höchstwahrscheinlich im Zusammenhang mit dem gleichzeitig auftretenden lebhaften Sprühen der Flaschen, die Resonanzkurven eine von der Theorie gänzlich abweichende Form annahmen. Bekanntlich[1]) stimmen schon für kleinere Funken die Kurven mit der Bjerknesschen Theorie insofern nicht überein, als man für größere Ordinaten der Kurve ganz systematisch größere Dekremente berechnet. Bezeichnet man die Ordinate der Resonanzstelle mit 1 und benutzt man, wie hier geschehen, Ordinaten von 0,5 bis 0,9, so erhält man für letztere den Wert der Dämpfung oft bis zu 25 Proz. höher als für erstere. Man kann also nur „mittlere Dämpfungen" angeben. Immerhin sind hierbei beide Äste der Kurve genügend symmetrisch. Dagegen zeigen die jetzt betrachteten deformierten Kurven den ganz unsymmetrischen Verlauf von Fig. 3 (Kurve 1), so daß die übliche Berechnung der Dämpfung nicht mehr angängig erscheint. Bei gleicher Ladung der Kapazität, also gleich starkem Sprühen, traten die deformierten Kurven sowohl bei Hochfrequenz-, wie bei langsamer Ladung auf, sie sind also keineswegs etwa eine Eigentümlichkeit der Hochfrequenzladung. In der am stärksten sprühenden Anordnung III der Kapazitäten erhielt man sie schon bei relativ kleinen Funkenlängen. Dagegen zeigt die noch für relativ große Funkenlängen „sprühfreie" Anordnung IV noch für eine Funkenlänge von 18,2 mm keine merkliche Zunahme des Dekrementes. Hiernach ist wohl die Vermutung berechtigt, daß im Bereich dieser Messungen die mit wachsender Funkenlänge abnehmende Schärfe der Resonanz (für größere Funken) wesentlich durch das Sprühen bedingt ist, während ohne das Sprühen der Wert des Dekrementes nahezu konstant bleibt. In diesem letzteren Falle erhält man bei Anwendung des minimalen Funkens der Hoch-

1) G. Rempp, l. c.

frequenzladung tatsächlich eine prozentisch größere Abnahme der Dämpfung als für kleinere Funken. Doch entspricht diese Verkleinerung des Dekrementes keineswegs den Erwartungen, hat also auch kaum eine praktische Bedeutung.

Integraleffekt.

Die Messungen des Integraleffektes geben quantitativ den qualitativ schon mit Hilfe des Sprühens (bez. mit Geisslerröhren) erbrachten Beweis dafür, daß wirklich in der Anordnung für Hochfrequenzladung mit dem minimalen Funken die gleiche Ladung von C_2 und die gleiche Energie in Kreis II verbunden ist, wie bei langsamer Ladung mit einer etwa doppelt so langen Funkenstrecke. Ja, es tritt sogar für die Hochfrequenzladung als solche eine Steigerung des Effektes ein, zu deren Erklärung die Annahme geringfügiger Schwankungen des Dekrementes genügt, wie sie mit den Beobachtungen verträglich sind.[1])

Setzt man den Integraleffekt für den maximalen Funken der Hochfrequenzladung $= 100$, so ergab sich für den minimalen Funken durchschnittlich der Wert 120, dagegen für die beiden gleichlangen Funken bei langsamer Ladung nur 90 bez. 32.

Diese Zahlen bezeugen die ökonomische Wirkungsweise der Ladevorrichtung.

Einfluß des Sprühens.

Nachdem durch diese Messungen die eigentliche Aufgabe dieser Arbeit erledigt schien, wurden noch einige Experimente angestellt, um die oben erwähnte Wirkungsweise des Sprühens näher zu untersuchen. Mit der als III bezeichneten Anordnung der Flaschen wurden die nachstehenden Versuche gemacht:

a) Es wurde auf Hochfrequenzladung mit maximaler Funkenlänge, und zwar von 10 mm, geschaltet. Hierbei schlägt also die zweite Funkenstrecke nach einer Halbschwingung des Gesamtkreises durch, während C_2 die gesamte ursprüngliche Ladung von C_1 erhält. Dann wurde, ohne an den Selbstinduktionen etwas zu ändern, die zweite Funkenstrecke mittels der Mikrometerschraube eingedreht. Mit abnehmender Länge der Funkenstrecke schlägt nun der Funke früher als nach einer

1) Vgl. die Dissertation.

Halbschwingung des Gesamtkreises durch, und C_2 erhält kleinere Ladungen, da zunehmende Restladungen auf C_1 verbleiben. (Vgl. die Theorie.) Das Ergebnis der Effektmessungen zeigen folgende Zahlen (die nur auf qualitative Richtigkeit Anspruch machen).

Funkenlänge in mm	Integraleffekt (Galvanometerausschlag)	
10	105	
9	115	
8	125	dazwischen
7	125	Maximum 130
6	120	
5	110	
4	90	
3	53	
2	25	
1	5	

Die zugehörigen Resonanzkurven, auf den gleichen Maximalausschlag umgerechnet, gibt Fig. 3.

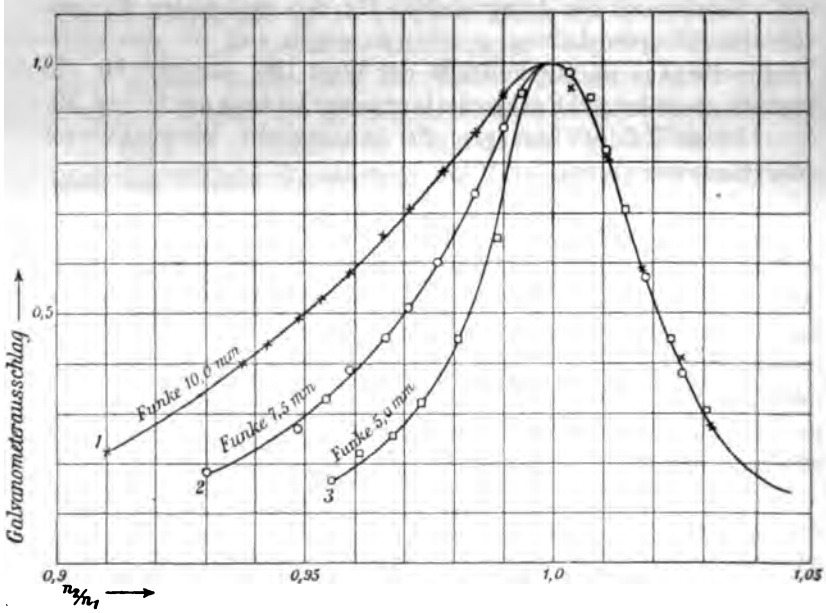


Fig. 3.

b) Die Anordnung wurde auf langsame Ladung geschaltet, und es wurden Messungen des Integraleffektes bei 3 und 6 mm

Funkenlänge vorgenommen, und zwar einmal wie bisher mit Resonanzkreis, andererseits unter Ausschaltung des Resonanzkreises durch Induktion auf den zu diesem Zwecke mit Fangarm versehenen, geschlossenen Kreis, der das Thermoelement enthält. Dieselben Messungen wurden zum Vergleich mit den für diese Funkenlängen gänzlich „sprühfreien" Kapazitätenkombinationen I und II gemacht. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß I sich von III nicht durch die Größe, sondern nur durch die *Anordnung* der Kapazität unterscheidet. Schließlich wurde durch Einschalten eines Graphitwiderstandes von ca. $4^1/_2$ Ohm das Sprühen der Anordnung III stark reduziert und nun dieselben Messungen vorgenommen. Setzt man überall den Galvanometerausschlag (Integraleffekt) für den Funken von 3 mm Länge gleich 1, so waren die für den 6 mm-Funken abgelesenen Ausschläge die folgenden:

Anordnung	Sprühen (bei 6 mm-Funken)	Ausschlag mit Resonanzkreis	Ausschlag bei direkter Induktion
III	mäßig	1,92	2,22
I	nicht vorhanden	3,45	2,94
II	nicht vorhanden	3,33	2,94
III mit Graphitwiderstand	schwach	3,03	3,03

Die unter a) angegebenen Versuche zeigen, daß die Resonanzkurve mit zunehmendem Sprühen stärker deformiert wird und ergeben ferner ein Ansteigen des Integraleffektes mit abnehmendem Sprühen trotz der gleichzeitigen Verminderung der Ladung. Die Experimente b) ergeben für die Anordnung III, welche bei 6 mm Funkenlänge ein mäßig starkes Sprühen aufweist, ein viel geringeres Ansteigen des Effektes als für die sprühfreien Anordnungen. Das Verhältnis der Effekte für 3 und 6 mm Funkenlänge ist mit Anordnung III gemessen ca. 1 : 2, mit I oder II ca. 1 : 3. Setzt man durch Einschalten des Graphitwiderstandes in Anordnung III das Sprühen herab, so erhält man zwar infolge der größeren Dämpfung natürlich kleinere Ausschläge. Das Verhältnis dieser Ausschläge ist aber wieder 1 : 3, was beweist, daß die Spannung in Anordnung III dieselbe ist wie in I und II. Einem Vergleich der Ausschläge mit Resonanzkreis und mit direkter Induktion kann man entnehmen, was auch die früheren Messungen des

Dekrements ergeben, daß in Anordnung III (ohne Graphitwiderstand) die Dämpfung bei 6 mm Funkenlänge größer, in den sprühfreien Anordnungen dagegen kleiner ist als die bei 3 mm Funkenlänge. Die Resonanzkurve zeigt hier noch keine merklichen Anomalien.

Ergebnisse der Arbeit.

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Die untersuchte Anordnung für Hochfrequenzladung arbeitet so ökonomisch, daß sie sich mit Vorteil zu dem Zwecke benutzen läßt, einen Kondensatorkreis durch schnelle Schwingungen zu laden.

2. Theorie wie Experiment führen zu dem Ergebnis, daß es mit der Anordnung möglich ist, einen Kondensatorkreis durch eine kürzere Funkenstrecke zu entladen, als die, die der Spannung auf den Kondensatorbelegungen entspricht. Und zwar kann, verglichen mit dem auf die gewöhnliche Weise langsam geladenen Kondensatorkreis, die gleiche Spannung (Ladung) der Kapazität, die gleiche Stromamplitude und Energie mit einer bis nahezu halb so großen Spannung an der Funkenstrecke verbunden werden.

3. Die Untersuchung des letzteren Falles (Hochfrequenzladung mit kleinstmöglicher Funkenstrecke) ergibt, wiederum verglichen mit dem langsam geladenen Kreis gleicher Energie (demnach ca. doppelter Funkenlänge), innerhalb des Bereiches der vorgenommenen Messungen einen um ca. 20 Proz. höheren Integraleffekt und eine dieser Steigerung ungefähr entsprechende, allerdings zahlenmäßig geringe Abnahme des logarithmischen Dekrementes.

Die günstige Wirkung, die man erhält, wenn man den Hertzschen Erreger mit Teslaanordnung lädt, ist vermutlich nicht diesem Vorteil der Hochfrequenzladung zuzuschreiben (zumal man es hierbei in Anbetracht der kleinen Dimensionen des geladenen Systems mit einer Hochfrequenzladung ohne Verkürzung des Funkens, mit maximaler Funkenlänge, zu tun hat), sondern vielmehr wohl der raschen Aufeinanderfolge der Entladungen.

4. Die Anordnung gewährt erstmals die Möglichkeit, den Einfluß der Stromstärke und den der Funkenlänge auf das

Dekrement und somit auf den Funkenwiderstand einer *getrennten* Untersuchung zu unterwerfen. Es ergibt sich für kleinere Funken ein schwaches Ansteigen des Funkenwiderstandes mit wachsender Länge und ein bedeutend stärkeres Fallen mit zunehmendem Strom. Hierdurch ist die für langsam geladenen Kondensatorkreis, für den beide Wirkungen nicht zu trennen sind, von Rempp bei diesen Funkenlängen konstatierte Abnahme des Dekrementes mit wachsender Funkenlänge erklärt.

5. Für größere Funken wurden, unabhängig von der Art der Ladung und offenbar im Zusammhang mit dem Sprühen der Leidener Flaschen, von der Bjerknesschen Theorie derartig abweichende Resonanzkurven erhalten, daß die Berechnung eines bestimmten Dekrementes aus diesen Kurven in der üblichen Weise nicht angängig erscheint. Da es mit sprühfreieren Kapazitätenkombinationen auch für relativ große Funkenlängen nicht gelang, ein merkliches Steigen der Dämpfung festzustellen, so drängte sich die Vermutung auf, daß dieses Steigen, bez. die zunehmende Unschärfe der Resonanz, innerhalb des Bereiches der Messungen wesentlich in der Deformierung der Resonanzkurven und also im Sprühen ihren Grund hat. Schon ehe ein solcher Einfluß des Sprühens auf die Gestalt der Resonanzkurve merklich wird, bei etwas kleineren Funken, macht sich bereits eine Herabsetzung des Integraleffektes gegenüber sprühfreien Anordnungen geltend.

6. Die Anordnung bietet ein bequemes Mittel zur isolierten Beobachtung des ersten übergehenden Funkens, wie sie mit schwierigeren Methoden von Schuster und Hemsalech durchgeführt wurde.

Zum Schluß sei es mir gestattet, meinem verehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. Braun meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Ebenso danke ich Hrn. Dr. Mandelstam, auf dessen Anregung die Arbeit entstand, für das andauernde Interesse und die Förderung, die er ihrem Fortgang zuteil werden ließ.

Straßburg i. E., Physikalisches Institut, Februar 1907.

(Eingegangen 14. Juni 1907.)

9. *Zur Optik der bewegten Körper;* *von J. Laub.*

I.

Unter einem „physikalischen" Raum verstehen wir immer einen beleuchteten Raum. Um seine Zustände zu charakterisieren, wird neben den geometrischen Bestimmungsstücken (Koordinaten) x, y, z noch eine neue Mannigfaltigkeit, die Zeit t eingeführt. Die sehr zweckmäßige Einsteinsche[1]) Definition der Zeitdauer und der Gleichzeitigkeit erlaubt erst die Ereignisse an verschiedenen Orten des Raumes zeitlich zu werten.

Bekanntlich muß man in der Einsteinschen Elektrodynamik der bewegten Körper zwei Systeme, und zwar ein „bewegtes" und ein „ruhendes" berücksichtigen. Die Anwendung des Prinzipes der Relativität und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit führt dazu, daß dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine absolute Bedeutung zukommt. Zwei Uhren, welche in einem System als synchron gehend gefunden werden, werden, von einem zu dem gegebenen System relativ bewegten Systeme aus betrachtet, als nicht mehr synchron laufend bezeichnet. Man kann auch umgekehrt sagen: Denken wir uns in zwei sehr weit voneinander entfernten Stellen des Raumes Beobachter aufgestellt, welche das Einsteinsche Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren ausführen und dieselben synchron finden. Man kann in dem Falle von einem *„ruhenden System"* sprechen. Es kann aber vorkommen, daß dieselben Uhren, von einem anderen System aus betrachtet, als nicht synchron gefunden werden; dann werden die Beobachter von einer „sichtbaren Bewegung" sprechen. — Die beiden Systeme sind vollkommen identisch, es werden ihnen keine besonderen Eigenschaften zugeschrieben. Man kann die Systeme miteinander verwechseln; in jedem Systeme würden die Erscheinungen als vollkommen gleich verlaufend gefunden werden. Wir könnten ebensogut von einem System I und einem System II

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

sprechen. Modifikationen treten erst ein, wenn die beiden Systeme miteinander in Beziehung gesetzt werden. Der „absolut ruhende Raum" spielt bei Einstein keine Rolle, es wird auch den Punkten des leeren Raumes kein Geschwindigkeitsvektor zugeschrieben.

Die Auffassung der Vorgänge ist in der Lorentzschen Elektrodynamik eine wesentlich andere. Es wird ein durch die absolute Ruhe ausgezeichneter Äther eingeführt, der auch im Innern der bewegten Materie absolut ruht. Der Äther bewegt sich nicht mit der bewegten Materie, der Verlauf der optischen Vorgänge in einem translatorisch bewegten Körper ist ein wesentlich anderer als im ruhenden, denn nur der an der Materie haftende Bruchteil der elektrischen Polarisation wird durch die Bewegung modifiziert. *Die Erscheinung haftet nicht nur am Beweglichen, sondern auch am Ruhenden.*

Es schien mir daher wichtig, zu untersuchen, wie sich die Behandlung des bekannten Versuches von Fizeau vom Einsteinschen Standpunkt aus gestaltet. Es zeigt sich, daß man den „Fresnelschen Mitführungskoeffizient" in sehr einfacher Weise ohne Zuhilfenahme der Differentialgleichungen für bewegte Körper erhält.

Es mögen sich an den weit voneinander entfernten Stellen A und B des „ruhenden" Raumes Beobachter mit den nötigen Uhren und Maßstäben (alle von derselben Beschaffenheit) befinden. Die Beobachter haben die Aufgabe, das Einsteinsche Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren auszuführen. Es bedeute t_A die Zeit, in welcher ein Lichtstrahl von A nach B abgeht, t_B die Zeit, in welcher er in B in der Richtung gegen A reflektiert wird, t'_A die Zeit, in welcher er in A wieder eintrifft. Dann sind synchron gehende Uhren dadurch ausgezeichnet[1]), daß:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \tag{1}$$

Bezeichnet man mit r den absoluten Wert der Entfernung zwischen A und B, ferner mit c die Lichtgeschwindigkeit im Normalmedium (leerer Raum), so ist erfahrungsgemäß:

$$\frac{2r}{t'_A - t_A} = c. \tag{2}$$

1) A. Einstein, l. c.

Es sei außerdem ein zweites „bewegtes" System gegeben, welches sich in gleichförmiger Translation relativ zum ruhenden befindet, es möge ferner v der absolute Wert der Geschwindigkeit sein, mit welcher sich das bewegte System in Richtung der wachsenden x des ruhenden Systems bewegt. Dann werden bekanntlich die zwei Uhren, welche, vom ruhenden System aus betrachtet, synchron laufen, vom bewegten System aus betrachtet, nicht mehr synchron sein, und umgekehrt: zwei Uhren, welche im bewegten System synchron laufen, werden vom ruhenden aus nicht synchron sein. Die Gleichung (1) findet nicht statt, es ist vielmehr:

$$t_B - t_A = \frac{r}{c - v},$$

$$t'_A - t_B = \frac{r}{c + v}.$$

Bezeichnet man die Differenz $t_B - t_A$ mit t_1 und $t'_A - t_B$ mit t_2, so wird:

$$t_1 - t_2 = \frac{2v}{c^2 - v^2}. \tag{3}$$

Unsere Betrachtungen wurden bis jetzt in einem Normalmedium, dessen Brechungsindex gleich 1 ist, ausgeführt. Wir nehmen nun an, daß sowohl das bewegte wie das ruhende System mit einem Dielektrikum vom Brechungsindex n ausgefüllt ist, und postulieren: *die Differenz (3) soll unabhängig sein vom Medium, welches sich zwischen den Uhren befindet*, oder mit anderen Worten: der Gang zweier (gleich beschaffener) an verschiedenen Stellen des Raumes aufgestellten Uhren soll unabhängig sein vom Medium, welches sich zwischen ihnen ausbreitet. In Formeln heißt das, wir postulieren, daß

$$\frac{1}{c' - v} - \frac{1}{c'' + v} = \frac{2v}{c^2 - v^2} \tag{4}$$

sein soll, wobei c' die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Medium vom Brechungsindex n bedeutet, falls sich der Lichtstrahl in der Richtung der positiven X-Achse fortpflanzt, c'' hingegen die Lichtgeschwindigkeit in demselben Medium für die Fortpflanzung in der negativen Richtung. Um zu sehen, welche Werte c' und c'' haben müssen, damit die Gleichung (4) erfüllt ist, setzen wir

$$c' = F(v)$$

und indem wir annehmen, daß c'' dieselbe Funktion von $-v$ ist, entwickeln wir die Funktionen nach dem Taylorschen Satze. Berücksichtigt man nur Glieder in erster Ordnung von v, d. h. Geschwindigkeiten, die klein sind im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit, so erhält man:

$$(5)\qquad \begin{cases} c' = c_0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot v = c_0 + \alpha v, \\ c'' = c_0 - \dfrac{\partial F}{\partial v} = c_0 - \alpha v, \end{cases}$$

wobei $c_0 = c/n$ die Geschwindigkeit des Lichtes in einem ruhenden Dielektrikum und im ruhenden Dielektrikum beobachtet bedeutet. Setzt man die Werte für c' und c'' in (4) ein, so erhält man:

$$\frac{1}{\frac{c}{n} + \alpha v - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} - \alpha v + v} = \frac{2v}{c^2 - v^2},$$

oder

$$(6)\qquad \frac{2v(1-\alpha)}{\frac{c^2}{n^2} - \alpha(v-\alpha)^2} = \frac{2v}{c^2 - v^2}.$$

Vernachlässigt man in der letzten Gleichung v^2 und $\alpha(v-\alpha)^2$ gegenüber c^2, so erhält man:

$$n^2 2v(1-\alpha)c^2 = 2vc^2,$$

oder

$$(7)\qquad \alpha = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Wir erhalten also das Resultat: Pflanzt sich das Licht in einem ruhenden Dielektrikum mit der Geschwindigkeit c/n fort, so ist für einen mit der Geschwindigkeit v bewegten Beobachter der Ausdruck:

$$(8)\qquad \Omega = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

maßgebend, wobei das obere oder untere Zeichen, je nach der Bewegungsrichtung des Beobachters gilt. Es ist klar, daß das auch gilt, falls der Beobachter ruht und das Medium sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. — Hiermit haben wir aber die Theorie des Fizeauschen Versuches erhalten; $1 - 1/n^2$ ist der sogenannte „Fresnelsche Mitführungskoeffizient".

Wir müssen aber noch eine Korrektion einführen. Die Gleichung (8) sagt uns aus, wie sich einem mit der Geschwindig-

keit v bewegten Beobachter die Geschwindigkeit eines Lichtstrahles darstellen würde, welcher von einer ruhenden Lichtquelle kommend sich in einem ruhenden Medium fortpflanzt, oder was dasselbe ist: wie sich einem ruhenden Beobachter die Geschwindigkeit eines Lichtstrahles darstellt, der von einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Lichtquelle kommend in einem mit derselben Geschwindigkeit v bewegten Medium sich fortpflanzt.

Um genau denselben Fall, wie im Fizeauschen Versuch zu haben, brauchen wir nur im Gliede c/n der Gleichung (8) in n statt der relativen Periode T' die absolute Periode T, welche einer ruhenden Lichtquelle entspricht, einzuführen. Zu dem Zwecke wenden wir das Dopplersche Prinzip in der Einsteinschen[1]) Fassung an. Das Dopplersche Prinzip lautet in unserem Falle:

$$T' = T\sqrt{\frac{1+\frac{v}{\Omega}}{1-\frac{v}{\Omega}}},$$

oder

$$T' = T\left(1+\frac{v}{\Omega}-\frac{1}{4}\frac{v^2}{\Omega^2}\cdots\right). \tag{9}$$

Bezeichnet man mit N den Brechungsindex des ruhenden Mediums für die absolute Periode T, so ist:

$$n = N + \frac{\partial N}{\partial T}\cdot T\left(\frac{v}{\Omega}-\frac{1}{4}\frac{v^2}{\Omega^2}+\ldots\right)$$

$$= N + \frac{\partial N}{\partial \lambda}\cdot \lambda\left(\frac{v}{\Omega}\cdots\right),$$

wobei $\lambda = cT$ die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum bedeutet. Daher wird nach (8)

$$\Omega = \frac{c}{N}\left(1-\frac{\partial N}{\partial \lambda}\frac{\lambda}{N}\left\{\frac{v}{\Omega}-+\ldots\right\}\right)+\frac{n^2-1}{n^2}v. \tag{10}$$

Führt man in den mit v behafteten Gliedern die Näherungswerte

$$n = N, \quad \Omega = \frac{c}{N}$$

1) A. Einstein, l. c.

ein und vernachlässigt die Glieder v^2/Ω^2 etc., so erhält man:

$$\Omega = \frac{c}{N} + v\left(\frac{N^2-1}{N^2} - \frac{\lambda}{N}\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right). \tag{11}$$

Das ist die von H. A. Lorentz[1]) abgeleitete Formel.

Wir haben den Mitführungskoeffizient unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Translationsbewegung v klein ist gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, was ja praktisch zutrifft. Möglich ist aber jede Translationsgeschwindigkeit, die nur etwas kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist; erst der Fall $v = c$ spielt die Rolle einer unendlich großen Geschwindigkeit. Man kann in vielleicht noch einfacherer Weise den Mitführungskoeffizient ohne Vernachlässigungen ableiten, indem man folgendes, dem obigen ganz analoge Verfahren einsetzt. Wir gehen wieder von unserem Postulate aus:

$$\frac{1}{c' - v} + \frac{1}{c'' + v} = \frac{2v}{c^2 - v^2}.$$

Würden wir einfach statt c' und c'', c/n setzen, so wäre unser Postulat nicht erfüllt. Wir befriedigen die letzte Gleichung, indem wir annehmen, daß c' und c'' in bezug auf die Zusatzglieder symmetrisch sind, d. h. daß zu dem $+v$ ein positives und zu dem negativen v ein negatives Zusatzglied hinzukommt und setzen:

$$c' = \frac{c}{n} + x,$$

$$c'' = \frac{c}{n} - x$$

und lösen die Gleichung nach x auf. Dann hat man:

$$\frac{1}{\frac{c}{n} + x - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} - x + v} = \frac{2v}{c^2 - v^2}$$

oder

$$\frac{2(v-x)}{\frac{c^2}{n} - (v-x)^2} = \frac{2v}{c^2 - v^2}.$$

Vernachlässigt man v^2 und $(v-x)^2$ gegenüber c^2, so erhält man gleich:

$$x = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie d. elektr. u. opt. Ersch. in bewegten Körpern, p. 101. Leiden 1895.

Die strenge Behandlung führt auf eine quadratische Gleichung für x, deren Wurzeln lauten:

$$x = \frac{1}{2}\left(v + \frac{c^2}{v}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left\{v^2 + 2c^2 + \frac{c^4}{v^2}\right\} - c^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß nur eine Wurzel und zwar die mit dem $-$ Vorzeichen möglich ist. Entwickelt man nämlich in dem Falle die Wurzel, so erhält man bei entsprechenden Vernachlässigungen wieder

$$x = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

für das positive Vorzeichen hingegen erhält man:

$$x = \frac{v}{2} + \frac{c^2}{v};$$

nun soll aber für $v = 0$, auch $x = 0$ werden, also muß der Wert $x = \frac{v}{2} + \frac{c^2}{v}$ ausgeschlossen werden. Es wird daher:

$$\Omega = \frac{c}{n} \pm x = \frac{c}{n} \pm \frac{1}{2}\left(v + \frac{c^2}{v}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left\{v^2 + 2c^2 + \frac{c^4}{v^2}\right\} - c^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Man kann hier wieder dieselbe Korrektion wie oben mit Hilfe des Dopplerschen Prinzips ausführen und erhält für die absolute Periode T:

$$n = N + \frac{\partial N}{\partial T} \cdot T\left(\frac{v}{\Omega} - \frac{1}{4}\frac{v^2}{\Omega^2} \cdots\right) + \cdots$$

Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrat W. Wien, meinen herzlichsten Dank zu sagen für das große Interesse, daß er jederzeit meiner Arbeit entgegenbringt.

Würzburg, Physik. Institut, am 13. Juni 1907.

(Eingegangen 15. Juni 1907.)

10. *Interferenzen planparalleler Platten im kontinuierlichen Spektrum;* *von E. Gehrcke und O. Reichenheim.*[1])

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

§ 1. An planparallelen oder schwach keilförmigen Glasplatten sind bekanntlich bei Gangunterschieden von vielen tausend Wellenlängen Interferenzen sichtbar, wenn man als Lichtquelle genügend homogenes Licht, z. B. Quecksilberlicht, anwendet. Im weißen Licht zeigen nur sehr dünne Platten (farbige) Interferenzen. Nun haben 1850 Fizeau und Foucault[2]) beobachtet, daß auch an dickeren Platten — insbesondere an einer Platte von 1 mm Dicke, wo der Gangunterschied immerhin schon etwa 7000 Wellenlängen (für grünes Licht) betrug — Interferenzen im weißen Licht auftreten, sobald die von der Platte herkommenden Strahlen spektral zerlegt werden, also durch ein Spektroskop ins Auge gelangen.

Wie aus dem folgenden ersichtlich sein wird, sollte das so erzeugte „kannelierte Spektrum" unter Anwendung *planparalleler* Platten bei *beliebig* hohem Gangunterschied, d. h. an beliebig dicken Platten, entstehen, vorausgesetzt, daß das Auflösungsvermögen des benutzten Spektralapparates genügend groß ist. Demgegenüber ist für die an *keilförmigen* Platten entstehenden kannelierten Spektren derselbe Umstand hinderlich, welcher, wie bekannt ist, die durch homogenes Licht erzeugten Interferenzen keilförmiger Platten stört und bei hohem Gangunterschied vollständig vernichtet.

Wir[3]) beschäftigen uns im folgenden aus dem zuletzt genannten Grunde nur mit den an *planparallelen* Platten erzeugten, kannelierten Spektren. Dieselben liegen, wie die be-

1) Vgl. E. Gehrcke u. O. Reichenheim, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 8. p. 209—221. 1906.

2) H. Fizeau u. L. Foucault, Ann. d. chim. et de phys. (3) 30. p. 146—159. 1850.

3) An den Versuchen beteiligte sich zum Teil auch Hr. O. v. Baeyer

kannten Planparallelitätsringe homogenen Lichtes, im Unendlichen. Möglicherweise haben bereits Fizeau und Foucault l. c. diese Art von kanneliertem Spektrum vor Augen gehabt, wenn sie sich auch augenscheinlich über seine Entstehungsweise nicht im klaren waren. Auch sonst findet man in der Literatur kurze Angaben über ähnlich erzeugte Interferenzen im kontinuierlichen Spektrum, so z. B. bei Perot und Fabry[1]) und bei Fabry.[2]) Eine nähere Diskussion derselben vermochten wir indes nicht zu finden.

Der Kürze halber bezeichnen wir im folgenden die Interferenzen planparalleler Platten *homogenen* Lichtes als *h* Interferenzen, diejenigen eines Wellenlängen*komplexes* bez. weißen Lichtes im kontinuierlichen Spektrum als *k*-Interferenzen. Die hier als *h*-Interferenzen bezeichneten Streifen sind somit identisch mit den gewöhnlich auch als Planparallelitätsringe (oder Herschelsche, Haidingersche, Lummersche, Mascartsche Streifen) bezeichneten; die *k*-Interferenzen planparalleler Platten sind unseres Wissens bisher nicht besonders benannt worden und augenscheinlich überhaupt nicht näher untersucht.

Die *h*-Interferenzen sind Kurven, längs denen die Wellenlänge konstant ist, die *k*-Interferenzen sind Kurven variabler Wellenlänge. Hierin liegt eine prinzipielle Verschiedenheit beider Arten von Interferenzen.

§ 2. Wir erzeugten die *k*-Interferenzen unter anderem auf folgende Weise (vgl. Fig. 1, Vertikalschnitt):

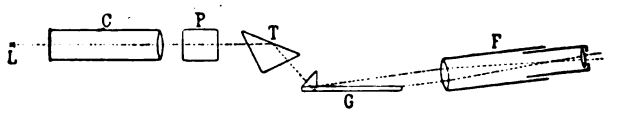


Fig. 1.

Das von der Lichtquelle *L* herkommende Licht durchsetzte einen 4-Prismenapparat, dessen Kollimator *C* sei und dessen dispergierender Teil durch *P* angedeutet sein möge; *P* bestand in unserem Falle aus vier Rutherfordschen Prismen mit vertikalen, brechenden Kanten. Das horizontal

1) A. Perot u. Ch. Fabry, Ann. de chim. et de phys. (7) **12.** p. 475. 1897.

2) Ch. Fabry, Compt. rend. **140.** p. 1136—1139. 1905.

aus P austretende Licht fiel dann auf das Totalreflexionsprisma T mit horizontalen Prismenkanten und wurde unter einem Winkel von etwa 45° in eine mit aufgeklebtem Prisma versehene, planparallele Glasplatte G von 1 mm Dicke[1]) geworfen; die Ebene dieser Platte stand horizontal, der Strahlengang war der von Lummer und Gehrcke[2]) früher beschriebene.

Das Beobachtungsfernrohr F vereinigte sodann in seiner Brennebene die vielfach reflektierten Strahlen, welche von G herkamen; war der Kollimator auf ∞ eingestellt, so lag in der Brennebene von F auch das Bild des Kollimatorspaltes.

Eine von der Lichtquelle L herkommende *homogene* Welle λ_1 ergab sonach im Gesichtsfelde des Fernrohres F ein vertikal

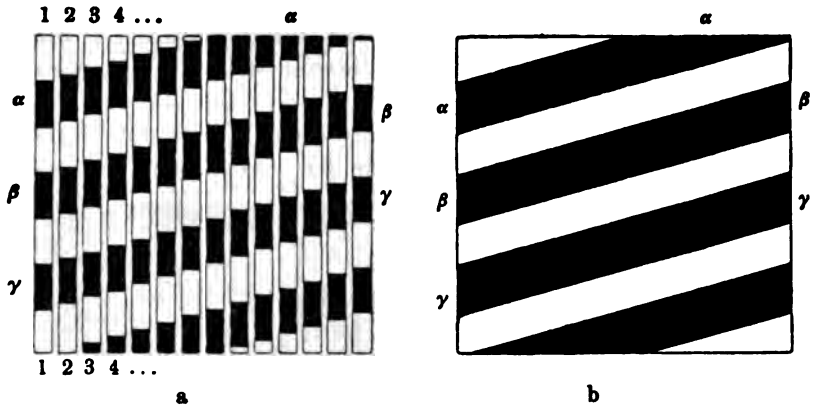


Fig. 2.

stehendes Spaltbild, das von horizontalen Interferenzstreifen durchzogen war. Wenn der Spalt des Kollimators C eng war, kamen nur kleine Stücke dieser h-Interferenzstreifen zur Entstehung, und man erhielt in diesem Falle etwa das in Fig. 2a durch 1 dargestellte Bild des Spaltes, durchzogen von kurzen, horizontalen Interferenzmaximis $\alpha\beta\gamma$.[3])

1) Die Platte war uns durch die Firma H. Haecke, Berlin, freundlichst zur Verfügung gestellt worden.

2) O. Lummer u. E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 10. p. 457—477. 1903.

3) Es bedeuten in Fig. 2 und ebenso in Figg. 4, 5 und 6 die *schwarzen* Streifen Interferenz*maxima*.

Wenn die Lichtquelle L mehrere nahe benachbarte Wellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ aussenden würde, so müßte jede für sich ihr eigenes, von h-Interferenzen durchzogenes Spaltbild erzeugen. Die Interferenzstreifen der einzelnen Wellen werden aber gegeneinander verschoben sein. Denn wenn z. B. die Differenz der Gangunterschiede der an der Platte G reflektierten Strahlen für einen bestimmten Punkt des Spaltes gleich einer halben Wellenlänge wäre, so würden die Interferenzmaxima von λ_1 bereits um eine halbe Streifenbreite gegen diejenigen von λ_2 verschoben sein.

Somit ist einleuchtend, daß durch *kontinuierlich* nebeneinander ausgebreitete Spaltbilder, wie sie von weißem Licht erzeugt werden, längs der Richtungen α, β, γ k-Interferenzstreifen gebildet werden, die schief durch das ganze Spektrum verlaufen, und bei denen längs eines Interferenzstreifens die Wellenlänge variiert; Fig. 2b stellt die so entstehenden k-Streifen schematisch dar.

In Fig. 3 sind an einer planparallelen Platte von 1 mm Dicke, mit der in Fig. 1 dargestellten Anordnung, die ge-

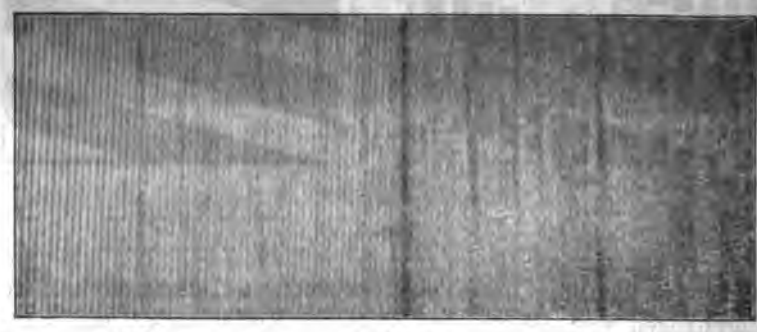


Fig. 3.

nannten Interferenzen photographiert, und zwar für die Gegend der F-Linie des Sonnenlichtes. Man sieht hieraus, daß die k-Streifen tatsächlich quer durch das Spektrum gehen, da sie den Fraunhoferschen Linien *nicht* parallel sind.

§ 3. Wenn man in der durch Fig. 1 dargestellten Versuchsanordnung die planparallele Platte G ein wenig um eine horizontale Achse drehen würde, so müßten sich die von den

homogenen Wellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ erzeugten h-Interferenzen um den gleichen Winkel mitdrehen. An dieser Drehung der h-Interferenzen würde das Spaltbild einer homogenen Welle ebensowenig teilnehmen, wie die k-Interferenzen. Wohl aber

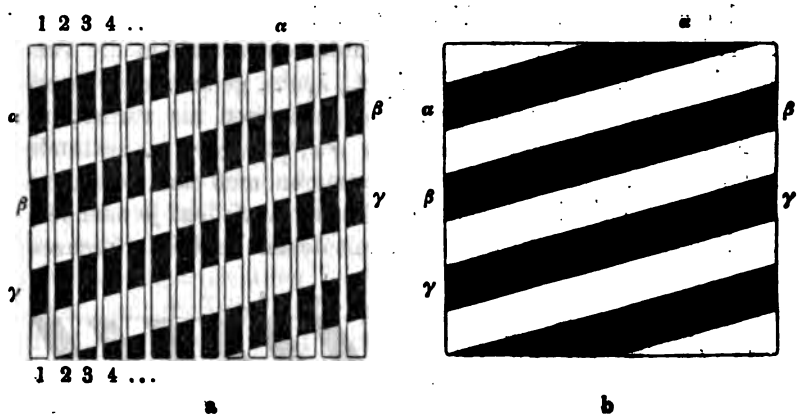


Fig. 4.

muß die Streifen*breite*, d. h. die Intensitätsverteilung der letzteren sich ändern. Bei einem gewissen Drehungswinkel muß

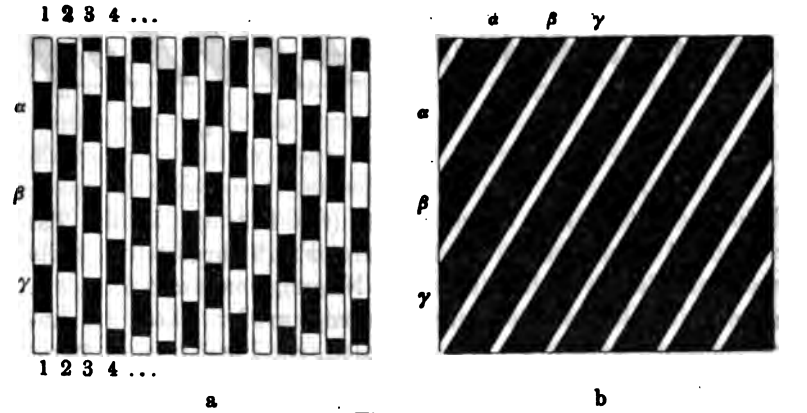


Fig. 5.

die Intensitätsverteilung beider Streifensysteme k und h die gleiche sein, dann nämlich, wenn die Richtung der h-Interferenzen mit derjenigen der k-Interferenzen koinzidiert. Diesen Fall verdeutlicht Fig. 4 a und 4 b.

Bei schwacher Neigung der h-Interferenzen, also der Streifen $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ . . ., gegen die Horizontale ist der Unterschied der Streifenbreiten im kontinuierlichen Spektrum, wie er durch Figg. 2b und 4b dargestellt wird, nicht sehr groß. Bedeutender wird derselbe, wenn die Neigung stärker ist, etwa so, wie in Figg. 5 und 6. Hier ist der Ganguntersehied, mithin die Verschiebung der von den Wellen λ_1, λ_2, λ_3 . . . gelieferten h-Interferenzstreifen bedeutend größer angenommen als vorher, so daß jetzt steilere k-Interferenzen $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ . . . zustande kommen. Die Streifenbreite der letzteren muß nun, wie ohne weiteres ersichtlich ist, sehr verschieden ausfallen, je nachdem die Richtung der h-Interferenzen mit denen der k-Interferenzen

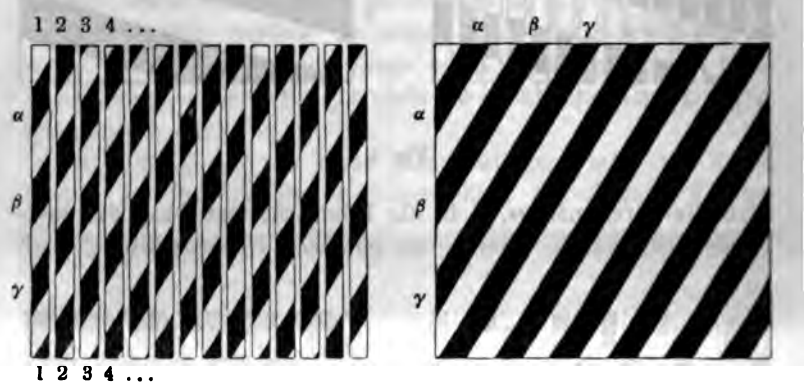


Fig. 6.

koinzidiert (vgl. Fig. 6) oder nicht (vgl. Fig. 5). In der Tat sind die k-Interferenzen bei dem durch Fig. 5 dargestellten Falle nahe am Verschwinden; wenn die Neigung von $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ . . . gegen die Horizontale nur ein wenig größer wäre, als angenommen, so würden die schmalen, in Fig. 5b noch übrig gebliebenen weißen Linien in Fortfall kommen, d. h. es würden dann gar keine k Interferenzen mehr entstehen.

Hieraus ergibt sich somit, daß für eine gegebene planparallele Platte und einen gegebenen Spektralapparat eine ganz bestimmte Neigung der h-Interferenzstreifen gegen die Spaltrichtung des Spektralapparates existieren muß, für welche die Deutlichkeit der k-Interferenzen ein Optimum ist. Dieses

Optimum, das z. B. durch Figg. 4 oder 6 dargestellt ist, besitzt noch eine weitere Eigentümlichkeit: Während, wie aus den Figuren ohne weiteres einleuchtet, die Deutlichkeit der k-Interferenzen im allgemeinen von der Spaltbreite des Kollimators, d. h. von der Breite jedes einzelnen von einer *homogenen* Welle gebildeten Spaltbildes abhängt, ist in der Optimumstellung die Spaltbreite ohne jeden Einfluß. Mit anderen Worten: Die k-Interferenzen treten *in der Optimumstellung* auch im *unreinen* kontinuierlichen Spektrum auf.

§ 4. Die in § 3 genannte Optimumstellung versuchten wir zuerst mit der in Fig. 1 dargestellten Versuchsanordnung zu verwirklichen. Die Neigung der k-Interferenzen gegen die vertikale Spaltrichtung ist in der Optimumstellung so gering, daß man die Ebene der planparallelen Platte G von 1 mm Dicke (vgl. Fig. 1) fast vertikal stellen muß (vgl. Fig. 3, aus der man ersieht, wie gering der Winkel ist zwischen den k-Interferenzstreifen und der Spaltrichtung, d. h. den Fraunhoferschen Linien).

Als wir indes die Platte G langsam drehten und sie der Optimumstellung näherten, wurden die k-Interferenzen undeutlicher und verschwanden schließlich ganz. Als Grund hierfür ist die Beugung des Lichtes beim Eintritt in die Platte G anzusehen. Diese Eintrittsöffnung repräsentierte einen Spalt von etwa 1×10 mm Größe; nur die Beugung in Richtung der kurzen Spaltseite war praktisch von Bedeutung. Bei der in Fig. 1 gezeichneten Lage der Platte ist somit die Ebene der Beugungswinkel der gebeugten Strahlen nahezu parallel mit den k-Interferenzstreifen; hier war also die Beugung praktisch ohne Einfluß. Wenn man aber, um die Optimumstellung zu erhalten, die Ebene der Platte um nahezu 90° dreht, so stehen die Ebenen der gebeugten Strahlen senkrecht zu den k-Interferenzen, und es gelangt gebeugtes Licht an den Ort der Intensitätsminima, d. h. die Interferenzen werden verwaschen bez. verschwinden.

Die in Fig. 1 dargestellte Anordnung ist somit ungeeignet für die Verwirklichung der Optimumstellung der k-Interferenzen. Durch eine Modifikation des Versuches gelang es uns indes ohne Schwierigkeit, das Ziel zu erreichen, und zwar auf folgende Weise (Fig. 7, Horizontalschnitt):

C ist, wie früher, der Kollimator, *P* die Prismen, *F* das Beobachtungsfernrohr des 4-Prismenapparates. Die planparallele Platte *G* wurde nun, mit ihrer Ebene nahezu parallel dem Kollimatorspalt, *vor* den letzteren plaziert, wie aus Fig. 7 ersichtlich ist; *L* ist die Lichtquelle (Sonne bez. Bogenlampe).

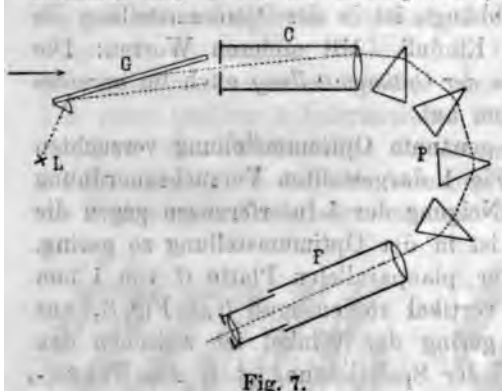


Fig. 7.

Die Platte *G* war auf einem Gestell mit drei Schrauben montiert, so daß sie mit Hilfe der letzteren fein justiert werden konnte.

Unter diesen Umständen wurde bei einer ganz bestimmten, nur sehr wenig von der Vertikalen abweichenden Lage der Plattenebene *G* die erwartete Optimumstellung der *k*-Interferenzen gefunden. Dieselbe war charakterisiert durch große Schärfe der Interferenzen und dadurch, daß die Spaltbreite des Kollimators nahezu ohne jeden Einfluß war auf die Deutlichkeit der Streifen. Während früher, bei der in Fig. 1 dargestellten Anordnung, der Spalt so eng wie möglich gemacht werden mußte, konnte er jetzt bis zu 2,5 mm weit gemacht werden; bei dieser Spaltbreite waren (Sonnenlicht als Lichtquelle vorausgesetzt) die Fraunhoferschen Linien natürlich vollständig verschwunden; in dem Spektralbereich zwischen den beiden *D*-Linien lagen etwa vier *k*-Interferenzstreifen (vier helle und vier dunkle Streifen), obgleich jede *D*-Linie ein Spaltbild erzeugte, das zum größten Teil mit demjenigen der anderen *D*-Linie zusammenfiel.

Der gleiche Effekt, wie der genannte, wurde auch erhalten, als das auf die Platte *G* aufgeklebte Prisma entfernt wurde, so daß das Licht in Richtung des Pfeiles (vgl. Fig. 7) direkt auf die Platte fiel. — Auch an einer planparallelen Platte von 1,5 mm Dicke, gleichfalls von Haecke uns freundlichst zur Verfügung gestellt, konnten die *k*-Interferenzen mit dem oben benutzten 4-Prismenapparat erzeugt werden, nicht mehr dagegen mit einer 3 mm dicken Platte. Als aber in der durch Fig. 7

dargestellten Anordnung der 4-Prismenapparat durch ein großes Rowlandsches Gitter ersetzt wurde, beobachteten wir auch an der 3 mm dicken und ferner an einer 5 mm dicken planparallelen Platte k-Interferenzen. Dieselben waren im letzteren Falle natürlich weit enger als vorher; zwischen den beiden D-Linien lagen etwa 20 k-Interferenzen. — An einer 1 cm

D_2 D_1

Fig. 8.

dicken Glasplatte war es trotz aller Bemühungen nicht möglich, k-Interferenzen mit der durch Fig. 7 angegebenen Anordnung (wobei der 4-Prismenapparat durch das Rowlandsche Gitter ersetzt war) zu erzeugen.

§ 5. Die in Fig. 7 dargestellte Anordnung leidet, so einfach sie ist, an einem prinzipiellen Mangel: die von der Platte G herkommenden Strahlen interferieren nur unvollständig, wenn sie den Spalt des Kollimators C treffen. Man kann diesen Übelstand beseitigen, wenn man zwischen die Platte G und den Kollimator C eine Sammellinse einschaltet, derart, daß der Spalt in der Brennebene der Linse steht. Man hat dann eine Anordnung, welche vollkommen analog ist der von Hrn. Fabry[1]) angegebenen.

1) Ch. Fabry, Compt. rend. 140. p. 848—851. 1905.

Mit einer solchen vervollkommneten Anordnung konnten wir auch an einer 1 cm dicken Glasplatte die k-Interferenzen erhalten; Fig. 8 ist eine so gewonnene, vergrößerte Aufnahme. Im Spektrum erster Ordnung eines Rowlandschen Konkavgitters von 6,5 m Radius[1]) war die Optimumstellung hier außerordentlich empfindlich, ihre Auffindung gelang erst nach längerem Suchen. — Fig. 8 stellt die Gegend der D-Linien im Sonnenspektrum dar; der mittlere Teil des Spektrums zeigt die k-Interferenzen, zwischen den Mitten der D-Linien liegen rund 42 Streifen. Oberhalb und unterhalb des von Interferenzen durchzogenen Spektrums sieht man noch schmale Spektra, in welchen die Interferenzen nicht erzeugt wurden und wo nur Fraunhofersche Linien sichtbar sind.

§ 6. Die Intensitätsverteilung der k-Interferenzen muß nach den Betrachtungen in § 2 ff. von derjenigen der h-Interferenzen im allgemeinen verschieden sein. Nur in der Optimumstellung müssen beide Streifenarten identische Intensitätsverteilungen haben. Allgemein gilt, daß die Intensitätsverteilung abhängig ist von dem Winkel, den die Richtung der h-Interferenzen mit derjenigen der k-Interferenzen einschließt. Im allgemeinen werden die Intensitätsmaxima der k-Interferenzen breiter sein als diejenigen der h-Interferenzen, doch ist die Steilheit des Abfalles zum Minimum bei beiden dieselbe. Auf die Berechnung der Intensitätsverteilungen außerhalb der Optimumstellung möge hier nicht näher eingegangen werden.

Die Form der k-Interferenzkurven hängt naturgemäß von der Dispersionskurve des angewandten Spektralapparates ab. Im Falle des Gitters ist die Form der Kurven leicht anzugeben. Der Gangunterschied γ der interferierenden Strahlen bestimmt sich durch die Gleichung[2]):

$$\gamma = 2\,dn\cos r = 2\,d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

1) Da in dem Raume des Laboratoriums diese 6,5 m lange Distanz nicht zur Verfügung stand, wurde der Spalt in der Brennebene des Gitters aufgestellt und das Spektrum mit einem auf ∞ eingestellten Fernrohr von 1,5 m Brennweite und 9,5 cm Apertur erzeugt.

2) Hier bedeutet d die Dicke, n den Brechungsexponenten, i und r bez. den äußeren bez. inneren Einfallswinkel an der planparallelen Platte; vgl. auch O. Lummer u. E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 10. p. 466. 1903.

Längs eines Interferenzstreifens ist die Ordnungszahl γ/λ konstant, demnach folgt als Gleichung der Kurven:

$$\frac{2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{\lambda} = \text{const};$$

hier sind allein λ und i Variable, sofern der Brechungsexponent n als konstant betrachtet werden kann. In einem Normalspektrum besitzen sonach die k-Interferenzkurven die Form:

$$\sqrt{a^2-\sin^2 x} = by;$$

sofern also der Winkel i nur geringe Änderungen erleidet, sind die Interferenzkurven Stücke von Ellipsen.

Die k-Interferenzen können für einen gegebenen Spektralapparat von bestimmtem Auflösungsvermögen nicht bei beliebig hohem Gangunterschied der interferierenden Strahlen auftreten. Es ist klar, daß nur dann ein kanneliertes Spektrum entstehen kann, wenn zwei benachbarte Interferenzmaxima noch deutlich voneinander getrennt werden, d. h. wenn dieselben nicht näher liegen, als der kleinsten Wellenlängendifferenz $\delta\lambda$ entspricht, die der Spektralapparat noch gerade zu trennen vermag. Da nach den Betrachtungen der §§ 2 ff. der Abstand zweier k-Interferenzstreifen, gemessen in Wellenlängen, nichts anderes ist als das sogenannte „Dispersionsgebiet" $\Delta\lambda$ der zur Verwendung kommenden planparallelen Platte, so folgt mithin die für das Auftreten von k-Interferenzen notwendige Bedingung

$$\delta\lambda < \Delta\lambda$$

oder

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < \frac{\lambda}{\delta\lambda}. \tag{1}$$

Nun ist $\lambda/\Delta\lambda$ gleich der Ordnungszahl der Interferenzen, $\lambda/\delta\lambda$ das Auflösungsvermögen des Spektralapparates. Für das von uns verwandte Rowlandsche Gitter ist im Spektrum der ersten Ordnung $\lambda/\delta\lambda$ = etwa 100000, während für den größten, bisher von uns angewandten Gangunterschied, nämlich an der 1 cm dicken Glasplatte, sich $\lambda/\Delta\lambda$ = etwa 40000 ergibt (für $\lambda = 0{,}5\,\mu$). Hieraus folgt, daß in der Tat die oben aufgestellte Bedingung (1) erfüllt war.

§ 7. Die beschriebenen k-Interferenzen können, wie uns scheint, bei Wellenlängenmessungen im Spektrum mit Vorteil

verwandt werden und hier sozusagen als ein natürlicher Maßstab dienen. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß die Gitterfehler bei der Ausmessung vermittelst der Interferenzen in Fortfall kommen. Insbesondere möchten wir den Vorschlag machen, die k-Interferenzen zur Korrektion von Rowlands Atlas der Fraunhoferschen Linien zu gebrauchen.[1])

Man hätte zu diesem Zwecke die Rowlandschen Aufnahmen des Sonnenspektrums zu wiederholen, mit dem Unterschiede, daß auf einen kleinen Teil des Spaltes weißes Licht geworfen wird, welches eine planparallele Platte durchsetzt hat. Dann entsteht ein Spektrum etwa von der in Fig. 8 dargestellten Art, welches ein (mittleres) Band mit k-Interferenzen enthält. Um den störenden Einfluß der in dieser Interferenzskala enthaltenen Fraunhoferschen Linien zu beseitigen, würde es sich empfehlen, zur Erzeugung der Skala das gleichmäßigere Licht einer irdischen Lichtquelle, etwa einer Nernstlampe, zu benutzen; die ungleiche Helligkeit zwischen dem von dieser und der Sonne erzeugten Spektrum kann man durch Anwendung eines weiteren Spaltstückes in dem von der Nernstlampe gelieferten Teile des Spektrums ausgleichen; hierdurch wird ja nach dem früheren die Deutlichkeit der k-Interferenzen in der Optimumstellung nicht behindert. Um von den durch mangelnde Achromasie bedingten Fehlern der Hilfsapparate, wie Linsen etc., frei zu werden, würde es sich empfehlen, nur mit metallischen Hohlspiegeln u. dgl. zu arbeiten.

Um die so erzeugte Interferenzskala in Wellenlängen auszuwerten, würde es nötig sein, die (von uns bisher wegen ihrer bequemeren Handhabung ausschließlich benutzten) planparallelen *Glas*platten zu verwerfen und statt deren eine planparallele, versilberte Luftplatte nach Perot und Fabry oder besser noch eine *Vakuum*platte anzuwenden. Es würden dann alle Korrektionen der Skala in Fortfall kommen, bis auf die

---

1) Die Talbotschen Streifen im kontinuierlichen Spektrum sind zu Wellenlängenmessungen bereits von E. Esselbach, Pogg. Ann. 98. p. 513—546. 1856, benutzt worden. K. Tsuruta hat die Talbotschen Streifen in The Phys. Rev. 15. p. 380—382. 1902 zur Bestimmung von Brechungsexponenten angewandt. Die gleiche Anwendung machte auch S. R. Williams von den Interferenzen keilförmiger (?) Platten im kontinuierlichen Spektrum, vgl. The Phys. Rev. 18. p. 280—294. 1904.

unvermeidlichen Phasensprünge an den durchsichtigen Silberschichten. Indes ließen diese sich direkt bestimmen.[1])

Zur exakten Messung der Fraunhoferschen Linien würde es dann genügen, zwei Wellenlängen im Spektrum genau zu kennen, um daraus durch Abzählen der Interferenzstreifen die übrigen zu ermitteln. Bezeichnet λ_1 und λ_2 diese beiden als bekannt vorauszusetzenden Wellen, r und s die zwischen diesen und einer zu messenden Welle λ liegende Anzahl von Interferenzstreifen, α, α_1 und α_2 die diesbezüglichen Phasensprünge bei der Reflexion an den versilberten Oberflächen der Platte, so würde sich λ nach der Formel berechnen:

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \frac{r + s + \alpha_2 - \alpha_1}{r\lambda_1 + s\lambda_2 - (\alpha_1 - \alpha)\lambda_1 + (\alpha_2 - \alpha)\lambda_2}.$$

Die Genauigkeit der Messung erscheint nur begrenzt durch die Feinheit der Fraunhoferschen Linien.

Vor nicht langer Zeit haben die Herren Fabry und Buisson[2]) eine große Zahl von Spektrallinien mit Hilfe der h-Interferenzen planparalleler Platten ausgemessen. Unsere oben beschriebene Methode erscheint geeignet, nicht nur diese Messungen zu kontrollieren, sondern auch die Interpolationen zwischen diesen Normalen zu vermeiden und jede dazwischenliegende Linie direkt auszumessen.

Messungsergebnisse nach obiger Methode können wir nicht mitteilen. Wir hatten gehofft, unsere Methode bald nach der ersten Veröffentlichung in den Verhandl. d. Physik. Gesellsch. vom 15. Juni 1906 praktisch erproben zu können. Zur Ausführung der Messungen bedarf man jedoch einer sehr stabilen Gitteraufstellung, wie sie in der Reichsanstalt bisher nicht vorhanden ist.

Charlottenburg, Physik.-Techn. Reichsanstalt.

---

1) Vgl. Macé de Lépinay und H. Buisson, Compt. rend. 137. p. 312—314. 1903; A. Perot, Compt. rend. 142. p. 566—568. 1906.

2) Ch. Fabry u. H. Buisson, Soc. Franç. de Phys. Nr. 248. p. 8. 15. Juni 1906; Compt. rend. 143. p. 165—167. 1906; Compt. rend. 144. p. 1155—1157. 1907.

(Eingegangen 21. Juni 1907.)

11. *Über die Begleiterscheinung des inversen longitudinalen Zeemaneffektes;* *von Ludwig Geiger.*

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

Die Erscheinungen des Zeemaneffektes wurden theoretisch hauptsächlich von Lorentz und W. Voigt in Angriff genommen. Lorentz[1]) ging von der Vorstellung magnetisierter Elektronen aus und nahm besonders den direkten Effekt in Angriff; Voigt[2]) behandelte den inversen Effekt, indem er den Durchgang einer ebenen Welle durch ein mit schwingungsfähigen Vektoren begabtes absorbierendes Medium im magnetischen Felde untersuchte; der Kirchhoffsche Satz gestattet schließlich den Übergang zum direkten Effekt. Dabei folgerte Voigt aus seinen Gleichungen ganz auffallende Begleiterscheinungen des Zeemaneffektes: Unter anderem sollte bei Beobachtung parallel den magnetischen Kraftlinien das Azimut lineär polarisierten Lichtes im Bereich einer Absorptionslinie außerordentlich stark gedreht werden. Qualitativ wurde dieses Resultat kurz vor seiner Mitteilung von Macaluso und Corbino[3]) tatsächlich an Natriumdampf beobachtet, quantitativ von Hallo[4]) an Natrium näher untersucht und die drei Parameter der Voigtschen Theorie für A.E./5896 berechnet. Ursprünglich gab Voigt seine Theorie nur für den einfachsten Fall des longitudinalen Duplets; nachdem aber eine Reihe komplizierterer Typen bekannt geworden waren, zeigte er, wie man durch Einführen von „magnetischen Koppelungen" der Vektoren auch diese neuen Fälle erklären könne.[5]) Aus seinen Grundformeln habe ich für den speziellen Fall eines longitudi-

1) H. Lorentz, Astrophys. Journ. **9.** p. 37—46. 1899.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **67.** p. 345 ff. 1899.
3) D. Macaluso u. O. M. Corbino, Compt. rend. **127.** p. 548. ff.
4) J. J. Hallo, Amsterdamer Diss. 1902.
5) W. Voigt, Wied. Ann. **68.** p. 352 ff. 1899.

nalen Quatruplets die Drehung χ'_{IV} der Polarisationsebene ausgerechnet[1]) zu

$$\chi'_{IV} = \frac{2 l \varepsilon_i \delta^2 c_i R}{v\{(4\delta^2 - d_i'^2 \vartheta_{i_0}^2)^2 - 4 c_i^2 R^2 \delta^2\}}, \tag{1}$$

worin

- l Dicke des absorbierenden Mediums;
- ε_i eine für das gewöhnliche optische Verhalten des Mediums charakteristische elektrische Konstante;
- R Stärke des äußeren Magnetfeldes;
- v Lichtgeschwindigkeit im Vakuum;
- c_i für die Wirkung von R charakteristische Konstante;
- d_i' ist Funktion von R, eine magnetische Konstante;
- ϑ_{i_0} Schwingungszahl der ungestörten Welle;
- δ Unterschied der Schwingungszahlen der gestörten und ungestörten Welle.

Setzen wir darin

$$d_i' = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung für *das longitudinale Duplet:*

$$\chi'_{II} = \frac{l \varepsilon_i c_i R}{8 v \delta^2}, \tag{2}$$

die Voigt auf direktem Wege gefunden hat.

Durch Hallo ist allerdings die einfache Theorie an der Natriumlinie A.E./5896 bestätigt, und sind die drei Parameter derselben berechnet worden. Jedoch war zur Befestigung der Theorie und der Aufsuchung von quantitativen Beziehungen zwischen den Parametern der Theorie für verschiedene Absorptionslinien eine quantitative Untersuchung anderer Linien des Natriums und anderer Elemente geboten, weshalb Hr. Geheimrat W. Voigt mir vorschlug, in dieser Richtung einige Versuche anzustellen. Die Ziele dieser Untersuchung können dahin formuliert werden:

a) Es ist bei einigen Elementen und bei jedem von diesen wiederum an verschiedenen Linien seines Spektrums der inverse longitudinale Zeemaneffekt und der Verlauf der Drehung quantitativ zu untersuchen.

b) Bei der Wahl der zu untersuchenden Linien sind vor allem solche zu berücksichtigen, die einer der von Kayser und Runge gefundenen Serien angehören. Es ist dann zu versuchen, für eine solche Serie eine Gesetzmäßigkeit für die

1) L. Geiger, Göttinger Disscrtation 1907.

Drehung zu finden, parallel zu der von Preston für den Zeemaneffekt gefundenen Regel.

c) Es ist die Abhängigkeit der Drehung von der physikalischen Natur der Absorptionsflamme zu untersuchen.

Prinzipien der verwendeten Methoden.

a) *Die Keilmethode* nach Voigt ist bereits von Hallo zu quantitativen Versuchen mit Erfolg verwendet worden. Der ihr zugrunde liegende Gedankengang ist folgender: Man schleift zwei kongruente Prismen, das eine aus Links-, das andere aus Rechtsquarz, und fixiert ihre Hypothenusenflächen so gegeneinander, daß das Ganze ein Parallelopiped bildet. Die Verwendung von Kanadabalsam ist dabei wegen dessen Undurchlässigkeit für das unsichtbare Spektrum ausgeschlossen. Geht dann lineär polarisiertes Licht durch den Doppelkeil, so wird sein Azimut im allgemeinen gedreht, und zwar nach links, wenn der Weg im Linkskeil, nach rechts, wenn derjenige im Rechtskeil der längere ist. Ein Analysator, dessen Azimut auf demjenigen des Polarisators senkrecht steht, vermag also nur diejenigen Strahlen auszulöschen, die im Doppelkeil gar nicht oder um Vielfache von $\pm 180^\circ$ gedreht sind. Man wird also im Fernrohr ein horizontales System heller und dunkler Streifen sehen, die sich im Bereiche einer Absorptionslinie deformieren, wenn wir in den Strahlengang unsere magnetisierte Flamme einschalten. Wir können also mit einem Blick den Verlauf der Drehung übersehen und auch ausmessen, weil wir ja wissen, daß sich das Azimut zweier dunkler Streifen um 180° unterscheidet.

b) *Die Methode der gekreuzten Nicols* ist die von Macaluso und Corbino bereits erprobte; sie geht aus der eben beschriebenen hervor, wenn man den Doppelkeil wegläßt, dafür aber den Polarisator drehbar macht. Bei einem gewissen Winkel φ zwischen den Azimuten des Polarisators und Analysators ist der Absorptionsstreifen auf beiden Seiten von einem System heller und dunkler Streifen begleitet, die zu wandern beginnen, wenn man den Polarisator dreht. Das Azimut je zweier benachbarter dunkler Streifen ist um 180° verschieden, so daß man aus dem Orte der Streifen und dem Winkel φ *successive* den Verlauf der Drehung erhält.

Die Apparate.

A. Beschreibung der Konstruktion der Apparate.

Die Projektionslinse J wirft das Licht des Kohlebogens L, nachdem es im Polarisator P lineär polarisiert worden ist, durch einen der Länge nach durchbohrten Elektromagneten M. Dieser Magnet kehrt seine Pole nach innen, seine maximale Feldstärke liegt also bei c. J ist so aufgestellt, daß die Strahlen gerade zwischen den Magnetpolen vereinigt werden und am anderen Ende des Magneten schwach divergent austreten. Die Linse l vereinigt sie wieder auf den Spalt S des Spektrometers. Vor dem Spalt sind bei der Keilmethode der

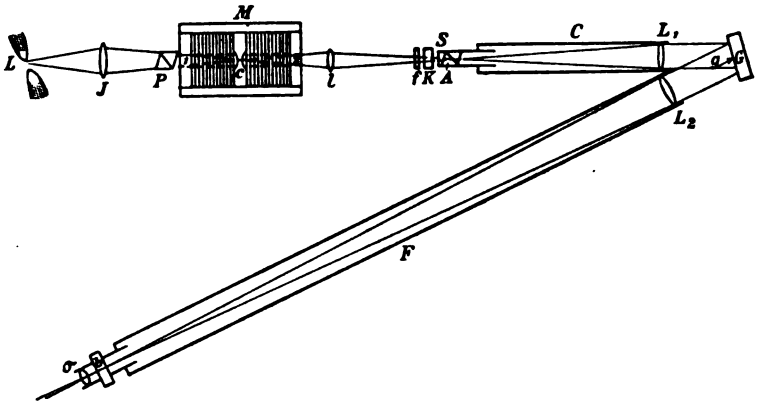


Fig. 1.

Quarzdoppelkeil K aufgestellt, und bei Beobachtungen im roten und gelben Teile des Spektrums ein Strahlenfilter f, das die violetten und ultravioletten Strahlen absorbiert. Das Spektrometer selbst hat keine Prismen, sondern ein Plangitter G, braucht also einen Kollimator C mit der Linse L_1 und ein Fernrohr F mit dem Objektiv L_2. Im Kollimator muß das Licht noch den Analysator A passieren. Das Fernrohrobjektiv L_2 entwirft am Orte b ein reelles Spektralbild, das nun entweder durch das Okular o betrachtet oder durch eine in b selbst aufgestellte photographische Platte dauernd fixiert wird. Die zu untersuchende Absorptionsflamme wird bei c zwischen die Pole des Magneten gebracht.

Wir wollen jetzt die einzelnen Teile etwas ausführlicher besprechen:

Der *Elektromagnet M* ist von Max Kohl in Chemnitz nach Voigts Angaben angefertigt und von B. Bavink[1]) beschrieben.

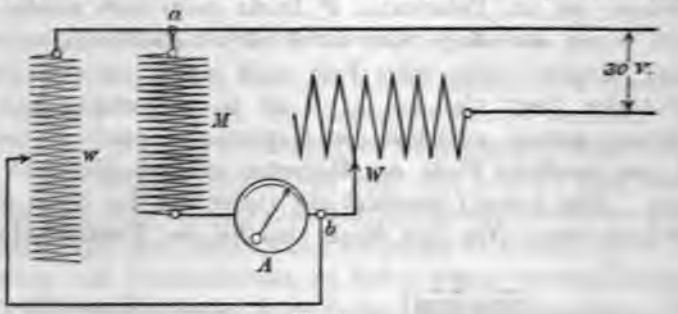


Fig. 2.

Die Speisung des Magneten erfolgte mitunter durch die städtische elektrische Leitung von 220 Volt, deren Spannung durch einen großen variablen Widerstand bis auf 30 Volt abgedrosselt wurde, in der Regel jedoch durch eine auf 30 Volt geschaltete Akkumulatorenbatterie von 30 Zellen. Zuerst geht deren Strom durch einen Vorschaltwiderstand W von 0,1 Ohm und wird dann verzweigt: der Hauptstrom geht durch ein Ampèremeter A und dann durch den Magneten M. Um aber die Stromstärke im Magneten genau konstant erhalten zu können, wurde der Magnet durch einen Nebenschluß teilweise umgangen. Dieser Nebenschluß bestand aus einem von 0 bis ∞ variablen Widerstande w, so daß man durch Variieren dieses letzteren die am Ampèremeter A beobachtete Stromstärke im Magneten leicht bis auf $^1/_5$ Amp. konstant erhalten konnte. Meistens betrug die Stromstärke 26,5 Amp., so daß deren Schwankungen unter 1 Proz. blieben.

Der *Quarzdoppelkeil K* ist 1,5 cm hoch und breit und 1 cm dick und erzeugt im ganzen Gesichtsfelde drei dunkle Streifen.

Das große *Rowlandsche Plangitter G*, das sein Besitzer, Hr. Kommerzienrat Dr. Hauswaldt in Magdeburg, dem Institut in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt hat[2]), ist

1) B. Bavink, Göttinger Dissert. 1904 und Neues Jahrb. für Mineralogie etc. Beil.-Bd. XIX.

2) Physik. Zeitschr. 6. p. 891. 1905.

auf einer Fläche von 7 × 13 cm geteilt und besitzt nach einer von Rowland darauf eingeritzten Notiz 15000 Linien pro inch.

Um auch im unsichtbaren Spektrum experimentieren zu können, wurden von H. Heele in Berlin die beiden *Linsen* L_1 *und* L_2 aus dem neuen „Uviolglas" von Schott und Genossen geschliffen, das zwar weit hinter Quarz zurücksteht, aber für die in Frage kommenden Gebiete vollkommen ausreicht.

Das *Doppelokularmikrometer* ist von Spindler & Hoyer in Göttingen konstruiert. Es besitzt ein Andreaskreuz und einen getrennten Vertikalfaden. Durch Drehen der einen Trommel wird das ganze Fadensystem als solches verschoben, durch Drehen der anderen Trommel nur der Vertikalfaden relativ zum Kreuz. Handelt es sich also wie im vorliegenden Falle um Messungen kleiner Abstände von Spektrallinien, so genügt eine einzige Ablesung an einer Trommel, was natürlich bei vielen Messungen erheblich Zeit spart.

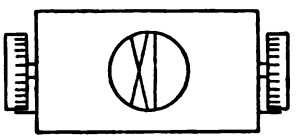


Fig. 3.

Die *Kamera*, die zur Aufnahme von Kassetten dient, ist höchst einfach: Ein rechteckiger Rahmen von U-förmigem Querschnitt trägt als Füllungen zwei Bleche *B*, so daß das Ganze einer Plattenkassette sehr ähnlich sieht. Eine Schmalseite des Rahmens ist geschlitzt (*s*), so daß hier eine gewöhnliche Kassette für Platten 9 × 12 cm eingeschoben werden kann. Die Vorderwand der Kamera hat ein Fenster von 3 × 4 cm Öffnung und trägt einen aufgeschraubten Fassungsring *r*, der direkt an den Auszug des Fernrohres gesteckt werden kann. Die Kassetten haben an einer Längsseite zwei Kerben, in die eine an der Kamera angeschraubte federnde Nase *n* einschnappt. Dadurch können auf einer Platte nacheinander drei Aufnahmen gemacht werden.

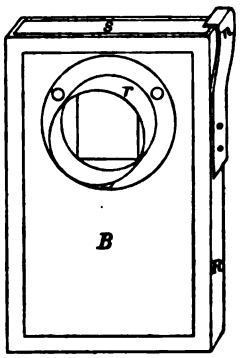


Fig. 4.

Zu den photographischen Aufnahmen wurden *Platten* von Schleussner und von Perutz verwendet. Die Photogramme

von A.E./4047 bis A.E./3070 wurden auf gewöhnlichen Schleussnerplatten gemacht. Die Belichtungszeit hing natürlich stark von der Spaltweite, der Spektralordnung und der Wellenlänge ab und mußte in jedem Falle neu bestimmt werden. Für A.E./5890 waren diese Platten schon zu unempfindlich, deshalb wurden Perutz' Perchromoplatten verwendet. Diese mit Erytrosinsilber sensibilisierte Platte ist für dieses Spektralgebiet sehr zu empfehlen, jedoch fällt von da an gegen rot ihre Empfindlichkeit rapide. Schon für A.E./6708 ist die Platte unbrauchbar. Von hier an bis A.E./7702 leistete das mir durch Hrn. Dr. Lehmann in Jena empfohlene Dicyanin ausgezeichnete Dienste. Dieser Sensibilisator wird von Meister, Lucius & Brüning in Höchst a/M. dargestellt.

Schließlich müssen wir noch mitteilen, *wie die absorbierenden Flammen erzeugt wurden.* Weil sehr viel darauf ankommt, daß die Flamme von einem Versuch zum anderen gleich hergestellt werden kann, und es ferner erwünscht war, einigen Aufschluß über die Menge der verdampften Salze zu erhalten, war die zunächst liegende Methode, die Salze am Platindraht einzuführen, unbrauchbar. Ich will der Kürze halber alle Vorversuche übergehen und nur mitteilen, wie ich schließlich brauchbare Flammen erhielt.

a) *Methode von Gouy* (vgl. Kaysers Handb. 1. p. 149). Eine kleine Glasbläserlampe wird einerseits mit Leuchtgas gespeist, dessen Druck an einem Wassermanometer kontrolliert werden kann, andererseits mit Druckluft, der ein Nebel von feingemengter Salzlösung beigemengt ist. Den dazu nötigen Sprayapparat zeigt Fig. 5.

I ist ein Kolben von 1 l Inhalt, der zwei weite Tuben *a* und *b* besitzt und nach unten in ein enges Rohr *e* mit seitlichem Ansatze *s* übergeht. Ein Schlauchstück mit Quetschhahn verschließt *e*. *II* ist eine kleinere Vorlage mit auch zwei Tuben *c* und *d*. Durch den Tubus *a* wird der eigentliche Zerstäuber gesteckt. Dieser besteht aus einem T-Rohr, das an dem Ende, wo es in den Kolben *I* ragt, zu einer Spitze ausgezogen ist. Das andere Ende ist verkorkt und trägt einen aufgegipsten überragenden Messingring *r*, der drei Stellschrauben besitzt. Durch das T-Rohr führt der Länge

nach ein etwas längeres enges Rohr *L*, das in eine feine Spitze mündet und andererseits durch einen Gummischlauch mit dem Ansatze *s* kommuniziert. Die Spitze dieses engen Rohres liegt nun gerade in der weiteren Spitze des T-Rohres und kann durch die drei Schrauben zentriert werden. Wird also durch den Ansatz des T-Rohres Luft geblasen, so wird diese an der Spitze von *L* saugen. Befindet sich im Ballon *I* eine Salzlösung, so steigt diese bis zu der engen Spitze und wird dort äußerst fein zersprüht. Die größten Tropfen fallen wieder zur

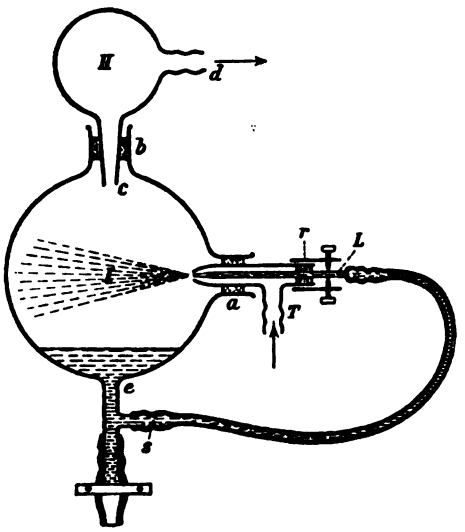


Fig. 5.

Vorratslösung, die feineren steigen mit dem Luftstrom in die Vorlage *II*, und nur die allerfeinsten gelangen schließlich von dort mit der Luft in die Gebläselampe. Sorgt man also dafür, daß der speisende Luftstrom konstant bleibt, so wird auch eine konstante Salzmenge der Flamme zugeführt. Diese ist sogar direkt aus der Gewichtsabnahme des ganzen Apparates und der Konzentration der Lösung bestimmbar.

Diese Methode ist äußerst zuverlässig, jedoch hat sich aus Versuchen an Kalium gezeigt, daß auch bei Anwendung gesättigter Kaliumsalzlösungen die der Flamme zugeführte Salzmenge nicht hinreicht, um eine gute Umkehr der Kaliumlinien

zu erzielen. Ich mußte deshalb noch nach einer anderen Methode suchen, die erlaubt, viel größere Salzmengen in die Flamme zu bringen, und die doch über die Menge des zugeführten Salzes einigermaßen Aufschluß gibt. Nach längeren meist vergeblichen Versuchen gelang mir dies endlich auf folgendem Wege:

b) *Methode der Pulverspritze.* Ein starkes Glasrohr *K* von 2 cm im Lichten und 80 cm Länge wurde zweimal knieförmig gebogen, wie Fig. 6 zeigt. Es wurde an beiden Enden verkorkt und vertikal fixiert. Vom oberen Ende führt ein Entbindungsrohr zur Flamme, durch den unteren Kork geht ein spitz auslaufendes, vertikal um 10 cm verschiebbares Glasrohr *R*. Ein daran befestigter Zeiger *z* zeigt an einer außen befindlichen Skala die Höhe der Spitze an. Wird nun das Rohr *K* etwa 8 cm hoch mit Salzpulver beschickt und durch *R* Luft geblasen, so wirbelt diese das über der Spitze liegende Pulver vulkanartig auf und wirft es gegen das gegenüberliegende Knie. In dem toten Winkel bei *e* lagert sich fast aller Staub wieder ab, und nur die feinen Partikelchen werden von dem aufsteigenden Luftstrome mitgeführt. Auf diesem Wege werden die schwereren Teilchen durch ihr größeres Gewicht nach *e* zurückfallen, und nur die allerfeinsten werden durch das Entbindungsrohr der Flamme zugeführt. Damit sich der Weg bei *e* nicht verstopft, und um die Eruptionen auszugleichen, trommelt fortwährend ein elektrisches Rasselwerk *r* gegen den Apparat. Wie bei der Methode von Gouy wird die der Flamme zugeführte Salzmenge aus der Gewichtsabnahme des ganzen Apparates bestimmt. Läßt man den Apparat stundenlang funktionieren, so wird allmählich weniger Staub weggeführt.

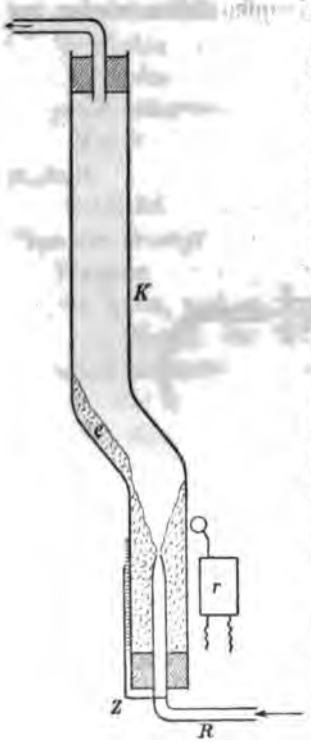


Fig. 6.

Deshalb wurde zu jedem Versuche der Apparat mit frischem Pulver gleich hoch beschickt.

B. Die Apparatkonstanten.

a) Die *Feldstärke* wurde aus der Widerstandsänderung einer von Hartmann & Braun geeichten Wismutspirale bis auf 1 Proz. bestimmt. Zunächst wurde für sechs verschiedene Poldistanzen die zugehörige Feldstärke gemessen (Fig. 7). Aus

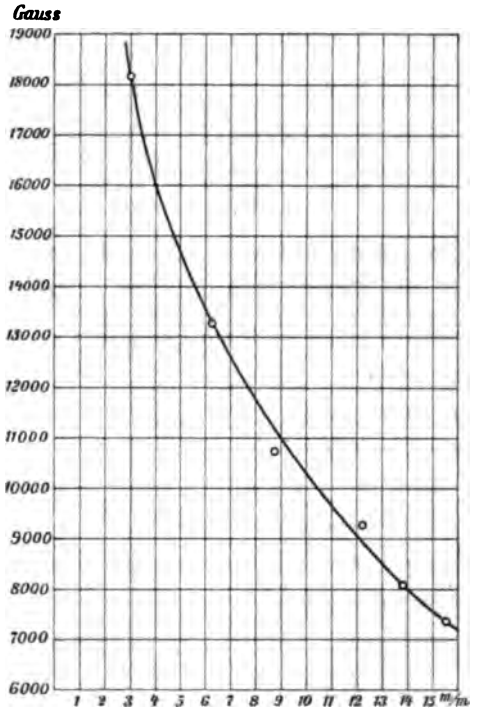


Fig. 7.

Gleichung (2) p. 759 folgt, daß die Drehung χ proportional dem Produkt aus der Feldstärke R und der Poldistanz l ist. Um also dieses Optimum der Poldistanz zu finden, wurden aus den Werten der Fig. 7 diese Produkte gebildet (Fig. 8). Man sieht, daß die Kurve bei etwa 17 mm ein flaches Maximum erreicht, doch konnte diese Poldistanz aus technischen Gründen nicht verwendet werden, sondern nur diejenige von 10,0 mm.

Aber das zugehörige Produkt beträgt schon ca. 90 Proz. des Optimums. Für diese Poldistanz von 10,0 mm wurde endlich die Feldstärke als Funktion der Stromstärke bestimmt (Fig. 9). Diese Kurve erlaubte es, die Versuche bei verschiedenen

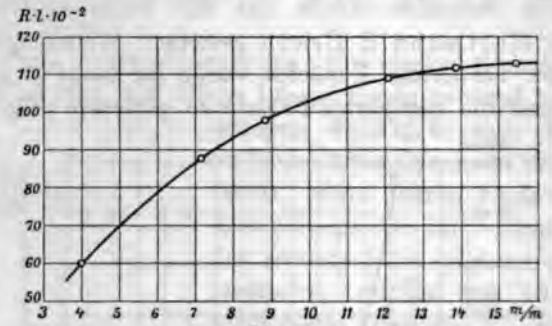


Fig. 8.

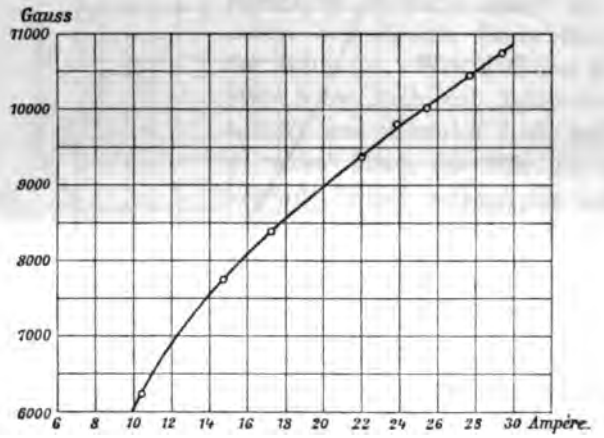


Fig. 9.

Stromstärken auszuführen; weil man ihr sofort die zugehörige Feldstärke entnehmen kann und der Effekt dieser proportional ist, kann man leicht die Messungen auf eine gemeinsame Feldstärke reduzieren.

b) *Dispersion des Gitters.* Es empfiehlt sich sehr, in einer Spektralordnung für eine Reihe bekannter Emissionslinien des Kohlebogens die zugehörigen Gitterstellungen experimentell zu bestimmen und daraus graphisch die Dispersionslinie zu konstruieren. Die Ausgleichung der Fehler ist dabei äußerst ein-

fach, weil ja die Kurve eine Gerade ist. Besitzt man einmal die Dispersionslinie, so kann man sowohl für jede Wellenlänge interpolieren als auch *beliebig weit* extrapolieren. Für alle

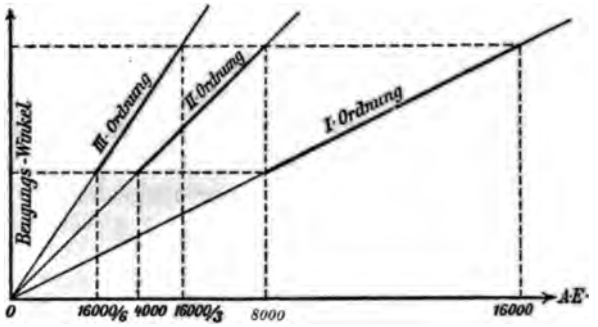


Fig. 10.

anderen Ordnungen kann man die Dispersionslinien aus dieser einen konstruieren, weil an *einer* Stelle des Spektrums die Wellenlängen λ, $\lambda/2$, $\lambda/3$ ... der verschiedenen Ordnungen streng koinzidieren (Fig. 10).

c) *Auswertung der Spektrogramme.* Aus b) kennen wir die Dispersion für jede Ordnung, ferner wissen wir, daß die Brennweite des Fernrohres stark durch die Wellenlänge bedingt ist.

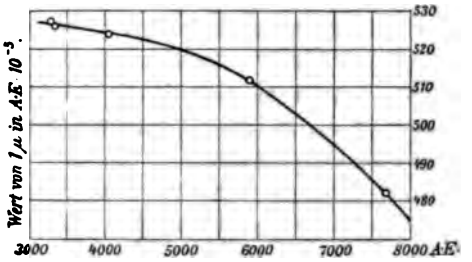


Fig. 11.

Einem gleichen Intervalle zweier Linien auf der Platte entspricht deshalb in jeder Farbe ein anderer Beugungswinkelbez. Wellenlängenunterschied, er ist in rot kleiner als in violett.

Man muß deshalb für jede Farbe diesen Wert gesondert bestimmen, indem man auf einer Platte den Abstand zweier gut bekannter Linien (etwa Dupletten) mißt, und daraus rechnet,

welcher Wellenlängenunterschied der Längeneinheit entspricht. Graphisch kann man dann für jede Wellenlänge interpolieren. Von der n^{ten} zur m^{ten} Ordnung geht man über durch Multiplikation mit n/m.

d) *Dampfdichte in der Absorptionsflamme.* Absolut können wir d nur der Größenordnung nach bestimmen, weil wir ja nicht wissen, wieviel von dem eingeführten Metall verdampft, und wir annehmen müssen, d sei in der ganzen Flamme V gleich groß.

Zur Messung von d an Natrium mit dem Apparat von Gouy wurde zunächst eine „Urlösung" hergestellt:

NaCl	36,0 g
destilliertes Wasser . .	100,0 g
	136,0 g

die also 10,5 Proz. Na enthält.

aa) Der Apparat wird mit Urlösung beschickt und gewogen (a), dann während n Sek. in Betrieb gesetzt und wieder gewogen (a'). Dann ist

$$d = \frac{(a - a') \cdot 0{,}105}{n \cdot V}.$$

bb) Die Urlösung wird auf $1/m$ verdünnt und analog verfahren; es ist

$$d = \frac{(a - a') \cdot 0{,}105}{n \cdot m \cdot V}.$$

Der Apparat von Gouy erzeugte bei 26 cm Hg Luftüberdruck und 2,5 cm Wasser Gasüberdruck die folgenden d:

	Natrium					Lithium
$1/m$	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_8$	$^1/_{16}$	$^1/_{32}$	$^1/_1$
$d \cdot 10^9$	1880	1150	591	283	128	966

Zur Bestimmung von d an Lithium wurde so verfahren: eine bei 15,7° C. konzentrierte Lösung von LiCl wird auf $^3/_4$ verdünnt und heißt „Urlösung".

Bei 15,7° besteht eine konzentrierte Lösung von LiCl aus

LiCl	77 g
Wasser	100 g
	177 g;

sie enthält also 8,65 Proz. Li und die Urlösung enthält 6,50 Proz. Li.

Mit der Pulverspritze kann die Bestimmung ganz analog ausgeführt werden, liefert aber Werte, die mit den eben zitierten keinen absoluten Vergleich erlauben. In der Drehung beim longitudinalen Zeemaneffekt bekommen wir nämlich später (p. 779) ein Kriterium für d, das zu diesem Schlusse führt. Wahrscheinlich ist der Teil, der verdampft, bei der ersten Methode viel größer. Immerhin dürfte die absolute Größenordnung der d oben richtig gefunden sein, und relativ zueinander sind die Werte recht zuverlässig.

Die Versuchsergebnisse.

In allererster Linie mußte genauer untersucht werden, welche Metallflammen Absorptionslinien liefern und unter was für Bedingungen diese zustande kommen. Nach dem Gesetz von Kirchhoff entspricht allerdings jeder Emissionslinie eine Absorptionslinie, aber leider sind wir in den seltensten Fällen imstande, künstlich die zur Umkehr notwendigen Bedingungen herzustellen. Liveing und Dewar haben eine Reihe eingehender Untersuchungen an den verschiedensten Elementen angestellt und erhielten bei hohen Drucken, Dampfdichten, Temperaturen und dicken Schichten auch viele Linien umgekehrt. Bei der Untersuchung des inversen Zeemaneffektes ist die Sache aber noch dadurch kompliziert, daß die Schichtdicke kaum über 1 cm wachsen darf, weil sonst die magnetische Feldstärke zu gering ist. Man ist also genötigt, bei großen Dampfdichten zu arbeiten, und dies ist einzig durch gefärbte Flammen erreichbar. Es wurden deshalb zunächst Salze von Na, Sr, Li, Mg, K, Th, Cd, Co, Cr, Mn auf ihre Umkehrbarkeit untersucht, und zwar im Bunsenbrenner, einem Luftgebläse und einer Knallgasflamme. Als direkte Lichtquelle diente die oben beschriebene Bogenlampe. Es zeigte sich eine Umkehr bei Na/5896, Na/5890, Na/3303, Na/3302, Li/6708, Th/5350, K/7702, K/7669, K/4047, K/4044, K/3447, K/3217. In der Folge wurde versucht, die Drehung an diesen Linien zu untersuchen, wir lassen die Ergebnisse hier folgen:

A. Natrium.

I. Drehung an A.E./5896 und A.E./5890.

Zunächst wurde nach der Methode der gekreuzten Nicols (vgl. p. 760) der Verlauf der Drehung der Polarisationsebene an den beiden Linien A.E./5896 und A.E./5890 in erster Ordnung photographisch aufgenommen. Platte 117a enthält die Absorptionslinien ohne Feld bei der Dampfdichte $d = 1700 \times 10^{-9}$ (vgl. p. 771 u. 779), 117b bis 118c die Drehung bei $\varphi = 85^0, 70^0, 40^0, 20^0, 10^0$; d ist immer $1700 . 10^{-9}$, die Stromstärke im Magneten ist gleich 26,5 Amp., also die Feldstärke $R = 10250$ Gauss (vgl. Fig. 7). Zur Bestimmung der Breite der Absorptionslinien auf 117a wurde auf jeden Rand 10mal eingestellt, und der Mittelwert und sein mittlerer Fehler daraus berechnet. Bei den Effektaufnahmen wurde auf die Mitte der Absorptionslinie und die hellste bez. dunkelste Stelle der begleitenden Streifen je 10mal eingestellt und Mittelwert und mittlerer Fehler berechnet. Aus der Aichkurve (Fig. 11) folgt $1\,\mu = 0{,}00513$ A.E.; man erhält also für jede Messung $d\lambda$ in A.E. und nach Division durch λ^2 die Abweichungen vom Orte der Urlinie in Schwingungsdifferenzen. Jedem Photogramm entspricht also eine Tafel wie die folgende:

Platte 117b: Drehung von 85°. 26,5 Amp. = 10250 Gauss.
$d = 1700 . 10^{-9}$.

Linie	Beobachtungen	Mittel	Mittlerer Fehler	δ in μ	Mittlerer Fehler	$d\lambda$ in A.E.	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$
λ/5896	10 Ablesungen	11243	2,0	—	—	—	—
85° rot	„ „	11349	1,6	106	2,5	0,543	1,56
85° viol.	„ „	11128	1,5	115	2,0	0,589	1,70
λ/5890	„ „	10085	1,0	—	—	—	—
85° rot	„ „	10241	1,3	156	1,6	0,800	2,30
85° viol.	„ „	9937	2,5	148	3,0	0,800	2,31

Die Tafel jedes Photogrammes hier wiederzugeben, wäre zu weitschweifig; ich lasse deshalb nur eine Zusammenstellung

der Resultate folgen. Darin ist unter „Drehung 0°“ die Breite der Absorptionslinien ohne Feld verstanden. Für jede andere Drehung sind je zwei Werte tabuliert, von denen der erste die Drehung auf der infraroten, der zweite diejenige auf der ultravioletten Seite der Absorptionslinie bedeutet. Wie man sieht, sind diese beiden Werte im allgemeinen etwas voneinander verschieden, jedoch zeigt ein Vergleich der Messungen an Natrium, Kalium und Lithium, daß keine systematische Asymmetrie vorliegt. Zunächst könnte man erwarten, daß in dem Gebiete zwischen den beiden Linien der natürlichen Duplette eine Superposition der durch beide Linien einzeln verursachten Drehungen stattfinde, und bei den Versuchen von G. Hallo war dies auch sicher der Fall. Bei meinen Versuchen wurden aber solch geringe Dampfdichten verwendet, daß in dem fraglichen Gebiete keine merkliche Drehung zustande gekommen ist. Wir dürfen also die Abweichungen durch die Schwierigkeit der Messungen erklären.

Verlauf der Drehung an Natrium A.E./5896 in 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Drehung	Feldstärke in Gauss	$d \cdot 10^9$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	Bemerkungen
0°	—	1700	0,421	0,005	1,21	
			0,42	0,01	1,21	
40	10250	1700	1,085	0,005	3,13	Auf dem gleichen Spektrogramm ist die 130°-Drehung
			0,98	0,008	2,82	
70	10250	1700	0,69	0,02	1,98	
			0,62	0,02	1,78	
85	10250	1700	0,54	0,015	1,56	
			0,59	0,01	1,70	
100	10250	1700	0,629	0,005	1,81	Die 10°-Drehung war zu diffus, um vermessen zu werden
			0,45	0,007	1,30	
110	10250	1700	0,57	0,01	1,64	Die 20°-Drehung war zu diffus, um vermessen zu werden
			0,49	0,01	1,41	
130	10250	1700	0,528	0,005	1,52	Auf dem gleichen Spektrogramm ist die 40°-Drehung
			0,481	0,005	1,24	

Verlauf der Drehung an Natrium A.E./5890 in 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Drehung	Feldstärke in Gauss	$d \cdot 10^8$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	Bemerkungen
0°	—	1700	0,51	0,008	1,47	
			0,51	0,008	1,47	
40	10250	1700	1,37	0,01	3,95	Auf dem gleichen Spektrogramm ist die 130°-Drehung
			1,16	0,01	3,35	
70	10250	1700	0,88	0,01	2,54	
			0,85	0,01	2,45	
85	10250	1700	0,80	0,01	2,30	
			0,80	0,016	2,31	
100	10250	1700	0,84	0,01	2,42	Die 10°-Drehung war zu diffus, um vermessen zu werden
			0,59	0,01	1,70	
110	10250	1700	0,68	0,01	1,96	Die 20°-Drehung war zu diffus, um vermessen zu werden
			0,64	0,01	1,85	
130	10250	1700	0,682	0,007	1,96	Auf dem gleichen Spektrogramm ist die 40°-Drehung
			0,581	0,005	1,67	

Fig. 12 und 13 zeigen den Effekt in der Skala der Schwingungszahlen:

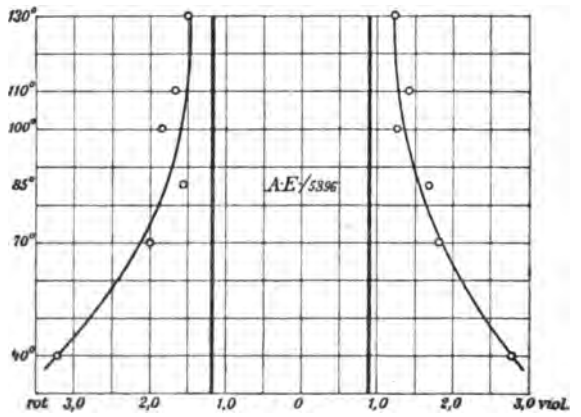


Fig. 12.

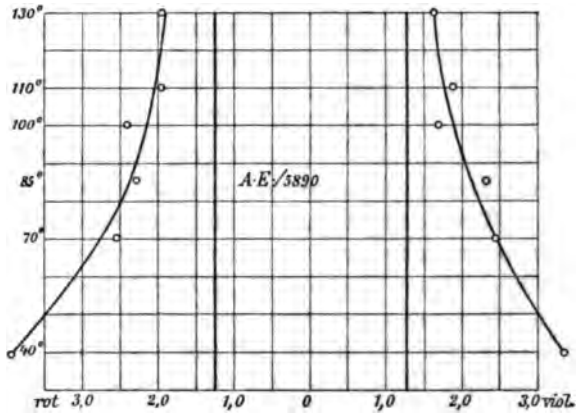


Fig. 13.

II. **Magnetische Zerlegung von A.E./5896 und A.E./5890.**

Weil wir zur Berechnung der Voigtschen Konstante c aus der Gleichung $c \cdot R = \delta_m$ die magnetische Trennung kennen müssen, wurde versucht, diese Zerlegung in erster Ordnung zu photographieren. Zuerst versuchte ich, zwischen den Magnetpolen eine Funkenstrecke so zu konstruieren, daß der Funke durch den durchbohrten Pol longitudinal beobachtet wird. Das nötige Natrium wurde von der Pulverspritze eingeblasen, was gleichzeitig den Funken kühlte. So konnte bei einer Feldstärke von ca. 20000 Gauss der Effekt sehr gut okular beobachtet werden, doch war der Funke zu lichtschwach, um Photogramme zu liefern. Ich verließ deshalb diesen Weg und versuchte, eine vollkommene Trennung der mit natürlichem Licht erzeugten Absorptionslinien selbst zu erhalten. Dies gelingt auch ohne eigentliche Schwierigkeit, man hat nur darauf zu achten, daß die Dampfdichte d nicht allzu klein ist. Auf den Photogrammen erhält man natürlich nicht nur die Zerlegung der Urlinie, sondern diese selbst auch noch, weil sie ja stets im Spektrum des Kohlebogens als feine selbstumgekehrte Linie auftritt. Bei einer Feldstärke von 18350 Gauss ist die Zerlegung an A.E./5896 sehr gut meßbar, die Komponenten sind scharf von der selbst umgekehrten Linie des Bogens getrennt. Es ergab sich:

Feldstärke	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$d\lambda/\lambda^2$
18350	0,36	0,01	1,03
	0,37	0,01	1,07

An der gleichen Linie hat Runge[1]) die Zerlegung senkrecht zu den Kraftlinien gemessen und findet bei einer Feldstärke von 32000 Gauss für die Komponenten, die senkrecht zu den Kraftlinien schwingen, die also bei longitudinaler Beobachtung einzig übrig bleiben, für $d\lambda/\lambda^2 \pm 1{,}86$. Reduziert man diesen Wert auf unser Feld von 18350 Gauss, so erhält Runge $\pm 1{,}03$, ich im Mittel $\pm 1{,}05$, also eine sehr gute Übereinstimmung. Dieses Resultat ist insofern für uns wichtig, als es beweist, daß unsere Feldstärken direkt mit denen von Runge verglichen werden können, und deshalb auch beide Feldmessungen Anspruch auf absolute Richtigkeit erheben dürfen.

Bei A.E./5890 ist dem Effekt durch Ausmessen der Platte schwerlich beizukommen: Runges Beobachtungen an dieser Linie senkrecht zu den Kraftlinien zeigen nämlich ein Sextuplet, bei dem nur die beiden innersten Komponenten parallel den Kraftlinien schwingen. In Richtung der Kraftlinien werden also nur diese beiden Komponenten verschwinden, so daß ein zirkular polarisiertes Quatruplet übrig bleiben muß, dessen Komponenten nicht mehr getrennt werden können. Doch scheint es mir nicht riskiert zu sein, die Rungeschen Werte für A.E./5890 auf mein Feld reduziert zu übernehmen, weil ja an A.E./5896 die Richtigkeit der Theorie erwiesen worden ist. So erhält man den Effekt:

18350 Gauss $-1{,}28$ $-0{,}78$ $+0{,}78$ $+1{,}28$.

Zur Konstantenberechnung müssen dann diese Zahlen noch auf ein Feld von 10250 Gauss reduziert werden, so daß folgende Werte in Rechnung zu bringen sind:

Feldstärke	Linie	$d\lambda/\lambda^2$			
10250	A.E./5896	$-1{,}05$		$+1{,}05$	
	A.E./5890	$-1{,}28$	$-0{,}78$	$+0{,}78$	$+1{,}28$

1) C. Runge, Kaysers Handbuch II. p. 670.

Nach dem Gesetz von Preston ist dieser Effekt für alle Linien der gleichen Serie gleich. A.E./5896 und A.E./5890 sind aber Glieder der beiden Hauptserien des Natriums ($n = 3$). Das nächste Linienpaar ($n = 4$) hat die Wellenlängen A.E./3303,07 und A.E./3302,47. Für Untersuchungen an diesen beiden Linien braucht also nur die Drehung gemessen zu werden, die magnetische Zerlegung ist die oben mitgeteilte.

III. Drehung an A.E./3303 und A.E./3302.

Hier wurde nicht der ganze Verlauf der Drehung aufgenommen, sondern nur der Ort einer bestimmten Drehung (40°) gesucht. Daraus kann man dann mit der von der Theorie gegebenen Formel die ganze Kurve leicht berechnen. Die Messungen an diesen Linien sind aber schon recht ungenau, sowohl die Bestimmung der „Breite" der Absorptionslinie, als auch des Ortes der 40°-Drehung. Hier beträgt eben der Unterschied der Wellenlängen beider Linien nur noch $^1/_{12}$ von demjenigen der Linien A.E./5896 und A.E./5890, so daß alle dortigen Unsicherheiten hier zwölfmal so groß auftreten. Es existierten zwei Photogramme vom 40°-Effekt und eines der Absorptionslinien unter gleichen Bedingungen, deren Resultate hier folgen:

Drehung an Natrium A.E./3303,07 in 2. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Drehung	Feldstärke	$d \cdot 10^9$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	Bemerkungen
40°	10250	950 (?)	0,27	0,02	2,48	Zu diffus zum Messen
			—	—	—	
40	10250	950 (?)	0,264	0,005	2,39	Zu diffus zum Messen
			—	—	—	
0	—	950 (?)	0,12	0,01	1,10	
			0,12	0,01	1,10	

Drehung an Natrium A.E./3302,47 in 2. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

40°	10250	950 (?)	—	—	—	Zu diffus zum Messen
			0,25	0,03	2,29	
40	10250	950 (?)	—	—	—	Zu diffus zum Messen
			0,32	0,02	2,93	
0	—	950 (?)	0,14	0,01	1,29	
			0,14	0,01	1,29	

Gibt man den einzelnen Beobachtungen die aus den mittleren Fehlern folgenden Gewichte, so ergeben sich als Mittelwerte für $d\lambda/\lambda^2$ bei 40°-Drehung:

Linie	$d\lambda/\lambda^2$
A.E./3303,07	2,39
A.E./3302,47	2,71

Die Dampfdichte bleibt zwischen 900 und 1700, konnte aber direkt nicht genauer bestimmt werden. Aus den Überlegungen auf p. 779 ergibt sich, daß, wenn man diese Werte in die Fig. 14 einfügt, d den Wert 950 erhält, was also in die direkt gefundenen Grenzen fällt.

IV. Abhängigkeit der Drehung und Linienbreite von der Dampfdichte.

Die magnetische Zerlegung einer Absorptionslinie ist durchaus unabhängig von der Dichte etc. des absorbierenden Dampfes. Dagegen ist die Breite einer Absorptionslinie von diesen Faktoren stark abhängig, und ebenso die „Stärke" der Drehung. Bei okularen Beobachtungen des Effektes mit Doppelkeil sieht man, wie sich bei der geringsten Änderung in der Flamme der „Berg" sehr stark ausreckt oder einschrumpft. Die photographische Untersuchung bietet den großen Vorteil, daß sie von selbst die mittlere Effektstärke aufzeichnet, die der gemessenen mittleren Dampfdichte durchaus entspricht. Weil bis jetzt noch sehr wenig über den Zusammenhang zwischen der Linienbreite mit der Dampfdichte bekannt ist, und meine Apparate eine solche Untersuchung gestatten, habe ich systematisch die Absorptionslinien A.E./5896 und A.E./5890 bei sieben verschiedenen Dampfdichten gemessen und jedesmal die zugehörige Drehung aufgenommen. In allen Fällen war die Feldstärke 10250 Gauss, die Flammendicke 1,0 cm und die Drucke von Gas und Luft konstant. Ich lasse zunächst eine Zusammenstellung der Resultate folgen (vgl. p. 780 u. 781); aus den Kolumnen d und $d\lambda/\lambda^2$ sind die Werte zur Konstruktion der Fig. 14 entnommen; sie gibt uns also das Abhängigkeitsgesetz der Drehung von der Dampfdichte.

Man sieht, daß der Gang der 130°-Drehung bei beiden Linien lineär ist; dasselbe gilt noch vom 40°-Effekt an

A.E./5896, jedoch steigt der Effekt bei A.E./5890 noch etwas langsamer an; die Abweichung ist aber unerheblich.

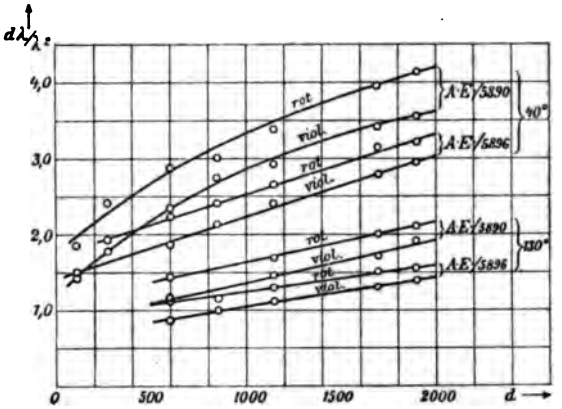


Fig. 14.

Außer den Messungen bei bekanntem d enthält unsere Tabelle (p. 780 u. 781) aber auch noch zwei Fälle mit unbekanntem d. Die zugehörigen Effekte lassen sich nun in die Kurven sehr gut einfügen, so daß dadurch ein Weg gegeben ist, in zweifelhaften Fällen d zu bestimmen. So findet man für die beiden Fälle $d.10^9 = 1700$ bez. $= 860$. Durch dieses Verfahren ist es auch einzig möglich, eine Brücke von den d-Werten der Pulverspritze zu denen des Sprays zu schlagen. Dabei hat sich gezeigt, daß bei der Spraymethode die Verbrennung der eingeführten Substanzen viel vollkommener ist. Sowohl zur Berechnung der Konstanten als überhaupt zum Studium der Linienstruktur in ihrer Abhängigkeit von d ist es sehr wichtig, die „Breite" der Absorptionslinien ohne Feld aber bei gleicher Flammendicke, Dampfdichte etc. zu bestimmen. Auf die Frage, was man unter „Breite" zu verstehen hat, werde ich im letzten Kapitel zurückkommen. Hier sei nur mitgeteilt, daß ich den Faden so einstellte, daß er eine Grenze zwischen „wesentlich hell" und „wesentlich dunkel" bildet. Dieser Ort ist ziemlich gut zu messen. Eine weitere Schwierigkeit bei der Breitemessung bietet der Umstand, daß sich über die von der Flamme erzeugte Absorptionslinie stets noch die durch Selbstumkehr im Kohlebogen entstandene Absorptionslinie lagert

Verlauf der Drehung mit der Dampfdichte an Na A.E./5896 in 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm. 10250 Gauss.

$d \cdot 10^6$	Drehung	$d\lambda$ in A E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	Bemerkungen
1900	40°	1,11	0,01	3,19	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		1,04	0,01	2,99	
	130	0,54	0,01	1,55	
		0,48	0,01	1,38	
1700	40	1,085	0,005	3,13	Die gleiche Aufnahme. d später bestimmt (vgl. p. 779)
		0,978	0,008	2,82	
	130	0,527	0,005	1,52	
		0,430	0,005	1,24	
1150	40	0,92	0,01	2,64	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		0,84	0,01	2,42	
	130	0,468	0,008	1,35	
		0,378	0,005	1,09	
860	40	0,83	0,01	2,39	Die gleiche Aufnahme. d später bestimmt (vgl. p. 779)
		0,75	0,01	2,16	
	130	0,40	0,01	1,15	
		0,35	0,01	1,01	
600	40	0,777	0,006	2,24	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		0,649	0,008	1,87	
	130	0,388	0,005	1,12	
		0,309	0,007	0,89	
280	40	0,67	0,01	1,93	Zu unscharf. Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		—	—	—	
	130	—	—	—	Existiert nicht. Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		—	—	—	
130	40	0,47	0,016	1,35	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		0,50	0,015	1,44	
	130	—	—	—	Existiert nicht. Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		—	—	—	

Verlauf der Drehung mit der Dampfdichte an Na A.E./5890 in 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm. 10250 Gauss.

$d \cdot 10^9$	Drehung	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	Bemerkungen
1900	40°	1,43	0,01	4,12	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt.
		1,25	0,01	3,60	
	130	0,72	0,01	2,07	
		0,65	0,01	1,87	
1700	40	1,37	0,008	3,95	Die gleiche Aufnahme. d später bestimmt (vgl. p. 779)
		1,16	0,008	3,35	
	130	0,680	0,007	1,96	
		0,579	0,005	1,67	
1150	40	1,15	0,01	3,31	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		1,01	0,01	2,91	
	130	0,58	0,01	1,67	
		0,51	0,01	1,47	
860	40	1,04	0,01	3,00	Die gleiche Aufnahme. d später bestimmt (vgl. p. 779)
		0,93	0,015	2,68	
	130	—	—	—	Existiert nicht
		—	—	—	
600	40	0,978	0,006	2,82	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		0,80	0,009	2,31	
	130	0,499	0,005	1,44	
		0,392	0,008	1,13	
280	40	0,808	0,008	2,33	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		0,621	0,008	1,79	
	130	—	—	—	Existiert nicht
		—	—	—	
130	40	0,64	0,015	1,84	Die gleiche Aufnahme. d direkt bestimmt
		0,50	0,01	1,44	
	130	—	—	—	Existiert nicht
		—	—	—	

und die erstere meist ganz überflutet. Die Messungen sind also nur bei relativ großem d zulässig:

Breite der Absorptionslinien von Natrium als Funktion der Dampfdichte. 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Linie	$d \cdot 10^9$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	Bemerkungen
A.E./5896	1900	0,39	0,013	1,12	d direkt bestimmt
		0,39	0,013	1,12	
	1700	0,419	0,005	1,21	d später bestimmt (vgl. p. 779)
		0,42	0,01	1,21	
	1150	0,32	0,017	0,92	d direkt bestimmt
		0,32	0,017	0,92	
A.E./5890	1900	0,537	0,008	1,55	d direkt bestimmt
		0,541	0,008	1,56	
	1700	0,510	0,008	1,47	d später bestimmt (vgl. p. 779)
		0,510	0,008	1,47	
	1150	0,41	0,01	1,18	d direkt bestimmt
		0,41	0,01	1,18	
	860	0,35	0,015	1,01	d später bestimmt (vgl. p. 779)
		0,35	0,015	1,01	
	600	0,34	0,01	0,98	d direkt bestimmt
		0,34	0,01	0,98	

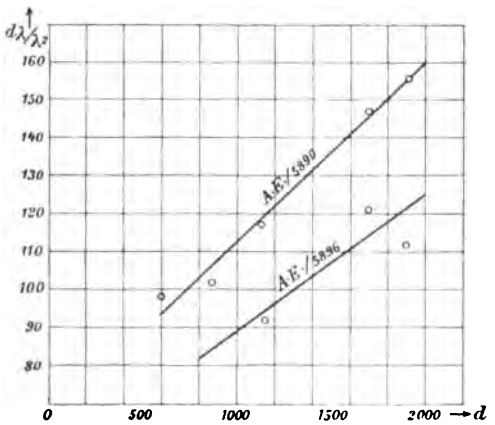


Fig. 15.

Die Fig. 15 gibt den Verlauf der Breite als Funktion der Dampfdichte. Man sieht, daß die Abhängigkeit lineär ist, so daß man also berechtigt ist, die Linie für A.E./5890 bis in das durch Selbstumkehr verdeckte Gebiet zu extrapolieren. Für eine gewisse Dampfdichte ist das Verhältnis der Breiten von A.E./5890 zu A.E./5896 gleich $1{,}27 \pm 0{,}02$. Auf die daran anschließende Berechnung der Konstanten kommen wir später zurück.

B. Kalium.

I. Drehung an A.E./7702 und A.E./7669.

Nach der Methode der gekreuzten Nicols wurde der Verlauf der Drehung an den beiden Linien der Hauptserie A.E./7702 und A.E./7669 photographisch aufgenommen. Das d der mit der Pulverspritze erzeugten Flamme war konstant gleich $350 \cdot 10^{-7}$, wieviel von diesem eingeführten Kalium verdampft, bleibt unbestimmbar.

Nun zeigte sich an den Photogrammen eine sehr unangenehme Störung: durch Spiegelung an der Hinterfläche der Platten gelangt Licht in unbelichtete Gebiete, so daß die Meßresultate den Tatsachen nicht mehr entsprechen. Für jede andere Farbe genügt ein Hinterkleiden der Platten mit Rotlack, hier im Rot selbst leistete ein schwarzer Mattlack gute Dienste. Unter Berücksichtigung dieser Vorsichtsmaßregel wurde gefunden:

Verlauf der Drehung an Kalium A.E./7702 in 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Drehung	Feldstärke	$d \cdot 10^7$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$
0°	—	350	1,8	0,1	3,0
			1,8	0,1	3,0
50	10250	350	3,9	0,1	6,6
			4,2	0,1	7,0
95	10250	350	2,8	0,1	4,7
			3,6	0,1	6,1
110	10250	350	2,6	0 1	4,4
			2,9	0,1	4,9

Verlauf der Drehung an Kalium A.E./7669 in 1. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Drehung	Feldstärke	$d \cdot 10^7$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$
0°	—	350	2,3 2,3	0,1 0,1	3,9 3,9
50	10250	350	5,0 5,4	0,1 0,1	8,4 9,1
95	10250	350	3,9 4,0	0,1 0,1	6,7 6,8
110	10250	350	3,7 3,8	0,1 0,1	6,3 6,5

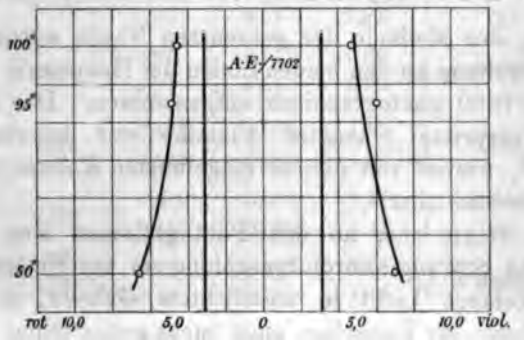


Fig. 16.

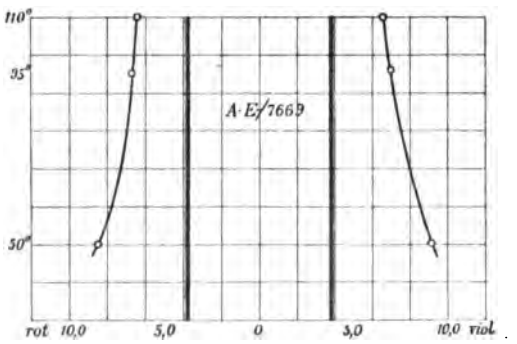


Fig 17.

II. Magnetische Zerlegung der Absorptionslinien A.E./7701,92 und A.E./7668,54.

Hier gilt ganz dasselbe, was für die Natriumlinien p. 775 gesagt wurde. Die Messung der zerlegten Absorptionslinie wird

hier noch schwieriger, weil die Trennung relativ kleiner ist, und also kaum aus dem Bereiche der selbstumgekehrten Kohlebogenlinie heraustritt. Ich wandte deshalb das von A. Cotton angegebene Verfahren an: Nachdem das Licht aus dem Magneten ausgetreten ist, wird es durch ein $\lambda/4$-Glimmerblättchen und dann durch einen Kalkspat geleitet. Das Glimmerblättchen verwandelt die beiden zirkularen Wellen in lineäre, die aufeinander senkrecht polarisiert sind. Der Kalkspat entwirft dann auf den Spalt zwei übereinanderliegende Bilder, wenn das auffallende Licht natürlich ist; ist der Glimmer aber so orientiert, daß die austretenden Wellen parallel und senkrecht zum Hauptschnitt des Kalkspates liegen, so wird nur die eine Welle durchgehen, die andere wird ausgelöscht. Dreht man dann den Glimmer um 90°, so kehren sich die vorigen Verhältnisse um. Im Gesichtsfelde sieht man also zwei übereinanderliegende Spektren; über beide weg geht die Kaliumabsorptionslinie des Kohlebogens, im oberen Spektrum ist sie nach der einen, im unteren nach der anderen Seite verbreitert. Nun weiß man aber noch nicht, wieviel von den Komponenten durch die Mittellinie verdeckt ist, man kennt also die Mitte der Komponenten nicht und kann ihren Abstand noch nicht bestimmen. Man kommt jedoch einigermaßen zum Ziele, wenn man berücksichtigt, daß die Trennung der Feldstärke proportional wächst. Man muß also den Effekt bei mindestens zwei bekannten Feldstärken aufnehmen, und kann dann aus der Verschiebung des äußeren Randes der Komponenten auf den Abstand der Mitten der Komponenten schließen. Es wurde in erster Ordnung gemessen:

Linie	Feldstärke	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$
A.E./7702	10250	1,14	0,015	1,92
		1,14	0,015	1,92
	7400	1,07	0,02	1,81
		1,07	0,02	1,80
A.E /7669	10250	1,35	0,01	2,28
		1,35	0,01	2,28
	7400	1,29	0,01	2,17
		1,29	0,01	2,18

Man sieht, daß in beiden Fällen ein Zuwachs von 2850 Gauss eine Verschiebung von 0,11 ± 1 Proz. bewirkt, so daß man bei einem Felde von 10250 Gauss für $d\lambda/\lambda^2$ den Wert ± 0,40 ± 4 Proz. erhält. Natürlich ist es durchaus möglich, daß bei größerem Auflösungsvermögen sich diese beiden longitudinalen Duplette als komplizierter herausstellen.

III. Drehung an A.E./4047,36 und A.E./4044,29.

Diese beiden Linien bilden die nächsten Glieder der Hauptserie. An beiden wurde der Verlauf der Drehung unter den gleichen Bedingungen wie bei den oben besprochenen Linien untersucht. Es wurde gefunden:

Verlauf der Drehung an Kalium A.E./4047,36 in 2. und 3. Ordnung. l = 1,0 cm.

Drehung	Feldstärke	$d \cdot 10^2$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$ red.	Bemerkungen
11°	10500	20000	0,460	0,007	2,80	2,74	2. Ordnung
			0,471	0,007	2,87	2,80	
21°	10250	20000	0,360	0,007	2,19	2,19	2. Ordnung
			0,362	0,007	2,20	2,20	
31°	10400	20000	—	—	—	—	unklar
			0,187	0,007	1,14	1,39	3. Ordnung
41°	10500	20000	0,220	0,003	1,34	1,31	3. Ordnung
			—	—	—	—	unklar

Verlauf der Drehung an Kalium A.E./4044,29 in 2. und 3. Ordnung. l = 1,0 cm.

11°	10500	20000	0,472	0,007	2,87	2,80	2. Ordnung
			0,503	0,007	3,06	2,98	
21°	10250	20000	0,39	0,01	2,38	2,38	2. Ordnung
			0,391	0,008	2,38	2,38	
31°	10100	20000	—	—	—	—	unklar
			0,291	0,008	1,77	1,74	3. Ordnung

Die Spalte $d\lambda/\lambda^2$ red. enthält die Werte auf ein Feld von 10250 Gauss reduziert. Die Figg. 18 und 19 zeigen den Verlauf des Effektes:

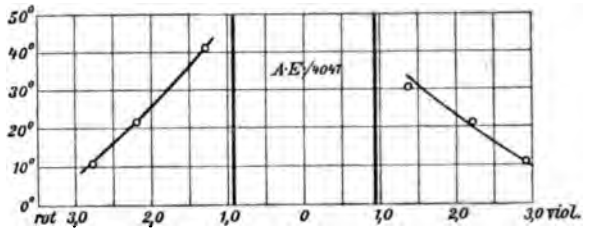


Fig. 18.

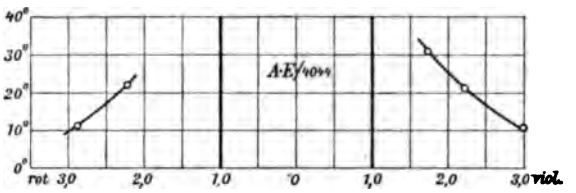


Fig. 19.

IV. Drehung an A.E./3447 und A.E./3446.

Diese beiden Linien bilden die dritten Glieder der Hauptserie, weshalb es sehr erwünscht war, die Drehung an diesen zu messen. Die Linien liegen aber schon so weit im Ultraviolett und sind so wenig getrennt, daß die Untersuchung sehr schwierig wird. Es gelang mir nur die Linien als Absorptionslinien zu photographieren, so daß die Konstante ϑ' wenigstens einigermaßen gefunden werden kann. Die Drehung selbst ist zwar offenbar vorhanden, aber leider auf keinem Photogramm einwandfrei zu messen. Ich lasse die Messungen der Linienbreite folgen:

λ	$d\lambda/\lambda_2$
3447,49	± 0,67
3446,49	± 0,67

C. Lithium.

I. Drehung an A.E/6708,2.

Weil wir bei Lithium nur *eine* Linie haben, stören sich die Effekte der Nachbarlinien nicht, wir können also die

Frage nach der Symmetrie des Effektes hier beantworten. Es wurde gemessen:

Verlauf der Drehung an Li A.E./6708,2 in 2. Ordnung. $l = 1{,}0$ cm.

Drehung	Feldstärke	$d \cdot 10^6$	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$
0°	10250	966	0,432	0,008	0,96
			0,428	0,008	0,95
20°	10250	966	1,03	0,015	2,29
			1,03	0,02	2,29
40°	10250	966	0,67	0,02	1,49
			0,62	0,02	1,38

Fig. 20 zeigt den Verlauf des Effektes:

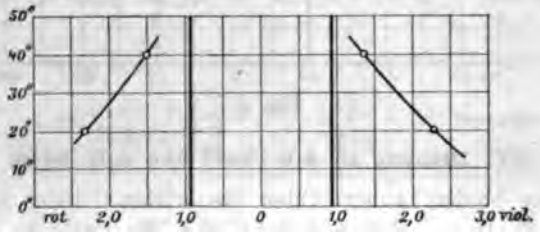


Fig. 20.

Man sieht, daß *merkliche Symmetrie* vorliegt.

II. Magnetische Zerlegung an A.E./6708,2.

Okulare und photographische Beobachtungen zeigten, daß das Magnetfeld die Komponenten nicht völlig zu trennen vermag. Man kann also den Ort der Komponenten nur mit $\lambda/4$-Glimmerblättchen und Kalkspat bestimmen, wodurch man zwar die Trennung richtig erhält, aber eine eventuell vorhandene Asymmetrie der Beobachtung entgeht. Es wurde gefunden:

Feldstärke	$d\lambda$ in A.E.	Mittlerer Fehler	$\frac{d\lambda}{\lambda^2}$
10250	0,343	0,004	0,76
	0,338	0,004	0,75

Konstantenbestimmung.

Für den einfachsten Fall des longitudinalen Duplets ist das Gesetz der Drehung schon von Voigt abgeleitet:

$$\chi_{II} = \frac{\omega_0 l \varepsilon_i c_i R}{2 v^2} \cdot \frac{(4\delta^2 - c_i^2 R^2 - \vartheta_i'^2)}{(4\delta^2 - c_i^2 R^2 - \vartheta_i'^2)^2 + 16\delta^2 \vartheta_i'^2}$$

oder in großer Näherung

$$\chi_{II}' = \frac{l \varepsilon_i c_i R}{8 v \delta^2}. \tag{2}$$

Es handelt sich jetzt darum, die darin auftretenden Konstanten c_i, ε_i, ϑ_i' zu bestimmen.

1. *Bestimmung von* c_i: Der Abstand 2δ der beiden Absorptionsstreifen ist bestimmt durch

$$2\delta = c_i R.$$

Weil δ und R gemessen sind, ist einfach

$$c_i = \frac{2\delta}{R}. \tag{3}$$

2. *Bestimmung von* ε_i: Führt man den Wert für c_i in (2) ein und setzt $\omega_0/v = 1$ (vgl. 3.), so folgt

$$\varepsilon_i = \frac{8 v \delta^2 \chi_{II}'}{l c_i R}, \tag{4}$$

worin der Winkel χ_{II}' in absolutem Maße zu messen ist.

3. *Bestimmung von* ϑ_i': Die Bestimmung dieser Konstanten macht am meisten Schwierigkeiten. Für eine Absorptionslinie i gilt nach Voigt[1]) im Falle, daß kein äußeres Magnetfeld wirkt, die Gleichung:

$$2\varkappa n^2 = \frac{\varepsilon_i \vartheta_i^0 \vartheta_i'}{4\delta^2 + \vartheta_i'^2}, \tag{5}$$

worin $\varkappa$ der Absorptionsindex ist.

Nun ist die Intensität proportional $e^{-\varkappa n}$, und gerade im Gebiete des Absorptionsstreifens verläuft n unregelmäßig. Immerhin werden wir keinen irgendwie merklichen Fehler begehen, wenn wir auch im Streifen selbst $n = \text{konst.} = 1$ annehmen. Wir haben es ja doch mit Gasen zu tun, wo n nur sehr wenig von 1 abweicht. Dann wird Gleichung (5) lauten:

$$\varkappa = \frac{\frac{1}{2} \vartheta_i^0 \vartheta_i' \varepsilon_i}{4\delta^2 + \vartheta_i'^2}.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. **67**. p. 345 ff. 1899.

Setzen wir darin δ gleich 0, ϑ_i', $2\vartheta_i'$, $3\vartheta_i'$, ..., so können wir den Verlauf von $\varkappa$ aufzeichnen:

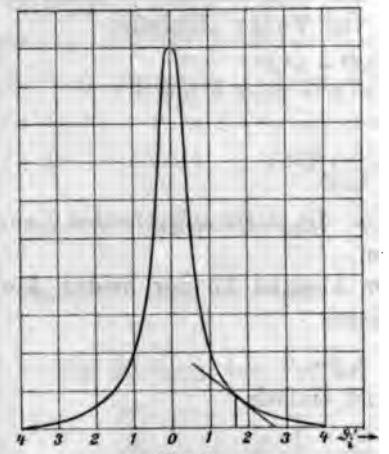


Fig. 21.

J. J. Hallo machte nun die Annahme, daß er bei seinen „Breitenmessungen" der Natriumlinien auf den Ort $\delta = 3\vartheta_i'$ eingestellt habe, so daß er ϑ_i' aus

$$\vartheta_i' = \frac{\delta}{3}$$

berechnet.

Bei meinen „Breitenmessungen" wurde der Faden so eingestellt, daß er eine Grenze zwischen „wesentlich hell" und „wesentlich dunkel" bildete. Analytisch bedeutet dies wohl denjenigen Ort der $\varkappa$-Kurve, wo sich die Steigung am raschesten ändert, ihre Krümmung also am größten ist, also wo

$$\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \delta^2} = \text{Max.}$$

Ich habe diesen Ort durch graphisches Probieren zu ermitteln versucht; er liegt bei

$$\delta = 1{,}65\,\vartheta_i',$$

so daß sich ϑ_i' aus meinen Messungen nach der Gleichung

$$\vartheta_i' = 0{,}6\,\delta \tag{6}$$

berechnet. —

Longitudinale Beobachtungen an der Natriumlinie A.E./5890 zeigen ein Quatruplet. Dafür hatten wir gefunden:

$$\chi'_{\text{IV}} = \frac{2 l \delta^2 \varepsilon_i c_i R}{v\{(4\delta^2 - d_i'^2 \vartheta_{i0}^2)^2 - 4 c_i^2 R^2 \delta^2\}}. \tag{1}$$

Die darin enthaltene Konstante d_i' tritt hier zum erstenmal auf.

4. *Bestimmung von c_i und d_i'*: Der Abstand der inneren beiden Absorptionsstreifen wird bestimmt durch die Gleichung

$$2\delta_i = -\tfrac{1}{2} c_i R + \sqrt{\tfrac{1}{4} c_i^2 R^2 + d_i'^2 \vartheta_{i0}^2},$$

derjenige der beiden äußeren Streifen durch

$$2\delta_e = +\tfrac{1}{2} c_i R + \sqrt{\tfrac{1}{4} c_i^2 R^2 + d_i'^2 \vartheta_{i0}^2}.$$ [1])

1) L. Geiger, Göttinger Diss. 1907. p. 12.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$c_i = \frac{2(\delta_e - \delta_i)}{R}, \tag{7}$$

und

$$d_i' = \frac{2\sqrt{\delta_e \delta_i}}{\vartheta_i^0}. \tag{8}$$

An Hand der Formeln (3), (4), (6), (7), (8) können wir jetzt aus den Beobachtungen die vier Parameter zahlenmäßig bestimmen.

I. Die magnetischen Konstanten c_i und d_i'.

Für das longitudinale Quatruplet von Natrium A.E./5890 ist

δ_e	δ_i	R	$c_i \cdot 10^4$	$d_i' \cdot 10^4$
2,56	1,56	10250	1,95	2,37

Für die longitudinalen Duplette ist:

Element	λ	2δ	R	$c_i \cdot 10^4$
Natrium	5896,52	2,10	10250	2,05
Kalium	7701,92	0,80	10250	0,8
	7668,54	0,80	10250	0,8
Lithium	6708,2	1,51	10250	1,47

Nimmt man die Gültigkeit der Prestonschen Regel an, so müssen diese Konstanten auch für die höheren Glieder der Hauptserien von Na und K dieselben Werte besitzen.

II. Die elektrische Konstante ε_i.

Wir geben im folgenden eine Zusammenstellung der Werte ε_i, wie sie aus jeder einzelnen Beobachtung folgen. Dabei ist zu beachten, daß die Theorie für das Bereich einer Absorptionslinie das Produkt $\chi \delta^2$ als merklich konstant erwarten läßt; bestätigt sich dies, so werden dadurch die theoretischen Voraussetzungen gestützt. Um bei Natrium und Kalium sicher frei vom störenden Einfluß der Nachbarlinien zu sein, sind immer nur die Drehungen auf der von der Nachbarlinie abgewandten Seite berücksichtigt (vgl. p. 773).

1. *Für Natrium* A.E./5896 ist $\frac{8v}{l c_i R} = 1{,}14 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
2,8	0,70	5,5
1,7	1,22	3,5
1,6	1,48	3,8
1,3	1,75	3,0
1,4	1,92	3,8
1,25	2,27	3,6

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 3{,}9$ ist $\varepsilon_i = 4{,}5 \cdot 10^{11}$.

Für A.E./5890 ist $\frac{8v}{l c_i R} = 1{,}2 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
3,4	0,70	8,1
2,45	1,22	7,3
2,3	1,48	7,9
1,7	1,75	5,1
1,8	1,92	6,2
1,6	2,27	6,0

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 6{,}8$ ist $\varepsilon_i = 8{,}2 \cdot 10^{11}$.

Für A.E./3303,07 ist . . . . . $\varepsilon_i = 4{,}5 \cdot 10^{11}$,
für A.E./3302,47 ist . . . . . $\varepsilon_i = 8{,}7 \cdot 10^{11}$.

2. *Für Kalium* A.E./7702 ist $\frac{8v}{l c_i R} = 3 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
6,6	0,87	57
4,7	1,66	78
4,4	1,92	61

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 65$ ist $\varepsilon_i = 196 \cdot 10^{11}$.

Für A.E./7669 ist $\frac{8v}{l c_i R} = 3 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
9,1	0,87	80
6,8	1,66	113
6,5	1,92	124

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 106$ ist $\varepsilon_i = 317 \cdot 10^{11}$.

Für A.E./4047 ist $\frac{8v}{l c_t R} = 3 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
2,75	0,19	1,4
2,40	0,37	2,1
1,30	0,72	1,2

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 1{,}6$ ist $s_t = 4{,}8 \cdot 10^{11}$.

Für A.E./4044 ist $\frac{8v}{l c_t R} = 3 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
3,0	0,19	1,7
2,4	0,37	2,1
1,75	0,54	1,6

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 1{,}8$ ist $s_t = 5{,}4 \cdot 10^{11}$.

3. *Für Lithium* A.E./6708 ist $\frac{8v}{l c_t R} = 1{,}59 \cdot 10^{11}$, und

δ	χ	$\chi \delta^2$
2,3	0,35	1,8
1,45	0,70	1,5

Für den Mittelwert $\chi \delta^2 = 1{,}65$ ist $s_t = 2{,}6 \cdot 10^{11}$.

In allen sieben Fällen schwankt $\chi \delta^2$ unregelmäßig, nirgends ist ein ausgeprägter Gang, so daß aus den Resultaten ein Einwand gegen die Theorie nicht zu entnehmen ist.

III. Die Absorptionskonstante ϑ_t'.

Aus den Messungen der „Linienbreite“ folgt:

Element	λ	δ	ϑ_t'
Natrium . .	5896	1,21	0,7
	5890	1,47	0,9
	3303	1,10	0,6
	3302	1,29	0,8
Kalium . .	7702	2,5	1,8
	7669	3,0	2,3
	4047	0,9	0,5
	4044	1,0	0,6
	3447	0,67	0,4
	3446	0,67	0,4
Lithium . .	6708	0,95	0,6

Vergleicht man die Werte für ϑ_i' von Na und K der geraden und ungeraden Glieder unter sich, so sieht man, daß ϑ_i' in allen vier Fällen mit λ abnimmt, bei Na nur ganz schwach, bei K viel stärker.

Zusammenfassung.

1. Die Begleiterscheinung des longitudinalen inversen Zeemaneffektes, d. i. die magnetische Drehung der Polarisationsebene im Gebiet eines Absorptionsstreifens, wurde an den vier Linien der Hauptserien von Natrium und Kalium ($n = 3$, $n = 4$) und an der einfachen Lithiumlinie A.E./6708 quantitativ untersucht. Bei Lithium konnte der Effekt als merklich symmetrisch nachgewiesen werden.

2. Die Abhängigkeit der Breite der Absorptionslinien und der Drehung von der Dampfdichte wurde an Natrium untersucht; sie ergab sich als lineär.

3. Aus dem von Voigt erweiterten Ansatze wurde die Gleichung für die Drehung im Bereiche eines longitudinalen Quatruplets hergeleitet.

4. Die berechneten Konstanten zeigen die Brauchbarkeit der theoretischen Voraussetzungen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Geheimrat Prof. Dr. W. Voigt im Institut für mathematische Physik in Göttingen ausgeführt. Ich möchte nicht versäumen, auch an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer für sein reges Interesse und alle Hilfe meinen ergebensten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 6. Juli 1907.)

12. *Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln; Nachtrag;* von *M. Laue.*

In einer kürzlich erschienenen Untersuchung[1]) habe ich gezeigt, daß die Entropie eines Systems von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln den Betrag

$$E = \sigma \left(L(K_1) + L(K_2) + L(K_3) \right) \tag{49}$$

hat, wenn man unter K_1, K_2, K_3 die Wurzeln der Gleichung

$$K^3 - I' K^2 + I'' K - I''' = 0 \tag{50}$$

versteht. Doch enthielt die Ableitung dieser Formel die nur an Beispielen bestätigte Annahme, daß diese Gleichung stets drei reelle, positive Wurzeln hat, daß sich also jedes System der genannten Art auf umkehrbarem Wege in drei inkohärente Strahlenbündel verwandeln läßt. Ihr Beweis soll hier nachgeholt werden.

Zu diesem Zwecke stellen wir die Kurve

$$y = K^3 - I' K^2 + I'' K - I'''$$

graphisch dar. Verändern wir den letzten ihrer Koeffizienten, I''', so hebt oder senkt sie sich ohne Änderung ihrer Form. Ist daher

$$A_1 < I''' < A_2 ,$$

so liegen die Kurven

$$z_1 = K^3 - I' K^2 + I'' K - A_1$$

und

$$z_2 = K^3 - I' K^2 + I'' K - A_2$$

ganz über bez. unter der Kurve y. Wir wollen A_1 und A_2 nun so wählen, daß die beiden letzteren Kurven reelle Schnittpunkte mit der K-Achse haben; gelingt dies, so ist der Nachweis erbracht, daß auch die zwischen ihnen liegende y-Kurve drei reelle Punkte mit ihr gemeinsam hat.

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 23. p. 1. 1907. Alle Bezeichnungen und die Numerierung der Gleichungen sind von dort übernommen.

Bekanntlich hat jede Gleichung

$$z = -\begin{vmatrix} \varkappa_1 - K & l & m \\ l & \varkappa_2 - K & n \\ m & n & \varkappa_3 - K \end{vmatrix} = 0$$

reelle Wurzeln[1]), wenn die Koeffizienten reell sind. Rechnet man die Determinante aus, so nimmt sie die Form an:

$$\begin{aligned} z = {} & K^3 - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3) K^2 \\ & + (\varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_2 \varkappa_3 + \varkappa_3 \varkappa_1 - l^2 - m^2 - n^2) K \\ & - (\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 - (l^2 \varkappa_3 + m^2 \varkappa_2 + n^2 \varkappa_1) + 2 l m n). \end{aligned}$$

Setzen wir nun einmal

$$l = -\sqrt{i_{12} \varkappa_1 \varkappa_2}, \quad m = -\sqrt{i_{13} \varkappa_1 \varkappa_3}, \quad n = -\sqrt{i_{23} \varkappa_2 \varkappa_3},$$

das andere Mal

$$l = +\sqrt{i_{12} \varkappa_1 \varkappa_2}, \quad m = +\sqrt{i_{13} \varkappa_1 \varkappa_3}, \quad n = +\sqrt{i_{23} \varkappa_2 \varkappa_3},$$

so gehen nach (21) und (51) die Koeffizienten K^2 und K in I' und I'' über, während das absolute Glied im ersten Fall

$$A_1 = \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 (1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) - 2\sqrt{i_{12} i_{23} i_{31}}),$$

im zweiten aber

$$A_2 = \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 (1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) + 2\sqrt{i_{12} i_{23} i_{31}})$$

wird. Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß

$$A_1 \leqq I''' \leqq A_2;$$

oder, da nach (51)

$$I''' = J \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3$$

ist, daß

$$(53) \qquad \begin{cases} 1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) - 2\sqrt{i_{12} i_{23} i_{31}} \leqq J \\ 1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) + 2\sqrt{i_{12} i_{23} i_{31}} \geqq J. \end{cases}$$

ist.

Zu diesem Zwecke dient Gleichung (37), in welcher wir zunächst nach (21) und (40)

$$i_{f_g' h_g'} j_{fg} j_{gh} = j_{fg} j_{gh} - J$$

setzen. Vertauschen wir dann noch die Indizes f, g, h mit 1, 2, 3, so lautet sie:

$$(54) \quad i_{13} = i_{12} i_{23} + j_{12} j_{23} - J + 2\cos(a - b)\sqrt{i_{12} i_{23} (j_{12} j_{23} - J)}.$$

1) Man wird z. B. dann auf sie geführt, wenn man nach den Achsen der Fläche zweiter Ordnung $\varkappa_1 x^2 + \ldots + 2 l x y + \ldots = 1$ fragt.

Aus ihrer Auflösung nach J, welche aussagt, daß

$$J = 1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) + 2\sin^2(a-b)\, i_{12}\, i_{23} \mp 2\cos(a-b)\sqrt{i_{12}\, i_{23}\,(i_{13} - \sin^2(a-b)\, i_{12}\, i_{23})}$$

ist, erkennt man unmittelbar, daß

$$J \geqq 1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) - 2\sqrt{i_{12}\, i_{23}\, i_{31}}\,.$$

Die andere Hälfte der Ungleichung (53) leitet man aber einfacher ab, indem man aus (54) unmittelbar den Schluß zieht, daß

$$(55)\quad \sqrt{i_{12}\, i_{23}} - \sqrt{j_{12} j_{23} - J} \leqq \sqrt{i_{13}} \leqq \sqrt{i_{12}\, i_{23}} + \sqrt{j_{12} j_{23} - J}$$

ist. Gilt eins der beiden Gleichheitszeichen, so ist die quadratische Funktion von $\sqrt{i_{13}}$

$$1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) + 2\sqrt{i_{12}\, i_{23}\, i_{31}} - J$$

gleich Null. Für unendlich große Werte ihres Arguments ist sie aber negativ unendlich, in dem durch (55) abgegrenzten Bereich daher positiv; d. h. es ist

$$1 - (i_{12} + i_{23} + i_{31}) + 2\sqrt{i_{12}\, i_{23}\, i_{31}} \geqq J.$$

Damit ist die Ungleichung (53) und gleichzeitig die Realität der Wurzeln der Gleichung (50) bewiesen. Daß diese nie negativ sind, geht aus dem Alternieren des Vorzeichens der Koeffizienten hervor.

Berlin, Juni 1907.

(Eingegangen 7. Juni 1907.)

13. *Bemerkung zu Hrn. Paschens Mitteilung über den Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen; von J. Stark.*

1. In seiner Mitteilung über den Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen in Wasserstoff schreibt Hr. Paschen[1]) folgendes: „Meine Beobachtungsresultate weichen zum Teil erheblich von denjenigen des Hrn. J. Stark ab. So ist nach allen meinen Photographien für jeden Versuch der Doppler-Effekt bei allen beobachteten Linien der Wasserstoffserie genau identisch verschoben, wenn man die Verschiebung durch $\Delta\lambda/\lambda$ mißt. Nach Hrn. J. Stark soll dies nur für die Stelle größter Verschiebung gelten, das Maximum der Schwärzung und die Stelle kleinster Verschiebung dagegen sollen für kleinere Wellenlängen stärker verschoben sein als für größere Wellenlängen der Serie. Meine Erfahrungen geben keinen Anhaltspunkt zur Stütze der beiden letztgenannten Behauptungen des Hrn. Stark."

Dem gegenüber möchte bemerken, daß ich die von Hrn. Paschen angefochtenen Folgerungen auf Grund einer Reihe von Beobachtungen und Messungen gezogen habe. Die allgemeine Folgerung[2]), die ich zog, behauptete, daß in der Wasser-

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. **23**. p. 247. 1907.

2) *Anmerkung.* Meine spektrographischen Untersuchungen über den Doppler-Effekt bei Kanalstrahlen hatten in erster Linie die Aufgabe, die elektrische Ladung der Träger der Spektralserien zu ermitteln. Die hierbei gewonnenen Spektrogramme glaubte ich in zweiter Linie zur Stellung der Frage nach dem Zusammenhang zwischen Translationsgeschwindigkeit und Strahlungsintensität verwenden zu dürfen. Als Material für die Beantwortung dieser Frage ergab sich zunächst die Tatsache, daß zwischen der ruhenden Serienlinie und ihrem Doppler-Effekt ein Intensitätsminimum auftritt; diese Tatsache wurde von allen folgenden Beobachtungen bestätigt; sie scheint mir für eine Theorie der Strahlung bewegter Ionen nicht ohne Bedeutung zu sein. Als weitere Tatsache glaubte ich aus mehreren Gruppen von Beobachtungen, die an und für sich wenig quantitativer Natur waren, indes untereinander übereinstimmend das gleiche Resultat ergaben, die allgemeine Folgerung ableiten zu

stoffserie die Strahlungsintensität eine Funktion der Translationsgeschwindigkeit sei und mit dieser für die kleineren Wellenlängen rascher wachse als für die größeren. Eine Stütze hierfür sah ich zunächst in der Beobachtung, daß das Intensitätsminimum im Doppler-Effekt für die kürzeren Wellen breiter sich ergab als für die längeren. Diese Erscheinung kann freilich ihren Grund darin haben, daß für die kürzeren Wellen der Rand des Doppler-Effektes unterexponiert ist. Darum sei diese Beobachtung als nicht beweiskräftig aufgegeben. Weiter habe ich in zwei Tabellen eine Reihe von Beobachtungen mitgeteilt, die bei orthogonaler Stellung von Visionsradius und Kanalstrahlen erhalten wurden; sie zeigen, daß mit wachsendem Kathodenfall die Verteilung der bewegten Intensität in der Wasserstoffserie sich in der Weise ändert, daß die kürzeren Wellen relativ intensiver als die längeren Wellen werden. Ich will auch für diese Beobachtungen, weil sie nicht genügend quantitativ sind, keine Beweiskraft beanspruchen. An dritter Stelle dagegen habe ich auf Grund von zehn Spektrogrammen in einer Tabelle für mehrere Linien der Wasserstoffserie die Lage des Intensitätsmaximums im Doppler-Effekt, gemessen in $cm^2 . sec^{-2}$, angegeben. Mit wenigen Ausnahmen zeigen die Zahlen dieser Tabelle, daß das Intensitätsmaximum für die kürzeren Wellen bei größeren Translationsgeschwindigkeiten liegt als für die längeren Wellen. Diese Zahlen können einen quantitativen Charakter beanspruchen. Denn die Lage des Intensitätsmaximums im Doppler-Effekt läßt sich, wie ich es getan habe und wie es H. Kayser für andere Fälle empfohlen hat, ziemlich genau dadurch feststellen, daß man den Abstand der Spitzen des Streifens der bewegten Intensität von den Spitzen des Streifens der ruhenden Linie mißt; auf diese Weise erhält man die Lage des Intensitätsmaximums selbst noch in dem Falle richtig, daß das Intensitätsmaximum einer verbreiterten Spektrallinie in ihrem photographischen Bilde solarisiert ist. Zwischen den Spitzen einer verbreiterten

---

können, daß die spektrale Intensitätsverteilung im Doppler-Effekt in einer Linienserie eine Funktion der Translationsgeschwindigkeit ist. Da mir indes jene Beobachtungen nicht genügend beweiskräftig erschienen, habe ich neue quantitative Untersuchungen vorbereitet.

kann die Lage des Intensitätsmaximums gegen die Lage des Schwärzungsmaximums im photographischen Bilde differieren. Eine solche Differenz kann erstens durch Überexposition verursacht sein, zweitens durch folgende fehlerhafte Wirkungsweise der photographischen Platte. Die Bromsilberkörner diffundieren Licht und an den Grenzflächen Gelatine–Glas und Glas–Luft findet außerdem Reflexion von Licht nach rückwärts in die photographische Schicht statt; diese Diffusion und Reflexion des Lichtes hat die Tendenz, am meisten der Mitte der verbreiterten Spektrallinie von den Rändern her störendes Licht zuzuführen und auf diese Weise, solange noch keine Überbelichtung statt hat, ein Schwärzungsmaximum, das bei Vollkommenheit der photographischen Methode am Rande der verbreiterten Spektrallinie erscheinen würde, nach der Mitte hin zu verschieben.

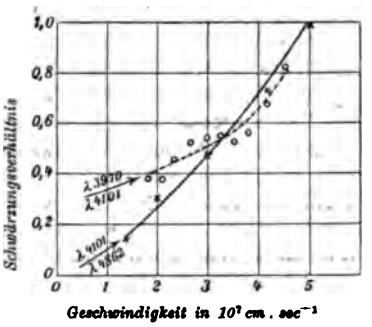
Hr. Paschen hat die Lage des Intensitätsmaximums dadurch zu ermitteln gesucht, daß er zwischen den Spitzen längs der größten Breite des Doppler-Effektes die Schwärzung photometrierte. Die Lage des Schwärzungsmaximums glaubt er mit der Lage des Intensitätsmaximums identifizieren zu dürfen. Es ist also zu beachten, daß die Beobachtungen des Hrn. Paschen mit meinen Beobachtungen über die Lage des Intensitätsmaximums nicht ohne weiteres komparabel sind. Würde Hr. Paschen an seinen hierfür geeigneten Spektrogrammen die Lage der Spitzen des Doppler-Effektes in bezug auf die Spitzen der ruhenden Linien bestimmen, so würde er Zahlen erhalten, die mit den von mir mitgeteilten Zahlen vergleichbar sind. Auf die Verwertung der so gewonnenen Zahlen für die Frage nach der spektralen Intensitätsverteilung hätte der Umstand keinen Einfluß, daß die Teilchen, welche die Schwärzung in den Spitzen des Doppler-Effektes erzeugen, andere sind als diejenigen, welche die dazwischenliegenden Schwärzungen durch ihre Strahlung hervorbringen.

Hr. Paschen zeigt, daß durch geeignete Wahl der Expositionszeit oder der Empfindlichkeit der photographischen Schicht für kürzere Wellen ein schmäleres Intensitätsminimum erhalten werden kann als für längere Wellen. Hiermit beweist Hr. Paschen weder etwas gegen meine Folgerung noch für seine Behauptung, daß die Intensitätsverteilung in dem

Doppler-Effekt in einer Linienserie unabhängig von der Wellenlänge sei.

Hr. Paschen teilt weiter über die Lage des Schwärzungsmaximums eine durch seine photometrische Methode erhaltene Tabelle mit. Er glaubt, sie widerlege meine Folgerung und beweise seine Behauptung. Gemäß dieser müßte für alle Linien der Serie das Intensitätsmaximum genau bei derselben Translationsgeschwindigkeit liegen; nach meiner Folgerung müßte es für die kürzeren Wellen bei größeren Geschwindigkeiten liegen als für die längeren. Sehen wir ab von der möglichen Differenz zwischen Schwärzungs- und Intensitätsmaximum, so ergeben sich gemäß der Anzahl der Angaben des Hrn. Paschen für die Linien H_β, H_γ, H_δ, H_ε, H_ζ 33 Möglichkeiten des Vergleiches. Von diesen 33 Fällen widersprechen 12 meiner Folgerung, 21 bestätigen sie. Läßt man aus dem Vergleich die Linie H_β fort, so widersprechen von den 14 möglichen Fällen 4 meiner Folgerung, 10 bestätigen sie.

Hr. Paschen hat ferner zum Beweise für seine meiner Folgerung widersprechenden Behauptung in Kurven die photometrisch gemessene Schwärzung im Doppler-Effekt verschiedener Linien für die verschiedenen Translationsgeschwindigkeiten mitgeteilt. Von einer vergleichenden Diskussion ist die Kurve für H_β wegen möglicher partieller Überexposition, die Kurve für H_ζ wegen vermutlicher Unterexposition und die Kurve für H_γ deswegen auszuschließen, weil sie nicht von demselben Spektrogramm wie die übrigen erhalten wurde. Es bleiben zum Vergleich die Kurven für H_δ und H_ε. Entnimmt man aus diesen für die verschiedenen Geschwindigkeiten die Schwärzungen, berechnet deren Verhältnis und trägt dieses als Ordinate gegen die Geschwindigkeit als Abszisse auf, so muß nach Hrn. Paschens Behauptung eine Parallele zur Abszissenachse erhalten werden, nach meiner Behauptung muß dagegen eine Kurve mit positivem Differentialquotienten erscheinen, wenn die Schwärzung angenähert pro-



portional der Intensität gesetzt werden darf. In der Figur interpoliert die gestrichelte Kurve zwischen den Schwärzungsverhältnissen, welche ich aus Hrn. Paschens Kurven für H_δ und H_ε berechnete; die ausgezogene Kurve dagegen ist die Reproduktion einer Kurve, welche ich von einem meiner Spektrogramme durch vergleichende Schätzung der Schwärzungen erhielt und bereits an anderer Stelle (Physik. Zeitschr. 8. p. 254. 1906) veröffentlichte.

2. In einem anderen Punkte weichen die Resultate Hrn. Paschens von meinen Beobachtungen an den Kanalstrahlen in Wasserstoff tatsächlich ab. Er beobachtete nämlich, daß bei höherem Gasdruck und kleinem Kathodenfall im Doppler-Effekt zwei Intensitätsmaxima auftreten. Eine derartige Beobachtung habe ich nicht gemacht; vielleicht mag dies daher rühren, daß die Dispersion des von mir bei den meisten Aufnahmen benutzten Spektrographen kleiner als diejenige des von Hrn. Paschen benutzten Gitters war und daß in fast allen meinen Versuchen der Kathodenfall größer war als derjenige, bei welchem in Hrn. Paschens Versuchen die Zweiteilung des Doppler-Effektes am besten auftrat.[1]) Ich möchte freilich

---

1) *Anmerkung.* Die Beobachtungsmethode Hrn. Paschens weicht noch in zwei Punkten von der von mir angewendeten Methode ab. Hr. Paschen ließ die Kanalstrahlen hinter der Kathode konvergieren und bildete den Konvergenzpunkt auf den Spalt ab. Er glaubt auf diese Weise streng in der Translationsrichtung beobachtet zu haben. Indes fehlt eine zuverlässige Kontrolle dafür, daß wirklich alle Kanalstrahlen hinter der Kathode streng auf einen Punkt konvergieren. Läßt man ein paralleles Bündel Kanalstrahlen in der Achse des abbildenden optischen Systems verlaufen, so sind die am Rande liegenden Visionsradien gegen die Translationsrichtung etwas geneigt, es erscheint daher in ihnen der Doppler-Effekt um einen gewissen Betrag verkleinert. Die Verkleinerung betrug bei dem von mir verwendeten Prismenspektrographen (Öffnungsverhältnis 1 : 10) 0,5 Proz. des vollen Doppler-Effektes, bei dem von mir verwendeten Gitter (Öffnungsverhältnis 1 : 12) 0,3 Proz. Dieser Betrag ist kleiner als die übrigen Beobachtungsfehler. Ein anderer vielleicht wichtigerer Unterschied zwischen der Beobachtungsmethode des Hrn. Paschen und der meinigen besteht in folgendem. Ich stellte den Spalt unmittelbar vor das Ende des Kanalstrahlenrohres. Infolgedessen war in der beobachteten Strahlung der Anteil der näher am Spalt liegenden Teile des Kanalstrahlenbündels weitaus größer als der Anteil der weiter entfernten, näher an der Kathode liegenden Schichten des Strahlen-

nicht unterlassen zu bemerken, daß ich in einem Falle auch zwei Intensitätsmaxima (Ann. d. Phys. **21**. p. 413. 1906) erhielt; doch rührte dies sicher davon her, daß der Kathodenfall während der Exposition großen Schwankungen unterworfen war. Auch in einem Quecksilberspektrogramm, das ich bei stark variablem Kathodenfall erhielt, ist bei einigen Linien eine Zweiteilung des Doppler-Effektes sichtbar. Mit dieser Bemerkung soll indes nicht gesagt sein, daß in Hrn. Paschens Versuchen die Zweiteilung des Doppler-Effektes die gleiche Ursache hatte.

3. Hr. Paschen schreibt l. c. p. 257 u. 258: „Hr. Stark deutet den Doppler-Streifen folgendermaßen: Nur Ionen kommen in Betracht. Die kleinere Geschwindigkeit rührt daher, daß die Ionen nur einen Teil des elektrischen Feldes durchlaufen.“ — „Die Reibung bewirkt nach meiner Auffassung die Verringerung und ‚Dispersion‘ der Geschwindigkeit.“ Zur Ergänzung möchte ich bemerken, daß ich ebenfalls bereits auf die Verringerung der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen infolge von Zusammenstößen mit Gasmolekülen hingewiesen habe. In der ausführlichen Mitteilung meiner Versuche (Ann. d. Phys. **21**. p. 401. 1906) findet sich p. 411 folgender Passus. „Zweitens können Strahlen, die mit der gleichen Geschwindigkeit aus den Kanälen hinter der Kathode austreten, hier verschieden große Teile ihrer Translationsenergie durch Zusammenstoß mit Gasteilchen einbüßen.“ Und an anderer Stelle (Physik. Zeitschr. **8**. p. 79, 398. 1907) habe ich als eine mögliche Hypothese über den Ursprung der bewegten Intensität die Ansicht ausgesprochen, daß die Kanalstrahlenteilchen beim Durchgang durch die Wirkungssphären anderer Teilchen deformiert und zur Lichtemission angeregt werden.

---

bündels. Indem Hr. Paschen das Strahlenbündel mittels eines Kondensors auf den Spalt abbildete, erhielt er von allen Schichten des Bündels gleichzeitig den Doppler-Effekt in vergleichbarer Intensität. Dadurch können Komplikationen entstehen, wenn in den aufeinanderfolgenden Schichten des Kanalstrahlenbündels die Verteilung der Geschwindigkeiten variiert, wie es wahrscheinlich ist. Was endlich die stigmatische Abbildung des Kanalstrahlenbündels betrifft, so ist zu beachten, daß ein Prismenspektrograph auch ohne Kondensor angenähert stigmatisch abbildet, und daß eine astigmatische Abbildung eine Unabhängigkeit der spektralen Intensitätsverteilung von der Geschwindigkeit nicht verwischen würde.

4. In seiner Mitteilung über den Doppler-Effekt an den Sauerstofflinien schreibt Hr. Paschen l. c. p. 264: „Hr. J. Stark und seine Schüler haben gefunden, daß beim Wasserstoff und einigen Metallen die Serienlinien in den Kanalstrahlen den Doppler-Effekt zeigen. Ihr Schluß, daß dies allgemein gültig sei, ist im Falle des Sauerstoffs nicht richtig.“ Hr. Paschen hat mit seinem Gitter keine Spur eines Doppler-Effektes bei den Serienlinien des Sauerstoffs erhalten. Auf dieses negative Resultat gründet er jene Bemerkung, knüpft daran Hypothesen über die elektrische Ladung des Trägers der Sauerstoffserien und hält sie auch für die Heliumserien wahrscheinlich für zutreffend, indem er sich auf ein negatives Resultat von H. Rau[1]) und G. F. Hull[2]) bezüglich des Doppler-Effektes bei den Heliumlinien bezieht. Dem gegenüber sei auf folgendes hingewiesen. Die Bedeutung der Lichtstärke und der Dispersion für einen positiven Erfolg bei der Untersuchung des Doppler-Effektes bei Kanalstrahlen habe ich an anderer Stelle (Physik. Zeitschr. 8. p. 399. 1907) erörtert. H. Rau[3]) ist es kürzlich bei Wiederholung seiner Versuche mit Hilfe eines lichtstarken Spektrographen gelungen, den Doppler-Effekt bei mehreren Heliumlinien nachzuweisen. Und K. Siegl[4]) ist es ebenfalls mit Hilfe eines lichtstarken Spektrographen gelungen, den Doppler-Effekt bei mehreren Linien nachzuweisen, welche den Tripletserien des Sauerstoffs angehören.

Hannover, Juni 1907.

1) H. Rau, Physik. Zeitschr. 7. p. 421. 1906.
2) G. F. Hull, Astrophys. Journ. 25. p. 1. 1907.
3) H. Rau, Physik. Zeitschr. 8. p. 360, 401. 1907.
4) K. Siegl, Wiener Ber. 116. p. 129. 1907.

(Eingegangen 21. Juni 1907.)

14. *Über Stromschwankungen an Gleichstromdynamos;* *von Georg W. Berndt.*

Die Beobachtungen von G. Athanasiadis[1]) über das Tönen von Telephonen, die unter Zwischenschaltung von Widerständen oder Kondensatoren mit einer Gleichstromdynamo verbunden werden, sowie das Tönen größerer Kapazitäten unter ähnlichen Bedingungen, möchte ich durch einige Beobachtungen ergänzen.

Zur Anstellung von Versuchen über Diamagnetismus benutzte ich vor längerer Zeit einen kleinen Hufeisenelektromagneten, der mit der Dynamomaschine des Maschinenbaulaboratoriums verbunden wurde. Beim Einschalten des Stromes hörte man einen deutlichen Ton, dessen Schwingungszahl sich aus der Tourenzahl und der Anzahl der Kollektorlamellen ergibt. Denselben Ton beobachtete ich dann wieder beim Laden einer neu aufgestellten Akkumulatorenbatterie von derselben Dynamomaschine aus, und zwar an dem Vorschaltwiderstande. Der unter Strom stehende Teil desselben besteht aus $^1/_{10}$ mm starken Manganinblech in Streifen von 50 mm Breite, die mit 30 mm Abstand spiralförmig um ein paar Holzstäbe von 1 m Länge und 20 cm Abstand gelegt sind. Der gegenseitige Abstand dieser Stabpaare beträgt 5 cm. Die Tonstärke hängt natürlich von der Intensität des Stromes ab; die günstigsten Verhältnisse ergaben sich bei 30 Amp., wobei der Ton auf 2—3 m Entfernung gehört werden konnte. Die Erklärung für diesen „singenden Widerstand" dürfte dieselbe sein wie für die singende Bogenlampe: Die Stromschwankungen bewirken zunächst Temperaturschwankungen, die sich in periodische Längenänderungen der Blechstreifen umsetzen; diese werden dann auf die Luft übertragen.

1) G. Athanasiadis, Ann. d. Phys. **23.** p. 392. 1907.

Nach diesen Beobachtungen war es zu erwarten, daß eine von der Dynamomaschine gespeiste Bogenlampe gleichfalls tönen würde, was der Versuch bestätigte. Mit wachsender Stromstärke erhielt ich immer stärkere Töne, die bis in die entferntesten Ecken eines 150 Personen fassenden Hörsaales deutlich gehört werden konnten. Dieser Versuch dürfte sich wohl als Vorlesungsversuch eignen zur Erklärung für die Entstehung des Tones im Lichtbogen, da man es hier nur mit einem einzigen Stromkreis zu tun hat und die sonst übergelagerten Mikrophonströme in Fortfall kommen.

(Eingegangen 18. Juni 1907.)

15. *Zur Mechanik der Kapillarschicht; von K. Fuchs.*

1. G. Bakker schreibt[1]): „Indessen sind die Arbeiten von ... Fuchs ... nach einer Seite hin unvollständig. So fand ich z. B. für die Kohäsionen bez. senkrecht und parallel der Oberfläche der Kapillarschicht *verschiedene* Werte und zeigte ich, daß die Differenz dieser Werte gerade den Ausdruck gab, welchen Rayleigh für die Kapillarkonstante von Laplace entwickelte ... Die Kapillarkonstante von Laplace kann betrachtet werden als die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz in der Kapillarschicht."

Dazu bemerke ich folgendes. Meine Arbeiten sind nach dieser Seite hin keineswegs unvollständig; sie sind nur unbemerkt geblieben. Für den Druck p_1 senkrecht zur Oberfläche und für den Druck p_2 parallel zur Oberfläche in irgendeinem Punkte e der Kapillarschicht habe ich folgende Ausdrücke abgeleitet[2]):

$$(1) \qquad p_1 = \frac{2}{3}\pi\varrho^2 J_3 + \frac{1}{15}\pi(2\varrho\varrho'' - \varrho'^2) J_5 + \ldots$$

$$(2) \qquad p_2 = \frac{2}{3}\pi\varrho^2 J_3 + \frac{1}{15}\pi\varrho\varrho'' J_5 + \ldots$$

Hier ist ϱ die Dichte der Flüssigkeit im betreffenden Punkte e, und ϱ' und ϱ'' sind der erste und zweite Differentialquotient der Dichtigkeitskurve, genommen senkrecht zur Oberfläche. Die Molekularanziehung gibt in der zitierten Arbeit lauter Integrale von der Form

$$J_n = \int_{r_1}^{r_2} r^n f(r)\,\partial r,$$

wo $f(r)$ das Gesetz der Molekularanziehung ist. Die Gleichungen (1) und (2) enthalten also das dritte und das fünfte Molekularintegral. Die Ungültigkeit des Pascalschen Gesetzes

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. **20**. p. 981. 1906.
2) K. Fuchs, Wien. Ber. **98**. II. Nov. 1889.

für die Kapillarschicht habe ich also klar gezeigt. Als kontraktive Spannung s im Punkte e ist l. c. der Überschuß der Parallelspannung p_2 über die Normalspannung p_1 angesehen:

$$(3) \qquad s = p_2 - p_1 = \frac{1}{15}\pi(\varrho'^2 - \varrho\,\varrho'')J_5 + \ldots$$

Meine Arbeit *geht* also geradezu *von dem* wie mir scheint selbstverständlichen *Satze aus*, daß die Spannung der Kapillarschicht nichts anderes ist, als die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz in der Kapillarschicht. Die Arbeit habe ich eben darum „Direkte Ableitung" genannt, weil die Kapillarspannungen nicht in üblicher Weise indirekt etwa aus Arbeiten *erschlossen*, sondern *direkt* als Druckdifferenzen nachgewiesen werden.

2. In derselben Arbeit ist derselbe Gedanke auch für die *Mischungsschicht* zweier Flüssigkeiten A und B durchgerechnet. Für die kontraktive Spannung s in irgendeiner Lamelle der Mischungsschicht ergibt sich der Wert:

$$(4) \quad s = \frac{1}{15}\pi(\alpha+\beta-2\gamma)\omega'^2 - \frac{1}{15}\pi(\omega_1[\alpha-\gamma] - \omega_2[\beta-\gamma])\omega'' + \cdots$$

Hier sind α und β Kohäsionskonstanten der Flüssigkeiten A und B, und γ ist eine Adhäsionskonstante derselben; alle drei Konstanten enthalten fünfte Molekularintegrale. Ferner sind ω_1 und ω_2 die Konzentrationen der beiden Flüssigkeiten, derart, daß stets $\omega_1 + \omega_2 = 1$ ist, und ω' und ω'' sind der erste und zweite Differentialquotient der Mischungskurve, genommen normal zur Mischungsschicht. Wenn wir das zweite Glied vernachlässigen, dann zeigt (4), daß die Spannung der Mischungsschicht auch *expansiv* werden kann, wenn die Adhäsionskonstante größer ist als der Mittelwert der Kohäsionen, was etwa bei unbegrenzt mischbaren Flüssigkeiten denkbar ist.

(Eingegangen 27. Juni 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 10.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 23.

1. *Über die spezifische Wärme von Stickstoff, Kohlensäure und Wasserdampf bis 1400°; von L. Holborn und F. Henning.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Es ist früher die mittlere spezifische Wärme einiger Gase zwischen Zimmertemperatur einerseits und 400, 600 und 800° andererseits bei Atmosphärendruck nach dem Mischungsverfahren von Delaroche und Bérard gemessen worden. Die Ausbildung dieser Methode verdankt man besonders Regnault, dessen Versuche sich auf Temperaturen bis 200° beziehen. Seine Anordnung wurde in der Weise abgeändert, daß ein elektrischer Ofen für die Heizung der Gase und ein Thermoelement für die Bestimmung ihrer Temperatur verwendet wurden. So konnte die spezifische Wärme für Luft, Stickstoff und Kohlensäure bis 800° gemessen werden.[1])

Auch der Wasserdampf wurde in den Kreis der Untersuchung gezogen.[2]) Die Versuchsanordnung wurde hierfür noch weiter dahin abgeändert, daß das Kalorimeter statt mit Wasser mit Öl gefüllt und ständig durch einen passend geheizten Mantel auf einer Temperatur über 100° gehalten wurde. Auf diese Weise konnte man vermeiden, daß sich der Dampf in dem Kalorimeter kondensierte und zu der zu messenden spezifischen Wärme die sehr große latente des Dampfes als Korrektion hinzukam.

Die Versuche sind jetzt für Stickstoff, Kohlensäure und Wasserdampf bis etwa 1400° weiter geführt worden. Dazu war ein neuer Apparat nötig. Denn der alte bestand aus Nickelrohren, die mit Silber verlötet waren, und ließ sich oberhalb 800°

1) L. Holborn u. L. Austin, Wissensch. Abh. der Phys.-Techn. Reichsanstalt 4. p. 131. 1905.

2) L. Holborn u. F. Henning, Ann. d. Phys. 18. p. 739. 1905.

nicht mehr verwenden. Für die höheren Temperaturen ist Platin benutzt worden. Der Preis dieses Metalles bedingte einige Umänderungen der alten Anordnung. Ferner haben die vorhergehenden Arbeiten Erfahrungen geliefert, die der Konstruktion des neuen Apparates zugute kamen.

Versuchsanordnung.

Kalorimeter. Das Kalorimeter war größer gewählt worden als das früher benutzte. Denn einmal mußte es die größere Wärmemenge der höher geheizten Gase aufnehmen, sodann sollten auch bei den höchsten Temperaturen mehrere Versuche hintereinander angestellt werden, ohne daß inzwischen durch das umständliche Abkühlen des Kalorimeters Zeit verloren ging. Die Abkühlung mußte aber immer vorgenommen werden, wenn die Kalorimetertemperatur auf 125° gestiegen war, da man sonst Gefahr lief, daß sich die Kapazität durch die beginnende Verdampfung des vorher lange Zeit auf 150° erhitzten Paraffinöls änderte.

Das Kalorimetergefäß bildete einen Zylinder aus Silberblech von 15 cm Durchmesser und 16,5 cm Höhe und enthielt etwa 2,5 Liter Paraffinöl. Für den Durchgang der Gase waren drei mit Silberspänen gefüllte Röhren L_1 L_2 L_3 von 2,5 cm Durchmesser und 7 cm Länge vorgesehen, die durch dünnere leere Röhrchen von 0,5 cm Weite in der aus Fig. 1 zu ersehenden Weise verbunden waren, so daß das erhitzte Gas, das bei E_1 eintrat, die Röhren hintereinander durchfloß und durch das Röhrchen E_2 das Kalorimeter verließ. Die Anordnung gewährleistete völlige Wärmeabgabe, sowie geringe Reibung des Gases.

Außerdem enthielt das Gefäß noch den Rührer H_1, das Quecksilberthermometer *Thq* und das Platinthermometer *Thp*, dessen Widerstandsdraht direkt in das Öl tauchte. Ferner war ein Widerstand B_1 aus Konstantandraht vorgesehen, der auf ein Gestell aus Glimmer gewickelt war. Am oberen Rande war das Kalorimetergefäß abgesetzt; nur die eine halbkreisförmige Hälfte war offen und wurde durch den Deckel Y_1 Y_1 geschlossen. Durch diese Einrichtung wurde bezweckt, daß das Paraffinöl bis an die feste Hälfte der Decke eingefüllt

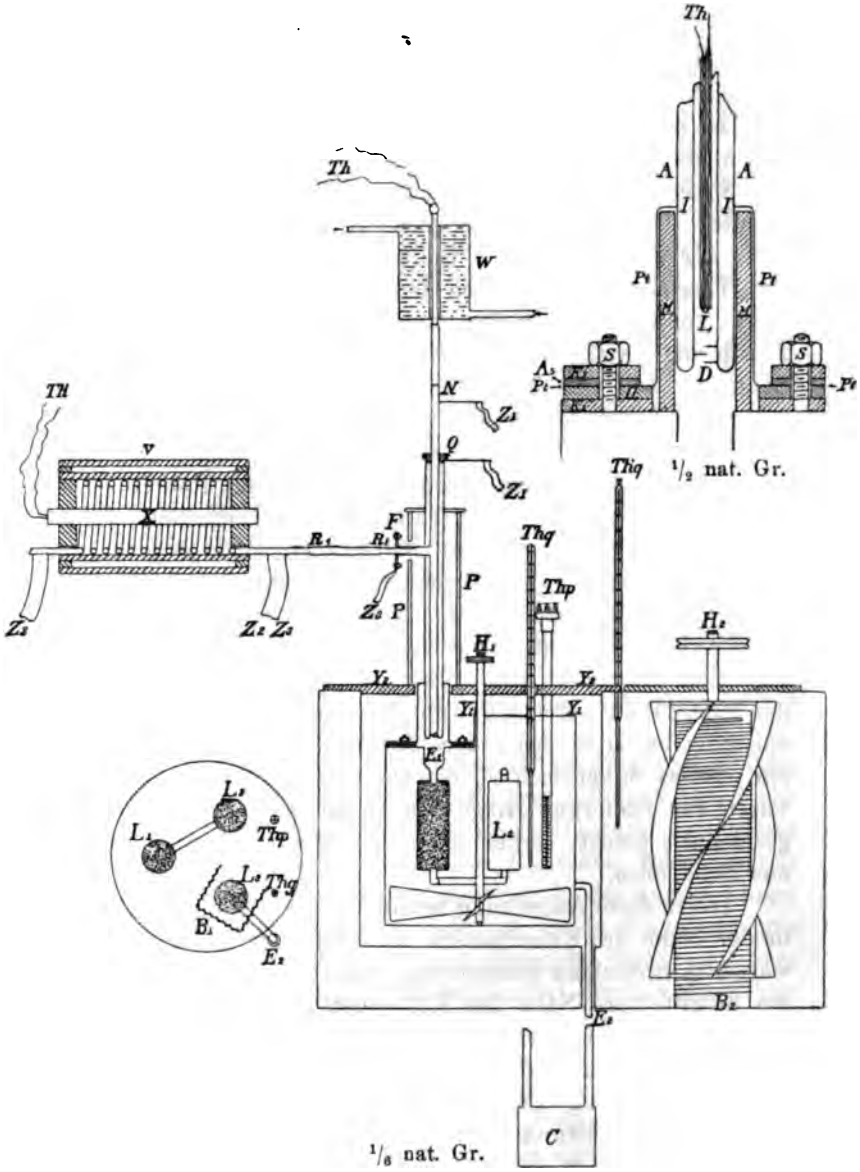

Th
W
TH
V
N
Z₃
Q
Z₁
F
R₁
P
Z₂
Thq
Thp
H₂
H₁
Y₂
Y₁
E₁
L₁
L₂
L₃
B₁
E₂
B₂
C
A
I
Pt
L
D
S
A₂
P₁
½ nat. Gr.
⅛ nat. Gr.

Fig. 1.

werden konnte und diese stets bespülte. Es war dies wichtig, weil an diesem festen Teil der Decke das Heizrohr $AAII$ aufgesetzt war, aus dem das heiße Gas in die Rohrleitung $E_1 E_2$ des Kalorimeters strömte.

Heizrohr. Das Heizrohr haben wir senkrecht gestellt, besonders damit eine Berührung zwischen Thermoelement und der Strom führenden Rohrwandung leichter vermieden werden konnte. Denn eine solche gefährdet in höchster Temperatur trotz der Verwendung von isolierenden Hüllen für die Schenkel des Thermoelements dessen Isolation. Hier isoliert nur die Luft hinreichend. In horizontaler Anordnung ist aber eine Berührung zwischen Thermoelement und Rohrwand kaum zu umgehen, weil sich in dieser Lage alle gebräuchlichen Schutzröhren in hoher Temperatur biegen und dann anliegen.

Das Heizrohr bestand aus Platinblech und war doppelwandig. Es ist aus den beiden konzentrischen Rohren II von 6 mm Weite und AA von 15 mm Weite hergestellt worden, die an dem dem Kalorimeter zugewandten Ende D zusammengeschweißt waren. Eine besondere Heizspule wurde nicht verwendet; der Heizstrom, der bis zu 75 Amp. betrug und von einer Akkumulatorenbatterie von 16 Volt geliefert wurde, durchfloß vielmehr direkt die Rohrwandung, und zwar trat er in das innere Rohr unterhalb N durch ein angelötetes Silberblech Z_1 ein, ging bei D in das äußere über und verließ es wieder durch ein zweites Silberblech Z_1 bei Q. Zwischen die beiden Rohre waren zur Isolierung Ringe aus Magnesia (in der Figur nicht gezeichnet) gelegt, ferner bei Q ein gut abgepaßter Pfropfen aus Schamotte.

Durch diese Anordnung vermieden wir eine Stromzuführung in der Nähe des Kalorimeters, wo kein Platz dafür vorhanden war, und erreichten gleichzeitig, daß sich das Heizrohr bis in die unmittelbare Nähe des Kalorimeters auf der gewünschten hohen Temperatur befand.

Verbindung zwischen Heizrohr und Kalorimeter. Die gasdichte Verbindung zwischen Heizrohr und Kalorimeter muß einen großen Widerstand für den Übergang der Wärme bilden und ist deshalb in hoher Temperatur schwierig herzustellen. Wir sind in der Weise vorgegangen, daß wir an die äußere Wand AA des Heizrohres nochmals ein weiteres Platinrohr $PtPt$

von 0,1 mm Wandstärke und 25 mm Weite anschweißen ließen, das etwas über das Heizrohr hinausragte und an seinem Ende einen Flansch trug, der sechs Löcher besaß. Dieser Flansch wurde auf die in der Figur dargestellten Weise durch die sechs Schraubenmuttern *S* zwischen zwei Kupferringe K_1 K_1 geklemmt, von denen der eine mit der Decke des Kalorimeters fest verlötet war und die Spindeln der Schrauben trug. Ein Gummiring *G* unten und ein Asbestring *As* oben dienten als Dichtung und Isolation für die Wärme und den Heizstrom.

Diese Verbindung war vollständig gasdicht und gab selbst bei den höchsten Temperaturen, wo auch das äußere Rohr des Ofens zu hellem Glühen kam, zu keinen Störungen Veranlassung. Sie war gegen die direkte Strahlung geschützt durch einen Ring *M* aus Magnesia, der auf der Decke des Kalorimeters stand.

Thermoelement. Das innere Rohr der Heizvorrichtung enthielt das Thermoelement *Th* aus Platin und Platinrhodium. Jeder Schenkel war mit einem Röhrchen aus Quarzglas von etwa 1 mm äußerem Durchmesser überzogen. Die Lötstelle *L* blieb frei. Ihr gegenüber waren drei Blenden als Strahlungsschutz angebracht, deren Gestalt ein den Halbkreis etwas übertreffender Kreisabschnitt war.

Bei *N* war an das innere Platinrohr ein Messingrohr hart angelötet. In diesem war ein zweites fast luftdicht verschiebbar, das dünne Porzellanröhrchen zur Fortführung der Drähte des Thermoelementes enthielt. Die Röhrchen waren durch festgestopfte Asbestwolle in dem Messingrohr der ganzen Länge nach befestigt und an ihrem Austritt durch Siegellack gedichtet. Auf diese Weise war das Heizrohr immer gut verschlossen und trotzdem das Thermoelement durch Verschieben des einen Messingrohres im andern leicht beweglich.

Ein Messingzylinder *W*, durch den ständig Wasser floß, schützte die Kittstelle gegen die Strahlung des Heizrohres, das außerdem von einer Porzellanröhre *P* umgeben war. Diese Röhre war der Länge nach in zwei Teile zerschnitten, so daß sie um den Ofen herumgestellt werden konnte.

Vorwärmer. Weil das Heizrohr nur geringe Kapazität besitzt, so muß das Gas, das durch ein Seitenrohr eintritt,

stark vorgewärmt werden, wenn die Temperatur des Gasstromes mehrere Minuten lang nicht zu sehr variieren soll. Als Vorwärmer diente der Ofen V, der aus zwei durch eine Luftschicht getrennten Schamottehüllen bestand. In der inneren lag ein Platinrohr von 5 mm Weite, 0,1 mm Wandstärke und 2 m Länge in Form einer Schraube von zwölf Windungen. Dieses Rohr, das von dem anzuwärmenden Gas durchströmt wurde, ließ sich gleichfalls elektrisch heizen. Den Strom, der bis zu 50 Amp. betrug und durch die angeschweißten Platinbleche $Z_2 Z_2$ zugeführt wurde, lieferte eine zweite Akkumulatorenbatterie bis zu 32 Volt Spannung. Die Temperatur des Vorwärmers gab das Thermoelement Th' an, das in dem glasierten Schutzrohr X bis in die Mitte des Ofens ragte.

Das Schlangenrohr des Vorwärmers war ebenso wie das doppeltwandige Heizrohr und das Kalorimeter von der Firma Heraeus nach unsern Angaben hergestellt worden.

Verbindung zwischen Vorwärmer und Heizrohr. Da sich sowohl das Schlangenrohr des Vorwärmers, wie das doppeltwandige Heizrohr bei der Erwärmung stark ausdehnte, so mußte die Verbindung zwischen beiden, das Röhrchen $R_1 R_1$, sehr biegsam sein. Es wurde deshalb aus Platinblech von 0,01 mm Dicke hergestellt, von dem zwei Lagen dazu verwendet wurden. Nachdem diese zu einem Röhrchen zusammengeschweißt waren, wurde dessen eines Ende an das Platinrohr des Vorwärmers geschweißt und das andere an ein kurzes Rohrstückchen aus Platin von 0,1 mm Wandstärke, welches einen Flansch F trug. Dieser wurde dann unter Zwischenlage einer Asbestdichtung an einen entsprechenden Flansch des seitlichen Ansatzes am doppeltwandigen Heizrohr mittels eiserner Schräubchen befestigt.

Die Verbindung war etwa 7 cm lang. Sie mußte noch besonders geheizt werden, damit das durchströmende Gas darin nicht zu viel von seiner im Vorwärmer aufgenommenen Wärme verlor. Diese Heizung geschah ebenfalls elektrisch mit Hilfe derselben Akkumulatorenbatterie, die den Strom für den Vorwärmer lieferte. Die Stromzuführungen $Z_2 Z_2$ und $Z_3 Z_3$ führten in Parallelschaltung zu derselben Batterie; in jedem Stromkreise befand sich ein besonderer Regulierwiderstand.

Das Verbindungsstück bewährte sich gut. Indessen bildeten sich doch mit der Zeit an den Knickstellen Risse, so daß wir das Stück einige Male erneuern mußten.

Kalorimetermantel. Das Kalorimeter stand auf drei Korkunterlagen in einem zylinderförmigen Hohlraum von 16 cm Weite, der in einem Mantel aus Kupferblech von 25 cm Höhe und elliptischem Querschnitt (große Achse = 35 cm, kleine = 25 cm) ausgespart war. Der Mantel enthielt 15 Liter Rüböl. Der Rührer H_2 des Mantels wurde gemeinsam mit dem Rührer H_1 des Kalorimeters durch einen kleinen Elektromotor angetrieben. Das Quecksilberthermometer *Th'q* gab die Temperatur des Rüböls an, die zunächst durch Heizung mit einem Bunsenbrenner einreguliert und dann elektrisch durch zwei Heizspulen B_2 konstant gehalten wurde.

Oben war der Raum für das Kalorimeter durch einen 1 cm dicken Messingdeckel Y_2 Y_3 geschlossen. Er enthielt Durchbohrungen für Thermometer und Rührer und war mitten durchgeschnitten. Die eine Hälfte war abnehmbar, damit man das Kalorimeter abkühlen konnte. Die andere Hälfte des Messingdeckels, die immer liegen blieb, trug einen Träger (in der Figur nicht gezeichnet) für das Kühlgefäß *W*. An diesem Träger saß gleichzeitig in passender Höhe ein isolierter Klemmring, der dem Heizrohr dicht unterhalb *Q* einen Halt gewährte.

Beobachtungsverfahren.

Gasmenge. Die Gase, Stickstoff und Kohlensäure, wurden käuflichen Bomben entnommen. Sie gingen zuerst durch zwei lange mit Chlorcalcium gefüllte Glasröhren und strömten nach dem Austritt aus dem Kalorimeter in das früher beschriebene Gasometer[1]), in dem ihr Volumen bei Zimmertemperatur durch das Gewicht einer verdrängten Wassermenge gemessen wurde, ohne daß sie direkt mit dem Wasser in Berührung kamen. Der Stickstoff enthielt etwa 1 Proz. Sauerstoff, eine Verunreinigung, von der wir für den vorliegenden Zweck absehen konnten.

Der Wasserdampf wurde in demselben Dampftopf wie früher[2]) erzeugt, passierte zuerst einen Wasserabscheider und

1) L. Holborn u. L. Austin, l. c. p. 139.
2) L. Holborn u. F. Henning, l. c. p. 740.

trat dann in ein elektrisch über 100° geheiztes Kupferrohr, das mit Nickelspänen angefüllt war. Darauf gelangte der Wasserdampf in den Vorwärmer, den er auf diese Weise vollkommen trocken erreichte. Hinter dem Kalorimeter wurde der Dampf in dem kupfernen Zylinder C kondensiert und in diesem dann gewogen.

Bei den Beobachtungen mit Stickstoff und Kohlensäure wurde der ganze Apparat erst mit dem betreffenden Gase vorgespült. Bei Wasserdampf war dagegen vor dem ersten Versuch gewöhnlich Stickstoff in der Leitung vorhanden. An dem Ergebnis wurde dementsprechend eine geringe Korrektion angebracht. Bei den Versuchen in höchster Temperatur haben wir den Wasserdampf nach jedem Versuch durch eine kleine Menge Stickstoff (etwa $^1/_2$ Liter) wieder verdrängt, die aufgefangen und in Rechnung gestellt wurde. Dies Verfahren gab ebenfalls gute Ergebnisse.

Temperatur des Gases. Die Temperatur des Gases wurde unmittelbar vor dem Eintritt in das Kalorimeter gemessen. Die Lötstelle des Thermoelementes lag gewöhnlich 1 cm über der Blende bei L; doch wurde dieser Abstand mehrfach variiert, um zu prüfen, wie weit das Ergebnis von der Lage der Lötstelle beeinflußt wurde. Verschiebungen um einige Millimeter brachten keine merkliche Änderung hervor, so daß Dehnungen der Drähte, wie sie bei der Erwärmung auf hohe Temperatur einzutreten pflegen, nicht berücksichtigt zu werden brauchten.

Anfangs benutzten wir ein Thermoelement von 0,25 mm Dicke. Später wurden von dem Drahtvorrat noch Dicken von 0,1 und 0,02 mm hergestellt, von denen kurze Enden an die 0,25 mm dicken Drähte angesetzt und zu einer Lötstelle vereinigt wurden. Diese wurde stets der verwendeten Drahtdicke entsprechend dünn gehalten, indem die beiden Drahtenden stumpf aneinander geschmolzen wurden. Mit einiger Übung ließ sich dies auch bei dem dünnsten Draht erreichen, dessen Lötstelle in einem kleinen Bunsenschen Blaubrenner hergestellt wurde. Da alle Drähte aus demselben Material stammten, so änderten die sekundären Lötstellen, an denen die dünnen Drahtenden an den 0,25 mm starken Draht an-

gesetzt waren, die Thermokraft des Elementes nicht, wovon wir uns durch besondere Versuche überzeugten.

Der 0,1 mm starke Draht hielt sich noch gut bei 1200°. Bei höherer Temperatur jedoch betrug die Lebensdauer des Elementes meistens nur einen Tag. Der Draht klebte nämlich an verschiedenen Stellen des ihn umgebenden Quarzrohres etwas an und zerriß dann bei der Abkühlung. Bei dem dünnsten Draht zeigte sich diese Erscheinung schon bei 1200°. Über 1300° konnten wir ihn wegen seiner geringen Festigkeit gar nicht mehr benutzen.

Bei den Versuchen entglasten auch die Schutzröhren aus Quarzglas bald, so daß sie bei den höchsten Temperaturen ebenso wie die Drähte täglich durch neue ersetzt werden mußten.

Besondere Aufmerksamkeit wurde auf eine ständige Kontrolle des Platin- und Platinrhodiumdrahtes verwandt, von denen sich namentlich der erstere in Gegenwart eines andern stäubenden Platinmetalls zu ändern pflegt, so daß schädliche Inhomogenitäten entstehen, welche die Thermokraft der Lötstelle fälschen. Einige Male mußte deshalb der 0,25 mm starke Draht um Stücke von mehreren Zentimetern verkürzt werden, die der höchsten Temperatur ausgesetzt gewesen waren.

Bei den dünnen Drähten ist die Gefahr der Verunreinigung natürlich noch größer. Wir haben aus diesem Grunde die geringe Haltbarkeit als keinen großen Übelstand empfunden. Die dünnen Drähte hätten auch wegen der durch die Zerstäubung bewirkten Änderungen oft erneuert werden müssen.

Bei den Temperaturen, bei denen auch das Quarzglas zu leiten beginnt, haben wir stets den Heizstrom kommutiert, um uns davon zu überzeugen, daß kein schädlicher Nebenschluß die Thermokraft erheblich änderte.

Die Thermokraft wurde mit dem Kompensationsapparat gemessen. Die Angaben der Temperatur beziehen sich auf das Stickstoffthermometer.[1])

1) L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. 22. p. 1. 1907.

Temperatur des Kalorimeters. Die Temperatur des Kalorimeters wurde ständig über 100° gehalten, auch bei der Beobachtung von Stickstoff und Kohlensäure. Wir erhielten auf diese Weise bessere Ergebnisse für die Vergleichung, da es uns darauf ankam, neben den absoluten Werten für die spezifische Wärme von Stickstoff, Kohlensäure und Wasserdampf noch ihre Verhältnisse zu bestimmen. Sodann gewährte uns die hohe Temperatur des Kalorimeters noch den Vorteil, die Korrektion klein zu halten, die an der Temperaturerhöhung des Kalorimeters infolge Leitung und Strahlung aus der Umgebung, also besonders von dem heißen Platinrohr, angebracht werden muß, wenn man die von dem durchströmenden Gase abgegebene Wärmemenge berechnen will.

Wenn nämlich die Temperatur des Kalorimeters weit oberhalb der des Zimmers gehalten wird, so kann man die vom Heizrohr zugestrahlte Wärme durch Wärmeabgabe des Kalorimeters an den tiefer temperierten Mantel kompensieren. Die Temperatur des Mantels kann dabei ebenfalls noch höher als die Zimmertemperatur gewählt und deshalb durch elektrische Heizung reguliert werden. Wir sind mit der Manteltemperatur bis 40° heruntergegangen.

Bei der höchsten Temperatur des Heizrohres ließ sich auch mit dieser Anordnung kein stationärer Zustand mehr herstellen, da die Temperatur des Mantels selbst dann noch merklich stieg, als die elektrische Heizung des Mantels ganz abgestellt war. In diesem Falle wurde noch eine von Wasser durchspülte Kühlschlange in das Rüböl des Mantels gelegt, die so viel Wärme abführte, daß die Regulierung durch die elektrische Heizung wieder in Wirksamkeit treten konnte.

Der Erfolg dieser Maßnahmen hat unsere Erwartungen übertroffen. Wenn die Temperatur des Heizrohres konstant gehalten wurde, was sich mit dem Akkumulatorenstrom in befriedigender Weise erreichen ließ, so verlief die Kalorimeterkorrektion sehr regelmäßig. Sie ist in bekannter Weise in einer Vor- und einer Nachperiode beobachtet worden, in denen das Thermometer je zehnmal von Minute zu Minute abgelesen wurde. Da meistens mehrere Versuche hintereinander ausgeführt wurden, diente die Nachperiode des einen oft als Vorperiode für den folgenden. Für jede solche Reihe, die drei

bis fünf Einzelversuche umfaßte, wurde die Korrektion graphisch als Funktion der Kalorimetertemperatur aufgetragen. Sie verlief in dem Intervall von 100 bis 125°, in dem die Temperatur des Kalorimeters variiert wurde, genau geradlinig, wenn nicht ausnahmsweise kleine Schwankungen in der Manteltemperatur auftraten.

Für den Ausgleich der Kalorimetertemperatur während des Gasdurchganges ist das Einleiten von oben weniger günstig als die frühere Anordnung. Auch waren die mit Spänen gefüllten Silberröhren jetzt dicker. Diesen Umständen wurde in ausreichender Weise Rechnung getragen mit der Annahme, daß die Temperatur 5 Min. nach dem Abstellen des Gasstromes wieder regelmäßig verläuft; meist wich der Gang in der letzten Hälfte dieser Zeit schon wenig von dem regelmäßigen ab. Während des Gasdurchganges (meist 4 Min.) und in der darauf folgenden Minute wurde die Temperatur des Kalorimeters jede halbe Minute notiert, um die Korrektion sicherer aus der graphischen Darstellung entnehmen zu können.

Die Temperatur des Kalorimeters wurde mittels eines Fernrohres an dem Quecksilberthermometer *Thq* abgelesen. Dieses befand sich stets in derselben Stellung und war gegen die Strahlung des Heizrohres durch einen Asbestschirm geschützt. Es wurde ebenso wie früher von Zeit zu Zeit mit dem Platinthermometer *Thp* verglichen, um die Korrektion wegen des herausragenden Fadens zu bestimmen. Diese ergab sich ständig zu 0,025° für einen Grad Temperaturdifferenz.

Die Kapazität des Kalorimeters wurde ebenso wie früher[1]) auf elektrischem Wege bestimmt. Der Heizwiderstand B_1 im Paraffinöl besaß einen Widerstand von 30,7 Ohm und wurde mit etwa 2 Amp. belastet. Die dem Kalorimeter zugeführte Energie wurde durch Strom- und Spannungsmessung bestimmt und in kalorisches Maß umgerechnet unter der Annahme, daß eine Kalorie gleich 4,188 Wattsekunden ist. Der Wasserwert w des Kalorimeters ist linear abhängig von seiner Temperatur θ_2 in den vorliegenden Grenzen. Setzt man

$$w = a + b(\theta_2 - 100),$$

1) L. Holborn u. F. Henning, l. c. p. 745—749.

so gilt für die verschiedenen Zeiträume:

1907	a	b
vom 13. 2. bis 11. 4.	1203	2,4
„ 17. 4. „ 31. 5.	1185	2,8
„ 5. 6. „ 15. 6.	1192	2,3

Um sicher zu sein, daß Wasserdampf bei tiefen Manteltemperaturen in dem silbernen Ausflußröhrchen E_2 sich nicht zum Teil kondensierte, wurde dieses auf seiner ganzen Länge mit einer kleinen Drahtspule über 100° gehalten.

Beobachtungen.

Die Tabb. 1—3 enthalten die Beobachtungen, die je nach der Dicke des benutzten Thermoelementes und der Lage seiner Lötstelle getrennt aufgeführt werden. Es bedeutet:

t die Temperatur des Mantels,
m das Gewicht des Gases bez. Dampfes in Gramm,
θ_1 die Temperatur des Gases vor dem Eintritt in das Kalorimeter (Mittel aus etwa zwölf während des Durchgangs angestellten Ablesungen),
θ_2 die mittlere Temperatur des Kalorimeters während des Durchgangs,
ϑ' die beobachtete Temperaturerhöhung des Kalorimeters,
k_1 die Korrektion, aus der Vor- und Nachperiode berechnet,
k_2 die Korrektion des Thermometers wegen herausragenden Fadens,
k_3 die Korrektion wegen Nachspülens mit Stickstoff (nur bei Wasserdampf),
ϑ die korrigierte Temperaturerhöhung des Kalorimeters,
c_{θ_1, θ_2} die mittlere spezifische Wärme zwischen θ_1 und θ_2.

In den letzten Kolumnen der Tabb. 1—3 sind die für jede Beobachtungsreihe gebildeten Mittelwerte für die spezifische Wärme und die Temperatur aufgeführt, denen für die weitere Rechnung Gewichte γ beigelegt worden sind. Das Gewicht ist der vom Gase in der Zeiteinheit abgegebenen Wärmemenge proportional gesetzt worden, und für jeden Mittelwert ist $\gamma = \sum \vartheta$ angenommen, d. h. gleich der Summe der in den Einzelversuchen abgegebenen Wärmemengen. Hierbei haben wir vorausgesetzt, daß alle Fehlerquellen mit wachsender Wärmemenge an Einfluß verlieren.

Tabelle 1. Stickstoff.

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
a) Element von 0,25 mm Durchmesser. 1. Lötstelle 12 mm über der Blende.												
1. 3.	90,1°	23,04	843°	104,8°	4,260°	−0,744°	+0,088°	3,604°	0,2573			
	89,5	23,20	843	109,7	3,940	−0,400	0,088	3,628	0,2616			
	90,1	23,15	844	113,9	3,600	−0,099	0,087	3,588	0,2624	843°	0,2607	14
	90,0	22,96	844	117,4	3,275	+0,146	0,085	3,506	0,2615			
2. 3.	90,0	23,39	828	105,1	4,210	−0,720	+0,087	3,577	0,2570			
	90,1	23,06	835	109,8	3,875	−0,368	0,088	3,595	0,2626			
	90,0	23,22	836	113,9	3,520	−0,078	0,086	3,528	0,2601	832	0,2606	14
	90,0	23,41	835	117,3	3,275	+0,172	0,086	3,533	0,2617			
13. 2.	103,9	19,94	1003	110,2	5,320	−2,023	+0,095	3,392	0,2692			
	104,1	19,73	1003	117,9	5,150	−1,515	0,091	3,726	0,2652			
	90,0	20,41	1027	107,6	5,600	−1,595	0,100	4,105	0,2672	1013	0,2660	16
	90,0	21,09	1033	114,9	5,075	−1,069	0,100	4,106	0,2628			
15. 2.	90,1	22,12	999	107,4	5,660	−1,413	+0,106	4,353	0,2694			
	89,9	22,25	999	114,2	5,100	−0,938	0,104	4,266	0,2680	994	0,2688	13
	90,1	22,60	996	120,1	4,660	−0,528	0,103	4,235	0,2676			

Tabelle 1. **Stickstoff** (Fortsetzung).

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
21. 2.	89,9°	21,08	1025°	108,1°	5,615°	−1,461°	+0,104°	4,258°	0,2692			
	90,1	21,44	1019	115,0	5,050	−0,959	0,102	4,193	0,2680	1016°	0,2691	13
	90,1	21,51	1018	120,8	4,600	−0,542	0,102	4,160	0,2702			
22. 2.	90,0	22,67	1021	107,5	5,895	−1,493	+0,110	4,512	0,2662			
	90,0	16,53	1032	114,5	4,200	−1,014	0,079	3,265	0,2667	1027	0,2678	10
	90,0	13,22	1040	119,3	3,240	−0,667	0,064	2,637	0,2705			
2. Lötstelle 38 mm über der Blende.												
8. 3.	90,2	20,85	1040	108,1	5,355	−1,386	+0,100	4,119	0,2590			
	90,0	20,63	1041	114,8	4,730	−0,844	0,097	3,983	0,2581	1040	0,2586	8
9. 3.	90,0	20,59	1039	106,9	5,385	−1,483	+0,099	4,051	0,2575			
	90,0	20,35	1043	113,7	4,760	−0,924	0,096	3,932	0,2571	1038	0,2577	12
	90,1	20,02	1042	119,2	4,250	−0,520	0,093	3,823	0,2584			
b) Element von 0,1 mm Durchmesser.												
1. Lötstelle 10 mm über der Blende.												
26. 3.	89,9	22,03	862	105,1	4,040	−0,718	+0,083	3,405	0,2481			
	90,1	22,49	862	109,8	3,785	−0,384	0,085	3,486	0,2527			
	89,9	22,40	862	113,8	3,390	−0,103	0,082	3,369	0,2485	861	0,2500	14
	89,9	22,54	862	117,1	3,150	+0,153	0,082	3,385	0,2508			

27. 3.	90,0	22,51	824	101,9	3,800	−0,559	+0,081	3,322	0,2492			
	89,9	22,48	825	109,1	3,495	−0,258	0,081	3,323	0,2529	824	0,2516	13
	—	22,91	824	112,7	3,245	+0,008	0,081	3,334	0,2526			
	90,3	22,58	826	115,8	2,945	+0,227	0,079	3,251	0,2517			
7. 5.	90,0	20,78	843	104,2	4,215	−1,013	+0,080	3,282	0,2552			
	89,9	21,91	841	109,6	4,000	−0,642	0,084	3,442	0,2592	840	0,2577	14
	90,1	22,55	842	114,1	3,732	−0,333	0,085	3,484	0,2583			
	90,0	23,23	842	118,1	3,510	−0,057	0,086	3,539	0,2580			
13. 5.	90,0	14,69	842	104,1	3,465	−1,267	+0,055	2,253	0,2481			
	90,0	16,61	839	109,0	3,440	−0,945	0,062	2,557	0,2541	840	0,2514	10
	90,0	17,48	841	113,4	3,200	−0,634	0,064	2,630	0,2511			
	90,1	17,01	841	117,1	2,855	−0,379	0,062	2,538	0,2523			
24. 5.	90,0	19,93	822	104,8	4,110	−1,162	+0,074	3,022	0,2529			
	90,0	20,10	822	110,0	3,770	−0,799	0,074	3,045	0,2570	820	0,2545	12
	90,0	19,94	823	114,4	3,365	−0,490	0,072	2,947	0,2537			
	90,0	20,30	822	118,2	3,120	−0,225	0,072	2,967	0,2545			
4. 4.	75,0	18,44	1201	106,4	5,820	−1,546	+0,107	4,381	0,2643			
	75,1	18,38	1202	113,6	5,195	−0,991	0,105	4,309	0,2663	1199	0,2658	13
	75,1	18,29	1203	119,6	4,653	−0,528	0,103	4,228	0,2668			
5. 4.	75,0	18,21	1193	106,5	5,702	−1,488	+0,106	4,320	0,2663			
	75,0	17,91	1191	113,5	5,010	−0,940	0,102	4,172	0,2673	1188	0,2667	13
	75,0	18,18	1189	119,2	4,580	−0,482	0,101	4,149	0,2664			
6. 5.	70,1	21,11	1169	106,4	6,365	−1,592	+0,120	4,893	0,2617			
	70,2	21,85	1167	114,2	5,785	−0,987	0,119	4,867	0,2635	1162	0,2629	15
	70,3	21,64	1163	120,7	5,190	−0,486	0,118	4,822	0,2635			

Tabelle 1. **Stickstoff (Fortsetzung).**

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
						2. Lötstelle 20 mm über der Blende.						
22. 4.	90,2°	24,99	841°	105,1°	4,620°	−0,873°	+0,098°	3,840°	0,2497			
	90,2	24,43	831	110,5	4,100	−0,515	0,090	3,675	0,2526	831°	0,2522	14
	90,2	23,13	831	114,9	3,560	−0,211	0,084	3,433	0,2525			
	90,1	23,57	829	118,5	3,340	+0,040	0,085	3,465	0,2541			
23. 4.	90,1	24,19	846	104,3	4,630	−0,949	+0,092	3,773	0,2512			
	90,1	23,27	846	109,8	4,110	−0,604	0,088	3,594	0,2533	844	0,2527	14
	90,1	23,14	846	114,3	3,750	−0,298	0,086	3,538	0,2542			
	90,2	24,30	846	118,2	3,575	−0,029	0,089	3,635	0,2519			
18. 4.	75,0	21,58	1188	106,6	6,302	−1,516	+0,120	4,906	0,2524			
	75,0	21,41	1184	114,2	5,610	−0,942	0,117	4,785	0,2542	1179	0,2536	14
	75,1	21,33	1177	120,5	5,015	−0,476	0,113	4,652	0,2542			
19. 4.	75,0	21,37	1189	106,7	6,485	−1,607	+0,121	4,949	0,2568			
	75,2	21,60	1179	114,6	5,835	−1,054	0,119	4,900	0,2597	1180	0,2583	15
	75,1	21,05	1185	121,2	5,170	−0,589	0,114	4,695	0,2587			

19. 3.	89,8	19,83	1018	106,9	5,305	−1,495	+0,095	3,905	0,2637			
	90,1	19,56	1019	113,6	4,720	−1,003	0,093	3,810	0,2658	1016	0,2658	12
	90,1	19,75	1020	119,2	4,300	−0,577	0,093	3,816	0,2678			
					3. Lötstelle 15 mm über der Blende.							
8. 6.	39,0	17,22	1359	104,4	5,160	−0,412	+0,118	4,866	0,2709			
	39,1	17,10	1349	109,7	4,690	+0,021	0,118	4,829	0,2769	1353	0,2731	14
	39,0	17,18	1348	114,0	4,210	+0,369	0,114	4,693	0,2712			
					4. Lötstelle 20 mm über der Blende.							
16. 3.	90,0	19,97	1002	106,7	5,080	−1,351	+0,093	3,822	0,2607			
	90,0	20,00	1002	113,0	4,555	−0,884	0,092	3,763	0,2612	999	0,2614	11
	90,0	19,98	1001	118,3	4,110	−0,491	0,090	3,709	0,2622			
15. 6.	40,3	16,70	1383	105,6	5,435	−0,866	+0,114	4,683	0,2648			
	40,2	16,83	1389	111,8	4,960	−0,384	0,114	4,690	0,2672	1383	0,2647	14
	40,1	17,22	1378	116,8	4,500	+0,012	0,113	4,625	0,2622			
					5. Lötstelle 44 mm über der Blende.							
15. 3.	90,3	19,39	987	107,9	4,535	−0,965	+0,089	3,659	0,2623			
	90,0	19,41	988	113,2	4,075	−0,594	0,087	3,568	0,2594	985	0,2606	11
	90,0	19,44	989	117,7	3,710	−0,259	0,086	3,537	0,2601			
					c) Element von 0,02 mm Durchmesser.							
					1. Lötstelle 10 mm über der Blende.							
24. 4.	90,0	23,70	874	106,1	4,730	−0,966	+0,094	3,858	0,2541			
	90,0	22,95	876	111,6	4,210	−0,599	0,090	3,701	0,2556			
	90,0	24,49	874	116,5	4,020	−0,269	0,094	3,845	0,2534	871	0,2540	15
	90,1	23,08	878	120,5	3,515	−0,012	0,088	3,591	0,2580			
11. 4.	75,1	17,29	1185	106,0	5,325	−1,449	+0,097	3,973	0,2594			
	74,9	17,16	1183	112,7	4,780	−0,941	0,095	3,884	0,2610	1182	0,2609	12
	75,0	17,48	1183	118,2	4,330	−0,509	0,096	3,917	0,2624			
17. 4.	75,1	21,80	1181	106,8	6,545	−1,641	+0,123	5,027	0,2577			
	75,0	21,95	1172	115,0	5,865	−1,070	0,120	4,915	0,2582	1168	0,2589	15
	75,1	21,00	1163	121,6	5,070	−0,561	0,113	4,622	0,2609			

Tabelle 1. **Stickstoff (Fortsetzung).**

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
						2. Lötstelle 20 mm über der Blende.						
22. 4.	90,2°	24,99	841°	105,1°	4,620°	−0,873°	+0,093°	3,840°	0,2497			
	90,2	24,43	831	110,5	4,100	−0,515	0,090	3,675	0,2526	831°	0,2522	14
	90,2	23,13	831	114,9	3,560	−0,211	0,084	3,433	0,2525			
	90,1	23,57	829	118,5	3,340	+0,040	0,085	3,465	0,2541			
23. 4.	90,1	24,19	846	104,3	4,630	−0,949	+0,092	3,773	0,2512			
	90,1	23,27	846	109,8	4,110	−0,604	0,088	3,594	0,2533	844	0,2527	14
	90,1	23,14	846	114,3	3,750	−0,298	0,086	3,538	0,2542			
	90,2	24,30	846	118,2	3,575	−0,029	0,089	3,635	0,2519			
18. 4.	75,0	21,58	1188	106,6	6,302	−1,516	+0,120	4,906	0,2524			
	75,0	21,41	1184	114,2	5,610	−0,942	0,117	4,785	0,2542	1179	0,2536	14
	75,1	21,33	1177	120,5	5,015	−0,476	0,113	4,652	0,2542			
19. 4.	75,0	21,37	1189	106,7	6,435	−1,607	+0,121	4,949	0,2568			
	75,2	21,60	1179	114,6	5,835	−1,054	0,119	4,900	0,2597	1180	0,2583	15
	75,1	21,05	1185	121,2	5,170	−0,589	0,114	4,695	0,2587			

Tabelle 2. Kohlensäure.

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
a) Element von 0,25 mm Durchmesser.												
1. Lötstelle 12 mm über der Blende.												
1. 3.	89,9°	22,52	849°	104,7°	4,255°	−0,751°	+0,087°	3,591°	0,2602			
	89,9	22,21	851	109,6	3,865	−0,406	0,086	3,545	0,2641	848°	0,2624	15
	89,9	29,89	848	114,3	4,605	−0,069	0,114	4,650	0,2622			
	90,1	22,06	852	118,1	3,135	+0,201	0,083	3,419	0,2631			
2. 3.	90,0	22,33	843	105,0	4,115	−0,685	+0,086	3,516	0,2592			
	89,9	22,53	848	109,7	3,790	−0,350	0,086	3,526	0,2618	841	0,2612	14
	90,0	22,54	842	113,7	3,440	−0,061	0,084	3,463	0,2608			
	90,0	22,61	841	117,0	3,205	+0,172	0,084	3,461	0,2630			
13. 2.	104,1	24,63	1003	108,4	6,995	−2,160	+0,121	4,956	0,2750	1000	0,2750	10
	104,0	25,17	1003	117,2	6,345	−1,537	0,120	4,928	0,2749			
15. 2.	91,4	20,28	1005	108,0	5,495	−1,473	+0,101	4,123	0,2770			
	91,4	20,53	1009	114,9	4,970	−0,985	0,099	4,084	0,2757	1004	0,2762	12
	91,4	20,39	1009	120,6	4,475	−0,582	0,097	3,990	0,2759			
21. 2.	90,0	19,53	1028	107,2	5,475	−1,522	+0,099	4,052	0,2748			
	90,0	19,97	1028	114,1	4,995	−1,022	0,099	4,072	0,2760	1024	0,2760	12
	90,0	19,70	1027	120,0	4,470	−0,609	0,097	3,958	0,2771			

Tabelle 2. **Kohlensäure (Fortsetzung).**

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
22. 2.	90,0°	21,55	1023°	107,0°	5,800°	−1,501°	+0,108°	4,407°	0,2724			
	90,0	14,28	1040	113,4	3,945	−1,064	0,072	2,953	0,2755	1028°	0,2739	18
	90,0	27,80	1016	119,3	5,900	−0,569	0,133	5,464	0,2737			
23. 2.	90,0	25,85	1040	108,5	6,925	−1,626	+0,132	5,431	0,2760			
	90,1	33,48	1047	117,6	7,795	−1,088	0,168	6,880	0,2754			
	90,0	34,13	1045	108,8	8,920	−1,952	0,174	7,142	0,2736	1042	0,2734	24
	89,8	11,01	1049	116,5	2,995	−0,804	0,055	2,246	0,2719			
	90,1	11,55	1048	120,3	2,815	−0,559	0,056	2,312	0,2701			
					2. Lötstelle 28 mm über der Blende.							
7. 3.	90,0	20,76	1043	107,2	5,525	−1,414	+0,103	4,214	0,2646			
	90,0	20,40	1047	114,1	4,880	−0,899	0,099	4,080	0,2652	1041	0,2654	12
	89,9	20,43	1045	119,8	4,400	−0,470	0,098	4,028	0,2664			
					3. Lötstelle 38 mm über der Blende.							
8. 3.	90,0	19,90	1053	108,2	5,310	−1,355	+0,099	4,054	0,2636			
	90,0	20,10	1052	114,8	4,735	−0,840	0,098	3,993	0,2625	1048	0,2629	12
	90,0	20,21	1053	120,3	4,300	−0,489	0,096	3,957	0,2627			
					4. Lötstelle 76 mm über der Blende.							
9. 3.	90,0	18,88	1088	108,1	5,095	−1,351	+0,098	3,837	0,2584			
	90,0	17,78	1084	114,4	4,330	−0,876	0,086	3,540	0,2539	1082	0,2530	11
	90,0	17,92	1086	119,5	3,905	−0,505	0,085	3,485	0,2516			

1. Lötstelle 10 mm über der Blende.

26. 3.	89,9	22,30	868	105,3	4,155	−0,703	+0,086	3,538	0,2528			
	90,1	22,13	870	110,0	3,790	−0,362	0,085	3,513	0,2563	868	0,2554	14
	90,0	21,94	871	114,0	3,430	−0,063	0,084	3,451	0,2570			
	89,9	21,65	871	117,3	3,090	+0,176	0,082	3,348	0,2553			
27. 3.	—	22,49	828	104,8	3,845	−0,537	+0,083	3,391	0,2532			
	—	22,87	827	109,1	3,595	−0,253	0,084	3,426	0,2556	828	0,2539	13
	90,0	22,97	827	112,7	3,285	+0,008	0,082	3,375	0,2537			
	—	22,24	828	115,7	2,925	+0,226	0,079	3,230	0,2531			
28. 3.	80,0	18,90	1194	106,8	6,280	−1,779	+0,113	4,614	0,2738			
	80,0	18,45	1201	114,4	5,520	−1,178	0,108	4,450	0,2745	1194	0,2755	14
	80,1	18,74	1200	120,8	5,025	−0,645	0,109	4,489	0,2782			
4. 4.	75,2	18,46	1202	106,4	5,930	−1,522	+0,110	4,518	0,2720			
	75,3	18,17	1204	113,5	5,275	−0,972	0,108	4,411	0,2751	1200	0,2746	13
	75,3	18,31	1204	119,5	4,785	−0,497	0,107	4,395	0,2768			
5. 4.	75,0	16,96	1204	106,4	5,630	−1,500	+0,103	4,233	0,2769			
	75,0	17,19	1203	113,5	5,040	−0,939	0,108	4,204	0,2773	1200	0,2778	13
	75,0	17,04	1201	119,4	4,495	−0,474	0,101	4,122	0,2792			
27. 5.	49,3	12,83	1421	106,4	5,445	−1,832	+0,090	3,703	0,2632			
	49,6	16,19	1396	114,0	5,750	−1,195	0,114	4,669	0,2738			
	48,2	15,94	1402	106,4	6,325	−1,776	0,114	4,663	0,2706	1403	0,2711	22
	48,7	15,83	1403	114,3	5,650	−1,178	0,112	4,589	0,2737			
	49,3	16,25	1402	121,0	5,215	−0,695	0,113	4,633	0,2742			

Tabelle 2. **Kohlensäure (Fortsetzung).**

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
29. 5.	39,2°	9,00	1487°	105,2°	4,145°	−1,486°	+0,067°	2,726°	0,2628			
	39,3	11,62	1456	111,1	4,380	−0,997	0,084	3,467	0,2684	1460°	0,2649	18
	39,4	12,57	1454	116,4	4,105	−0,569	0,088	3,624	0,2638			
	39,4	12,57	1457	120,9	3,750	−0,216	0,088	3,622	0,2657			
5. 6.	39,6	22,21	1337	106,5	6,865	−0,856	+0,150	6,159	0,2724			
	39,5	22,62	1335	113,9	6,200	−0,229	0,149	6,120	0,2712	1333	0,2720	18
	39,6	22,60	1327	119,9	5,610	+0,243	0,146	5,999	0,2723			
7. 6.	40,0	22,20	1287	105,9	6,725	−0,842	+0,147	6,080	0,2774			
	40,0	21,00	1296	113,0	5,785	−0,259	0,138	5,664	0,2786	1293	0,2770	17
	40,0	20,46	1303	118,5	5,055	+0,209	0,132	5,396	0,2751			
						2. Lötstelle 12 mm über der Blende.						
20. 3.	90,0	20,03	837	105,1	3,750	−0,701	+0,076	3,125	0,2590	842	0,2590	3
19. 3.	90,0	19,38	1024	107,1	5,270	−1,451	+0,095	3,914	0,2687			
	90,1	18,84	1024	118,6	4,640	−0,959	0,092	3,778	0,2718	1021	0,2707	11
	90,0	19,33	1023	119,1	4,255	−0,548	0,093	3,800	0,2716			

					3. Lötstelle 15 mm über der Blende.							
8. 6.	38,6	17,91	1341	104,7	5,425	−0,360	+0,126	5,191	0,2823			
	38,6	17,30	1344	110,1	4,810	+0,065	0,122	4,997	0,2846	1343	0,2818	15
	38,7	17,28	1344	114,5	4,305	+0,402	0,118	4,825	0,2785			
					4. Lötstelle 20 mm über der Blende.							
16. 3.	90,1	19,84	1008	106,7	5,185	−1,342	+0,096	3,939	0,2686			
	90,2	19,93	1005	113,2	4,695	−0,885	0,095	3,905	0,2718	1004	0,2703	11
	90,3	19,69	1009	118,7	4,185	−0,473	0,093	3,805	0,2710			
					5. Lötstelle 44 mm über der Blende.							
15. 3.	—	18,97	1011	107,7	4,495	−0,944	+0,089	3,640	0,2595			
	—	19,39	990	113,0	4,120	−0,562	0,089	3,647	0,2647	996	0,2634	11
	—	19,53	996	117,6	3,790	−0,214	0,089	3,665	0,2661			
					c) Element von 0,02 mm Durchmesser.							
					1. Lötstelle 10 mm über der Blende.							
9. 4.	74,9	16,88	1188	106,4	5,385	−1,443	+0,098	4,040	0,2694			
	75,2	17,19	1187	113,1	4,900	−0,908	0,100	4,092	0,2735	1185	0,2722	12
	75,1	16,99	1190	118,7	4,353	−0,460	0,097	3,990	0,2737			
17. 4.	76,0	22,37	1182	107,5	6,885	−1,616	+0,131	5,350	0,2677			
	76,0	21,70	1176	115,6	5,945	−1,025	0,123	5,048	0,2675	1169	0,2682	15
	76,0	20,82	1165	122,3	5,165	−0,548	0,116	4,733	0,2694			
					2. Lötstelle 20 mm über der Blende.							
19. 4.	75,0	21,99	1156	114,9	5,920	−0,944	+0,124	5,104	0,2716	1152	0,2709	10
	75,1	21,31	1164	121,5	5,220	−0,473	0,119	4,866	0,2702			

Tabelle 3. **Wasserdampf.**

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta=\theta_1-\theta_2+110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
						a) Element von 0,1 mm Durchmesser.						
						1. Lötstelle 10 mm über der Blende.						
7. 5.	89,1°	11,94	842°	104,6°	4,655°	−1,185°	+0,087°	3,557°	0,4831			
	88,9	11,60	839	110,3	4,065	−0,822	0,081	3,324	0,4748			
	89,0	11,96	837	115,1	3,715	−0,492	0,080	3,303	0,4663	836°	0,4724	14
	89,1	12,37	835	119,1	3,485	−0,210	0,082	3,357	0,4654			
8. 5.	90,0	10,83	883	111,1	4,260	−1,032	+0,081	3,309	0,4789			
	90,0	10,11	884	116,2	3,620	−0,678	0,073	3,015	0,4737			
	90,0	9,67	867	104,8	4,170	−1,332	0,071	2,909	0,4722	873	0,4745	12
	90,0	9,65	862	110,2	3,740	−0,966	0,069	2,843	0,4733			
11. 5.	89,9	6,55	861	104,5	3,240	−1,264	+0,049	2,025	0,4887			
	90,0	8,85	853	109,3	3,555	−0,931	0,065	2,689	0,4925			
	90,0	12,26	839	114,2	4,085	−0,583	0,088	3,590	0,4915			
	90,0	13,10	839	118,8	3,950	−0,242	0,093	3,801	0,4949			
	89,9	12,92	830	104,9	4,895	−1,165	0,093	3,823	0,4881	837	0,4917	27
	90,0	13,47	829	110,9	4,625	−0,756	0,097	3,966	0,4962			
	90,0	13,10	829	116,0	4,080	−0,406	0,092	3,766	0,4928			
	89,9	11,98	882	120,2	3,440	−0,128	0,082	3,395	0,4896			

	90,0	13,23	830	110,8	4,565	−0,795	0,094	3,864	0,4911	832	0,4858	13
	90,0	11,02	836	115,7	3,530	−0,469	0,076	3,137	0,4824			
	90,0	9,92	839	119,4	2,965	−0,212	0,069	2,822	0,4856			
24. 5.	89,9	10,94	822	104,8	4,295	−1,159	+0,078	3,214	0,4900			
	89,9	11,16	820	110,2	3,920	−0,796	0,078	3,202	0,4881	818	0,4838	12
	90,0	10,99	819	114,8	3,450	−0,489	0,074	3,035	0,4778			
	90,0	10,83	820	118,6	3,120	−0,226	0,072	2,966	0,4794			
25. 5.	89,9	11,36	837	104,9	4,480	−1,202	+0,082	3,360	0,4832			
	90,0	11,52	835	110,6	4,100	−0,821	0,082	3,361	0,4872	835	0,4841	10
	89,9	11,58	833	115,3	3,695	−0,491	0,080	3,284	0,4819			
3. 5.	75,2	10,58	1203	107,1	6,845	−2,089	+0,119	4,875	0,5049			
	75,4	11,24	1189	116,1	6,235	−1,432	0,120	4,923	0,4988	1192	0,5013	17
	75,0	15,59	1185	108,1	8,720	−1,915	0,170	6,975	0,5002			
4. 5.	70,2	10,85	1203	107,0	6,735	−1,772	+0,124	5,087	0,5137			
	70,3	11,71	1195	115,3	6,130	−1,150	0,125	5,105	0,4925			
	70,5	10,49	1195	122,1	5,025	−0,657	0,109	4,477	0,4912	1180	0,5016	27
	70,1	11,18	1178	106,5	6,660	−1,839	0,121	4,942	0,4953			
	70,2	17,41	1138	116,0	8,420	−1,095	0,183	7,508	0,5152			
6. 5.	70,1	10,49	1190	106,7	6,640	−1,883	+0,120	4,877	0,5151			
	70,2	10,11	1185	115,0	5,715	−1,298	0,111	4,528	0,5102	1187	0,5107	13
	70,8	8,36	1197	121,5	4,420	−0,816	0,090	3,694	0,5068			

Tabelle 3. **Wasserdampf (Fortsetzung).**

Datum 1907	t	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ'	k_1	k_2	k_3	ϑ	c_{θ_1,θ_2}	Mittel $\theta = \theta_1 - \theta_2 + 110$	Mittel $c_{110,\theta}$	γ
14. 5.	71,9°	10,51	1193°	106,5°	6,545°	−1,717°	+0,121°		4,949°	0,5203			
	72,0	9,42	1191	114,3	5,350	−1,135	0,106		4,321	0,5188			
	72,0	10,11	1183	120,7	5,020	−0,646	0,110		4,484	0,5145			
	67,1	10,78	1188	106,5	6,560	−1,684	0,122		4,998	0,5147	1188°	0,5153	28
	67,3	9,72	1187	114,3	5,380	−1,099	0,107		4,388	0,5120			
	67,5	10,18	1182	120,7	4,995	−0,616	0,110		4,489	0,5120			
15. 5.	67,1	10,86	1184	106,5	6,635	−1,716	+0,123		5,042	0,5169			
	67,2	9,13	1186	114,2	5,135	−1,147	0,100		4,088	0,5083	1183	0,5124	13
	67,2	8,61	1192	120,3	4,440	−0,694	0,094		3,840	0,5121			
23. 5.	67,0	8,85	1187	106,1	5,720	−1,657	+0,102		4,165	0,5220			
	67,1	9,05	1178	113,3	5,070	−1,094	0,099		4,075	0,5137	1177	0,5176	12
	67,0	9,30	1174	119,3	4,650	−0,623	0,101		4,128	0,5171			
29. 5.	39,9	6,86	1439	105,0	5,405	−1,414	+0,100		4,091	0,5355	1443	0,5355	4
5. 6.	40,6	11,84	1299	106,2	6,765	−0,802	+0,149		6,112	0,5223	1303	0,5228	6
7. 6.	39,1	11,07	1249	105,6	6,050	−0,575	+0,137		5,612	0,5349	1253	0,5349	6
12. 6.	40,0	10,49	1325	106,0	6,390	−0,881	+0,138		5,647	0,5321			
	40,2	9,13	1343	105,5	5,725	−0,923	0,120		4,922	0,5252	1338	0,5287	11
	40,2	9,69	1344	105,7	6,120	−0,900	0,131	−0,086°	5,265	0,5289			
	40,2	9,94	1341	112,4	5,620	−0,823	0,182	−0,105	5,324	0,5317	1340	0,5306	16
	40,6	9,79	1341	113,0	4,990	+0,146	0,192	−0,102	3,192	0,5211			

13. 6.	39,3	8,99	1335	105,4	5,250	−0,631	+0,115	−0,040	4,694	0,5115			
	39,2	10,47	1317	111,4	5,460	−0,108	0,134	−0,126	5,360	0,5174			
	39,3	9,49	1320	116,3	4,510	+0,300	0,120	−0,102	4,828	0,5197	1320	0,5190	30
	39,5	9,39	1323	105,0	5,675	−0,731	0,123	−0,110	4,957	0,5218			
	39,5	9,62	1313	111,1	5,115	−0,196	0,122	−0,075	4,966	0,5231			
	39,5	9,59	1316	116,1	4,630	+0,237	0,122	−0,118	4,871	0,5206			
14. 6.	40,0	9,03	1330	106,0	5,730	−0,864	+0,121	−0,063	4,925	0,5378			
	40,1	9,00	1330	112,3	5,120	−0,332	0,120	−0,083	4,825	0,5374	1328	0,5364	14
	40,2	9,10	1330	117,4	4,640	+0,104	0,118	−0,077	4,785	0,5341			

b) Element von 0,02 mm Durchmesser.

1. Lötstelle 10 mm über der Blende.

25. 4.	90,0	14,78	861	104,9	5,305	−1,011	+0,107		4,401	0,4711			
	90,0	15,05	858	111,1	4,885	−0,589	0,108		4,404	0,4740	858	0,4751	17
	90,1	13,19	863	116,1	3,995	−0,255	0,093		3,833	0,4750			
	90,0	13,38	862	120,2	3,755	+0,027	0,094		3,876	0,4802			

2. Lötstelle 20 mm über der Blende.

22. 4.	90,2	27,55	806	106,3	8,515	−0,726	+0,194		7,983	0,4968			
	90,2	25,45	802	114,8	6,985	−0,153	0,171		7,003	0,4879	799	0,4907	22
	90,2	25,17	801	121,5	6,280	+0,318	0,166		6,764	0,4880			
23. 4.	90,0	8,22	861	103,8	3,530	−1,033	+0,062		2,559	0,4910			
	90,0	11,86	850	108,7	3,965	−0,686	0,082		3,361	0,4811			
	90,0	13,90	845	113,5	4,245	−0,345	0,097		3,997	0,4779	845	0,4790	18
	90,0	14,77	843	118,0	4,060	−0,036	0,100		4,124	0,4722			
	90,0	15,03	842	121,9	3,825	+0,220	0,101		4,146	0,4728			

Berechnung der Beobachtungen.

Verhältnisse der spezifischen Wärmen (CO_2/N_2 und H_2O/N_2). Da manche Änderungen in der Versuchsanordnung, wie z. B. die verschiedene Dicke und Lage des Thermoelementes, auf das Verhältnis der spezifischen Wärmen von Kohlensäure und Wasserdampf zu der des Stickstoffs keinen Einfluß ausübten, so haben wir zunächst diese Verhältnisse berechnet. Es wurden hierzu nur Beobachtungen benutzt, von denen die zusammengehörigen Paare an demselben Tage angestellt worden sind. An den Werten für Stickstoff sind zu diesem Zwecke kleine Korrektionen angebracht worden, um sie auf die naheliegende Temperatur zu reduzieren, die bei Kohlensäure oder Wasserdampf beobachtet worden war. Für diese Korrektion ist eine ausreichende vorläufige Bestimmung des Temperaturkoeffizienten der spezifischen Wärme ($1{,}5 \times 10^{-5}$) verwendet worden. Die Kalorimetertemperatur ist im Mittel zu 110° genommen.

Jedem Verhältnis wurde wiederum ein Gewicht zugeteilt, das übereinstimmt mit dem kleinsten von beiden Gewichten, die Zähler und Nenner besaßen. Tab. 4 enthält die Zusammenstellung. Unter ber. sind die aus den Formeln

$$c_{110,\,\theta}\left(\frac{CO_2}{N_2}\right) = 0{,}966 + 0{,}000056\,\theta\,,$$

$$c_{110,\,\theta}\left(\frac{H_2O}{N_2}\right) = 1{,}725 + 0{,}000210\,\theta$$

berechneten Werten aufgeführt worden.

Einfluß, den die Lage der Lötstelle des Thermoelementes ausübt. Um zu absoluten Werten der spezifischen Wärme zu gelangen, wurden alle bei nahezu gleichen Temperaturen und unter sonst gleichen Umständen angestellten Beobachtungen gemittelt und mit angenäherten Temperaturkoeffizienten auf runde Temperaturen reduziert. Tab. 5 enthält die so gewonnenen Mittelwerte nebst ihren Gewichten. Sie zeigt, daß die Werte für die spezifische Wärme innerhalb der Genauigkeit der Beobachtung von der Lage der Lötstelle unabhängig sind, wenn man in dem Gebiet zwischen 10 und 20 mm über der Blende bleibt. Bei höheren Lagen scheinen die Werte etwas kleiner zu werden; wahrscheinlich wird hier also ein zu hoher Wert für die Temperatur beobachtet. Damit steht

Tabelle 4.

Verhältnis der spezifischen Wärmen verschiedener Gase.

Datum 1907	Element: Dicke	Element: Höhe über d. Blende	Element: Gewicht γ	θ	$c_{110,\theta}\left(\frac{CO_2}{N_2}\right)$: beob.	ber.	ber.-beob. %
	mm	mm					
1. 3.	1/4	12	14	848°	1,006	1,013	+0,7
2. 3.	1/4	12	14	841	1,002	1,013	+1,1
20. 3.	1/10	12	3	842	0,997	1,013	+1,6
26. 3.	1/10	10	14	868	1,021	1,015	−0,6
27. 3.	1/10	10	13	827	1,009	1,012	+0,3
13. 2.	1/4	12	10	1000	1,035	1,022	−1,3
15. 2.	1/4	12	12	1004	1,029	1,022	−0,7
21. 2.	1/4	12	12	1024	1,025	1,023	−0,2
22. 2.	1/4	12	10	1023	1,023	1,023	0,0
8. 3.	1/4	38	8	1048	1,016	1,025	+0,9
15. 3.	1/10	44	11	996	1,010	1,022	+1,2
16. 3.	1/10	20	11	1004	1,034	1,022	−1,2
19. 3.	1/10	12	11	1021	1,018	1,023	+0,5
4. 4.	1/10	10	13	1200	1,033	1,033	0,0
5. 4.	1/10	10	13	1200	1,041	1,033	−0,8
17. 4.	1/50	10	15	1169	1,036	1,031	−0,5
19. 4.	1/50	20	11	1152	1,050	1,031	−1,9
31. 5.	1/4	10	8	1439	1,028	1,047	+1,9
5. 6	1/10	10	17	1333	1,028	1,041	+1,3
7. 6.	1/10	10	16	1293	1,041	1,038	−0,8
8. 6.	1/10	15	14	1343	1,033	1,041	+0,8

Datum 1907	Element: Dicke	Element: Höhe über d. Blende	Element: Gewicht γ	θ	$c_{110,\theta}\left(\frac{H_2O}{N_2}\right)$: beob.	ber.	beob.-ber. %
	mm	mm					
7. 5.	1/10	10	14	836°	1,884	1,901	+3,5
18. 5.	1/10	10	10	832	1,933	1,900	−1,7
24. 5.	1/10	10	12	818	1,901	1,897	−0,2
20. 4.	1/50	20	14	799	1,950	1,893	−3,0
28. 4.	1/50	20	14	845	1,896	1,902	+0,3
6. 5.	1/10	10	13	1187	1,940	1,974	+1,7
15. 5.	1/10	10	11	1183	1,965	1,973	+0,4
23. 5.	1/10	10	12	1177	1,992	1,972	−1,0
31. 5.	1/4	10	8	1417	2,013	2,023	+0,5
5. 6.	1/10	10	6	1303	1,978	1,999	+1,1
7. 6.	1/10	10	6	1253	2,015	1,988	−1,4
13. 6.	1/10	10	14	1320	2,017	2,002	−0,7
14. 6.	1/10	10	14	1328	2,009	2,004	−0,2

Tabelle 5.

Einfluß der Lage der Lötstelle vom Thermoelement.

Dicke des Elementes	Stickstoff			Kohlensäure			Wasserdampf	
	1/4 mm	1/10 mm	1/50 mm	1/4 mm	1/10 mm	1/50 mm	1/10 mm	1/50 mm
Lage über der Blende				$\theta = 840°$				
10 mm		0,2531 (63)	0,2535 (15)		0,2544 (27)		0,4837 (88)	0,4738 (17)
12	0,2607 (28)	0,2599 (10)		0,2616 (29)	0,2589 (3)			
20			0,2525 (28)					0,4870 (40)
				$\theta = 1010°$				
12	0,2677 (51)	0,2657 (12)		0,2741 (71)	0,2703 (11)			
20		0,2616 (11)			0,2705 (11)			
28				0,2643 (12)				
38	0,2577 (20)			0,2618 (12)				
44		0,2610 (11)			0,2639 (11)			
76				0,2504 (11)				
				$\theta = 1180°$				
10		0,2633 (64)	0,2598 (27)		0,2758 (40)	0,2700 (27)	0,5089 (110)	
15								
20			0,2560 (29)			0,2709 (11)		
				$\theta = 1360°$				
10		0,2644 (61)			0,2713 (70)		0,5306 (87)	
15		0,2731 (14)			0,2824 (15)			
20		0,2644 (14)						

in Übereinstimmung, daß die Mitte des Heizrohres vor Eintritt der Gase heißer ist als das untere Ende.

Der weiteren Berechnung wurden alle Werte für die spezifische Wärme zugrunde gelegt, bei deren Beobachtung die Lötstelle zwischen 10 und 20 mm über der Blende gelegen hat.

Einfluß der Dicke des Thermoelementes. Der Einfluß, den die Drahtdicke des Thermoelementes auf den Wert der spezifischen Wärme ausübt, ist besonders bei Stickstoff geprüft worden. Das Ergebnis ist aus Tab. 6 zu entnehmen, die aus Tab. 5 abgeleitet wurde, indem für jede Drahtdicke Mittelwerte gebildet worden sind. Für Kohlensäure und Wasserdampf wurden mit dem Element, dessen Drähte $^1/_{50}$ mm Dicke besitzen, nur wenige Beobachtungen angestellt. Hier können aber weitere Werte aus den oben angegebenen Zahlen für das Verhältnis zu der spezifischen Wärme des Stickstoffs abgeleitet werden, da dieses von der Drahtdicke unabhängig ist. Die auf diese Weise gewonnenen Werte sind mit *V* bezeichnet. Ist mit einem von ihnen eine durch direkte Beobachtung erhaltene Zahl kombiniert, so steht das Gewicht dieser Beobachtung neben *V*.

Es ist ohne weiteres einzusehen, daß die geringste Drahtdicke den richtigsten Wert liefern muß, da hier die Wärmeabgabe der Lötstelle durch Strahlung im Verhältnis zu der durch Leitung zugeführten Wärme am geringsten ist. Das Element mit $^1/_4$ mm dicken Schenkeln liefert zu große Werte für die spezifische Wärme, weil die Temperatur damit zu niedrig gemessen wird. Der Unterschied zwischen den Drähten von $^1/_{10}$ und $^1/_{50}$ mm ist schon nicht mehr groß. Im Mittel erhält man die spezifische Wärme mit dem dünnsten Element bei 840° um 0,1 Proz. und bei 1180° um 1,6 Proz. kleiner als mit Drähten von 0,1 mm Durchmesser. Hiernach ergibt sich im Mittel für etwa 1000° ein Unterschied von 0,8 Proz., auf den wenig ankommt, da er an die Fehlergrenze heranreicht.

Ergebnisse. Tab. 7 enthält alle Beobachtungen, die mit den Elementen von $^1/_{50}$ und $^1/_{10}$ mm Dicke angestellt worden sind. Letztere sind auf ein Element von $^1/_{50}$ mm Durchmesser reduziert, indem die spezifische Wärme bei 800, 1000, 1200 und 1360° bez. um 0,6, 0,8, 1,0 und 1,2 Proz. verkleinert

Tabelle 6.

Einfluß der Dicke des Thermoelementes.

Dicke des Elementes in mm	Stickstoff			Kohlensäure			Wasserdampf	
	$^1/_4$	$^1/_{10}$	$^1/_{50}$	$^1/_4$	$^1/_{10}$	$^1/_{50}$	$^1/_{10}$	$^1/_{50}$
$\theta = 840°$	0,2607 (28)	0,2540 (73)	0,2529 (43)	0,2616 (29)	0,2549 (30)	0,2560 (V)	0,4837 (88)	0,4820 (57, V)
1010	0,2677 (51)	0,2637 (23)	—	0,2741 (71)	0,2704 (22)	—	—	—
1180	—	0,2633 (64)	0,2578 (56)	—	0,2753 (40)	0,2684 (38, V)	0,5089 (110)	0,5086 (V)
1360	—	0,2646 (89)	—	—	0,2733 (85)	—	0,5306 (87)	—

Tabelle 7.

Ergebnisse für die mittlere spezifische Wärme $c_{110,\theta}$.

Element	Stickstoff		Element	Kohlensäure		Element	Wasserdampf	
	$^1/_{50}$ mm	$^1/_{10}$ mm reduz. auf $^1/_{50}$ mm		$^1/_{50}$ mm	$^1/_{10}$ mm reduz. auf $^1/_{50}$ mm		$^1/_{50}$ mm	$^1/_{10}$ mm reduz. auf $^1/_{50}$ mm
$\theta = 837°$	—	0,2525 (36)	$\theta = 847°$	—	0,2536 (15)	$\theta = 831°$	0,4824 (57)	—
849	0,2530 (43)	—	1013	—	0,2683 (11)	888		0,4806 (44)
1000	—	0,2606 (17)	1169	0,2702 (38)	—	1133		0,5040 (55)
1177	0,2578 (56)	—	1198		0,2732 (20)	1327		0,5209 (43)
1187		0,2608 (32)	1364		0,2701 (42)			
1347		0,2624 (44)						

worden sind. Die Beobachtungen mit dem $^1/_4$ mm dicken Element blieben hier weg.

Formeln. Für die Berechnung der Beziehung, die zwischen der spezifischen Wärme und der Temperatur besteht, sind die früher bis 800° gewonnenen Werte (A) hinzugezogen worden. Die früher für diese Temperatur erhaltenen Zahlen, die mit einem anderen Apparat und unter anderen Bedingungen für die Temperaturmessung beobachtet wurden, sind in guter Übereinstimmung mit den neuen Werten. Der Vergleichbarkeit halber sind bei Stickstoff und Kohlensäure die neuen Werte $c_{110,\theta}$ auf $c_{20,\theta}$ umgerechnet.

Nachdem eine Formel für Stickstoff aufgestellt war, konnte man mittels der oben angegebenen Verhältnisse (p. 837) noch Werte für die spezifische Wärme von Kohlensäure und Wasserdampf ableiten. Sie sind wieder mit V bezeichnet.

Die folgenden Formeln für die mittlere spezifische Wärme sind in der Weise gewonnen, daß durch graphische Interpolation Normalwerte gebildet und der Rechnung zugrunde gelegt wurden.

Stickstoff: $c_{20,\theta} = 0{,}2354 + 0{,}000019\,\theta$

Kohlensäure: $c_{20,\theta} = 0{,}2025 + 0{,}0000738\,\theta - 0{,}000000018\,\theta^2$

Wasserdampf I: $c_{110,\theta} = 0{,}4668 - 0{,}0000164\,\theta + 0{,}000000044\,\theta^2$

„ II: $c_{110,\theta} = 0{,}4544 + 0{,}006925 \cdot 10^{0{,}0007513\,\theta}$

oder:

Stickstoff: $c_{0,\theta} = 0{,}2350 + 0{,}000019\,\theta$

Kohlensäure: $c_{0,\theta} = 0{,}2010 + 0{,}0000742\,\theta - 0{,}000000018\,\theta^2$

Wasserdampf I: $c_{100,\theta} = 0{,}4669 - 0{,}0000168\,\theta + 0{,}000000044\,\theta^2$

„ II: $c_{100,\theta} = 0{,}4544 + 0{,}006925 \cdot 10^{0{,}0007518\,\theta}$

Tab. 8 enthält die beobachteten Werte für die mittlere spezifische Wärme, denen die berechneten gegenübergestellt sind. In Fig. 2 sind beide aufgetragen. Endlich gibt Tab. 9 die mittlere spezifische Wärme für runde Werte der Temperatur nebst den für die wahre Wärme folgenden Zahlen c_w.

Die Änderung, welche die mittlere spezifische Wärme des Stickstoffs mit steigender Temperatur erfährt, ist gering und konnte deshalb früher nur ungenau bestimmt werden. Nachdem nun die Beobachtungen für ein größeres Temperatur-

Tabelle 8. **Mittlere spezifische Wärme.**

Stickstoff $c_{20,\theta}$				Kohlensäure $c_{20,\theta}$				Wasserdampf $c_{110,\theta}$					
θ	beob.	ber.	ber.-beob. %	θ	beob.	ber.	ber.-beob. %	θ	beob.	ber. Formel I	ber.-beob. %	ber. Formel II	ber.-beob. %
200°	0,2400 (*A*)	0,2392	−0,3	200°	0,2168 (*A*)	0,2166	−0,1	270°	0,4639 (*A*)	0,4656	+0,4	0,4654	+0,3
440	0,2419 (*A*)	0,2438	+0,8	440	0,2306 (*A*)	0,2315	+0,4	440	0,4713 (*A*)	0,4681	−0,7	0,4692	−0,4
630	0,2464 (*A*)	0,2474	+0,4	630	0,2423 (*A*)	0,2419	−0,2	620	0,4717 (*A*)	0,4735	+0,4	0,4746	+0,6
800	0,2497 (*A*)	0,2506	+0,4	800	0,2486 (*A*)	0,2500	+0,6	800	0,4777 (*V*)	0,4819	+1,0	0,4820	+0,9
844	0,2511 (79)	0,2514	+0,1	800	0,2501 (*V*)	0,2500	0,0	820	0,4881 (*A*)	0,4830	−1,1	0,4830	−1,1
1000	0,2585 (17)	0,2544	−1,6	847	0,2491 (15)	0,2521	+1,2	834	0,4816 (101)	0,4837	+0,4	0,4837	+0,4
1181	0,2575 (88)	0,2578	+0,1	1000	0,2572 (*V*)	0,2583	+0,4	1000	0,4956 (*V*)	0,4944	−0,2	0,4935	−0,4
1347	0,2607 (44)	0,2610	+0,1	1013	0,2632 (11)	0,2588	−1,7	1183	0,5040 (55)	0,5090	+1,0	0,5080	+0,8
				1179	0,2666 (58)	0,2645	−0,8	1200	0,5138 (*V*)	0,5105	−0,6	0,5096	−0,8
				1200	0,2642 (*V*)	0,2652	+0,4	1327	0,5209 (43)	0,5224	+0,3	0,5232	+0,4
				1350	0,2695 (*V*)	0,2693	−0,1	1350	0,5278 (*V*)	0,5249	−0,6	0,5258	−0,4
				1364	0,2662 (42)	0,2697	+1,3						

Tabelle 9. **Mittlere und wahre spezifische Wärme.**

θ	Stickstoff		Kohlensäure		Wasserdampf			
					Formel I		Formel II	
	$c_{0,\theta}$	c_w	$c_{0,\theta}$	c_w	$c_{100,\theta}$	c_w	$c_{100,\theta}$	c_w
[0]°	0,2350	0,235	0,2010	0,201	0,4669	0,469	0,4613	0,460
200	0,2388	0,243	0,2151	0,229	0,4653	0,465	0,4642	0,466
400	0,2426	0,250	0,2278	0,252	0,4672	0,473	0,4682	0,475
600	0,2464	0,258	0,2390	0,271	0,4726	0,491	0,4740	0,491
800	0,2502	0,265	0,2491	0,285	0,4817	0,519	0,4820	0,515
1000	0,2540	0,273	0,2572	0,295	0,4941	0,558	0,4935	0,554

intervall vorliegen, ist eine Änderung mit Sicherheit zu konstatieren. Es scheint fast, als ob diese bei niedriger Temperatur langsamer erfolgt; doch reicht die Genauigkeit der Werte nicht hin, um hierüber eine Entscheidung zu treffen.

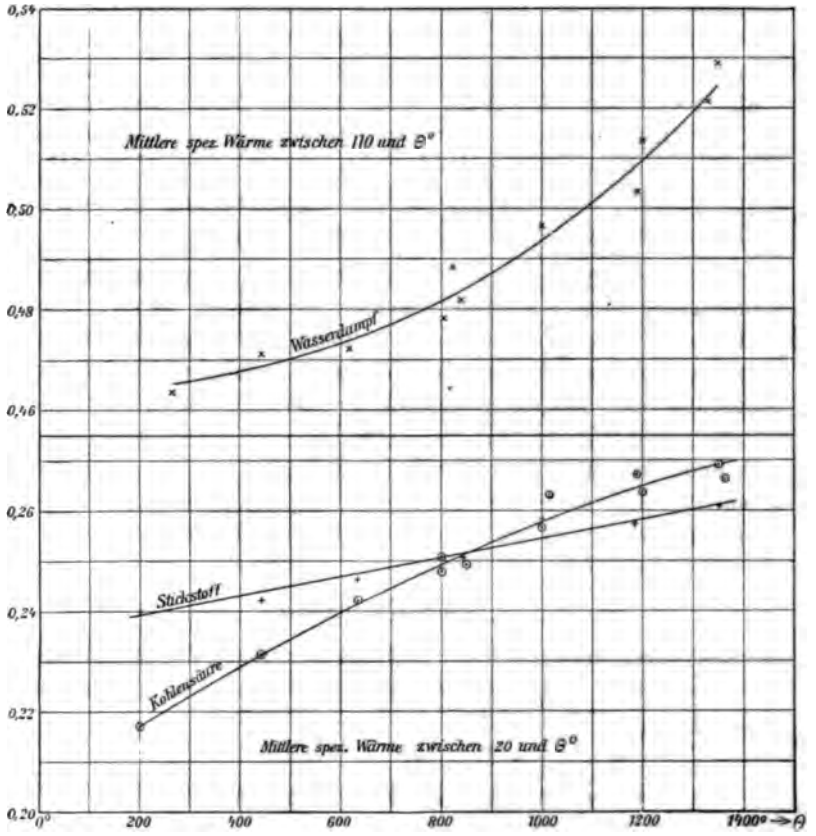


Fig. 2.

Wir begnügen uns deshalb damit, für die Abhängigkeit der mittleren spezifischen Wärme des Stickstoffs von der Temperatur eine lineare Beziehung aufzustellen.

Die Formel für Kohlensäure, wie sie jetzt aus dem ganzen beobachteten Temperaturgebiet berechnet wurde, unterscheidet sich kaum merklich von der früher gegebenen, die die Beobachtungen bis 800° darstellte.

Bei Wasserdampf dagegen, der früher nur in einem Gebiete beobachtet wurde, wo die Änderung klein ist, mußten wir die Formel ändern, wenn wir auch den Beobachtungen über 800° gerecht werden wollen. Es sind jetzt zwei Gleichungen (I und II) berechnet, die beide die Beobachtungen gleich gut darstellen. Die quadratische gibt für $c_{100,\theta}$ ein Minimum bei 190°, das nach der Exponentialformel natürlich nicht vorhanden ist. Auch sonst würden beide Gleichungen bei der Extrapolation zu verschiedenen Ergebnissen führen. Genau genommen unterscheidet sich $c_{110,\theta}$ von $c_{100,\theta}$ nach der Exponentialformel noch um ein Glied, das jedoch wegen seines geringen Betrages vernachlässigt werden kann.

Vergleich mit den Explosionsversuchen. Da unsere Bestimmungen jetzt bis 1400° reichen, so sind wir damit in das Gebiet der Explosionsversuche gelangt, die schon bei 1300° beginnen. Was zunächst den Stickstoff anbelangt, so ist die Änderung der mittleren spezifischen Wärme mit der Temperatur, die wir finden, in befriedigender Übereinstimmung mit dem von Mallard und Le Chatelier angegebenen Resultat, das auch mit Langens Explosionsversuchen harmoniert. Hiernach gilt für die mittlere Molekularwärme C_v der einfachen Gase bei konstantem Volumen

$$C_v = 4{,}8 + 0{,}0006\,\theta,$$

woraus unter der Annahme, daß die Beziehung der Molekularwärmen C und C_v bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen

$$C - C_v = 1{,}985$$

besteht, für die mittlere spezifische Wärme des Stickstoffs bei konstantem Druck

$$c_{0,\theta} = 0{,}242 + 0{,}000021\,\theta$$

folgen würde.

Für Kohlensäure und Wasserdampf ergeben die Explosionsversuche verschiedener Forscher keine übereinstimmenden Ergebnisse. Wir wollen mit den unsrigen die Werte Langens[1] vergleichen, die kleiner sind als die von Mallard und

1) A. Langen, Forschungsarbeiten, herausg. vom Verein Deutscher Ingenieure, Heft 8. p. 1. 1903.

Le Chatelier. Nach der Berechnung von Schreber[1]) folgt aus Langens Beobachtungen für die mittlere Molekularwärme bei konstantem Volumen zwischen Zimmertemperatur und 1500 oder 1700°

	Kohlensäure	Wasserdampf
1500°	10,45	9,88
1700	11,20	8,83
Mittel:	10,83	9,36

Das Mittel, das für 1600° gelten würde, gibt danach für die mittlere spezifische Wärme $c_{20,1600}$ bei konstantem Druck die Werte 0,291 und 0,630 für Kohlensäure bez. Wasserdampf. Wie ein Vergleich mit Tab. 9 lehrt, sind diese Werte um 6 bez. 12 Proz. größer als unsere Beobachtungen erwarten lassen.

1) K. Schreber, Dinglers polytechn. Journ. 318. p. 433. 1903.

(Eingegangen 26. Juli 1907.)

2. Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie; von J. Zenneck.

A. Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche.[1]

Die Frage, wie sich ebene elektromagnetische Wellen längs der ebenen Oberfläche eines im übrigen unbegrenzten Leiters fortpflanzen, ist in zwei Spezialfällen behandelt worden. Die erste Bearbeitung der Frage, die ich kenne, findet sich bei E. Cohn[2]); sie bezieht sich auf den Fall, daß der Leiter die elektrischen Eigenschaften eines Metalles hat. Im Anschluß an Cohn hat dann K. Uller[3]) sich mit dem zweiten Spezialfall beschäftigt, wenn der Leiter durch eine gut leitende Flüssigkeit, z. B. Seewasser, gebildet wird.

Über den Fall, daß der Leiter ein beliebiges, unter Umständen sehr viel schlechteres Leitvermögen besitzt als z. B. Seewasser, hat Uller am Schluß seiner Abhandlung schon allgemeine Betrachtungen angestellt.[4]) Aus Gründen, die sich

1) Die Bezeichnungen im folgenden sind:
E = elektrische Feldintensität,
M = magnetische „
ε = Dielektrizitätskonstante,
μ = Permeabilität,
σ = Leitvermögen,
$\nu = \pi \times$ Wechselzahl,
$\imath = \sqrt{-1}$.
v = universelle Konstante $= \frac{1}{4\pi}$ im C.G.S.-System.
Größen ohne Index beziehen sich auf den Leiter, mit Index 0 auf Luft.

2) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 449 ff. Leipzig 1900.

3) K. Uller, Beiträge zur Theorie der elektromagnet. Strahlung. Diss. Rostock 1903.

4) l. c. p. 66: „*Süßwasser* hat eine geringere Leitfähigkeit ($\lambda_2 \sim 10^9$)... Sieht man daraufhin die Feldgleichungen (93) und die Gleichung (96) für die Strahlung an, so ergibt sich: das M-Feld und besonders das

später ergeben werden, erschien es mir wünschenswert, von dem elektromagnetischen Feld gerade in diesem Falle ein klares Bild zu bekommen, aus dem nicht nur der Einfluß des Leitvermögens des Leiters, sondern auch derjenige seiner Dielektrizitätskonstanten, außerdem der Einfluß eines Leitvermögens der Luft hervorgehen sollte.

Die Durchrechnung bietet gegenüber dem von Cohn und Uller behandelten Falle durchaus nichts Bemerkenswertes. Ich gebe im folgenden Gang und Resultate der Rechnung.

1. Die Ausgangsgleichungen.

Die Lage der X- und Z-Achse des Rechtskoordinatensystems, welches der Rechnung zugrunde gelegt wird, ist aus Fig. 1 ersichtlich, in welcher die schraffierte Fläche einen Durchschnitt durch den Leiter bedeutet. Die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle (gefiederter Pfeil in Fig. 1) falle mit der X-Achse zusammen. Die Richtung der Y-Achse sei diejenige des magnetischen Feldes. Diese Voraussetzungen haben zur Folge, daß

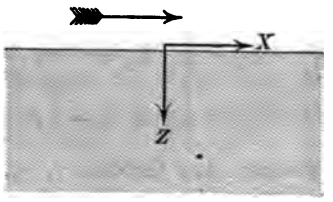


Fig. 1.

$$E_y = M_x = M_z = 0 \tag{1}$$

wird und die übrigen Komponenten der Feldstärke mit einem Faktor

$$F = e^{i(\nu t + sx)} \tag{1a}$$

behaftet erscheinen.

E-Feld werden im *Wasser viel größer*, das im Isolator viel kleiner. Die E-Linien sind im Isolator wie auch im Wasser mehr geneigt. Der Prozentsatz der ins Wasser übergehenden Strahlung steigt auf etwa 5 Proz.

Gestein ist nicht metallisch leitend, sondern leitend im Sinne eines Elektrolyten. Unter diesem Gesichtspunkt ist es nicht schwer, aus den Gleichungen (91) die Modifikation, die eine horizontal-polarisierte Welle in Luft durch die Gegenwart des Erdbodens erfährt, in beiden Medien für die Nähe der ebenen Erdoberfläche aufzufinden. Indessen können wir uns die Rechnung ersparen, da die Werte der s und λ schwanken. So viel aber läßt sich sagen: der Erdboden absorbiert im Vergleich zu Seewasser einen bedeutend größeren Prozentsatz der Energie der in Luft vorbeiwandernden Welle."

Die Maxwellschen Gleichungen lauten dann:

$$(\sigma + \imath \nu \varepsilon) E_x = - v \cdot \imath s M_y ,$$
$$(\sigma + \imath \nu \varepsilon) E_z = v \cdot \frac{\partial M_y}{\partial z} ,$$
$$\imath \nu \mu M_y = v \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \imath s E_x \right) .$$

Ihre Lösung ist in *Luft* von der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} M_{0y} = a_0 e^{-\imath r_0 z} \cdot F , \\ E_{0x} = - \imath r_0 \cdot \frac{v}{\sigma_0 + \imath \nu \varepsilon_0} \cdot a_0 e^{-\imath r_0 z} F , \\ E_{0z} = - \imath s \cdot \frac{v}{\sigma_0 + \imath \nu \varepsilon_0} \cdot a_0 e^{-\imath r_0 z} F . \end{cases}$$

im *Leiter*

$$(3) \quad \begin{cases} M_y = a e^{+\imath r z} \cdot F , \\ E_x = \imath r \cdot \frac{v}{\sigma + \imath \nu \varepsilon} \cdot a e^{+\imath r z} \cdot F , \\ E_z = - \imath s \cdot \frac{v}{\sigma + \imath \nu \varepsilon} \cdot a e^{+\imath r z} \cdot F . \end{cases}$$

Zwischen den Größen r, r_0, s bestehen die Beziehungen

$$(4) \quad r_0^2 + s^2 = - \frac{\imath \nu \mu \cdot (\sigma_0 + \imath \nu \varepsilon_0)}{v^2} ,$$

$$(5) \quad r^2 + s^2 = - \frac{\imath \nu \mu \cdot (\sigma + \imath \nu \varepsilon)}{v^2} .$$

Die Grenzbedingungen liefern:

$$a = a_0 ,$$
$$(6) \quad \frac{r_0}{\sigma_0 + \imath \nu \varepsilon_0} = - \frac{r}{\sigma + \imath \nu \varepsilon} .$$

Aus den Gleichungen (4), (5) und (6) folgt:

$$(7) \quad \begin{cases} s = - \sqrt{- \imath \alpha \cdot \frac{(1 + \imath q)(\beta + \imath q_0)}{(1 + \imath q) + (\beta + \imath q_0)}} , \\ r_0 = + \sqrt{- \imath \alpha \cdot \frac{(1 + \imath q)^2}{(1 + \imath q) + (\beta + \imath q_0)}} , \\ r = - \sqrt{- \imath \alpha \cdot \frac{(\beta + \imath q_0)^2}{(1 + \imath q) + (\beta + \imath q_0)}} , \end{cases}$$

wenn man die Abkürzungen

$$\alpha = \frac{\sigma \mu \nu}{v^2} , \quad q_0 = \frac{\nu \varepsilon_0}{\sigma} ,$$
$$\beta = \frac{\sigma_0}{\sigma} , \quad q = \frac{\nu \varepsilon}{\sigma}$$

benützt.

2. Voraussetzungen der Zahlenrechnung.

Als *Wechselzahl* der Schwingung ist im folgenden 10^6/sec ($\nu = \pi \cdot 10^6$/sec) entsprechend einer Wellenlänge in Luft von ca. 600 m angenommen.[1]) In welcher Weise die Kurven oder Zahlenangaben für andere Wechselzahlen benutzt werden können, ist jedesmal angegeben.

Für das *Leitvermögen* des Leiters wurden die verschiedensten Werte zwischen $\sigma = 10^{-9}$ und $\sigma = 10^{-17}$ C.G.S.[2]) der Rechnung zugrunde gelegt. $0{,}6 \cdot 10^{-10}$ C.G.S. ist ungefähr das Leitvermögen einer wässerigen 5 proz. NaCl-Lösung, 10^{-17} ungefähr dasjenige von ganz trockenem Sand.

Der Einfluß des Leitvermögens der Luft ist in § 11 besonders besprochen; im übrigen ist das Leitvermögen der Luft als unmerklich angenommen ($\beta = 0$).

Als *Dielektrizitätskonstante* des Leiters wurden die verschiedensten Werte zwischen derjenigen der Luft und derjenigen für Wasser genommen. $k = \varepsilon/\varepsilon_0 = q/q_0$ variiert also zwischen 1 und 80.

3. Die Richtung des elektrischen Feldes.[3])

a) Die Gleichungen (2) und (7) ergeben für *Luft*:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{E_{0x}}{E_{0z}} = \dfrac{r_0}{s} = -\sqrt{\dfrac{\imath\, q_0}{1+\imath\, q}} = -\sqrt{\dfrac{q_0}{\sqrt{1+q^2}}}\cdot e^{\imath\varphi_0}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \dfrac{1}{q}. \end{cases}$$

(2φ im ersten Quadranten.)

In den Kurven von Fig. 2 sind die Werte für

$$\left|\frac{E_{0x}}{E_{0z}}\right| = \sqrt{\frac{q_0}{\sqrt{1+q^2}}}$$

(ausgezogene Kurven) und für den Phasenwinkel φ_0 (gestrichelte Kurven) dargestellt.

---

1) Die in Deutschland gesetzlich (Amtsblatt des Reichspostamts vom 30. März 1905) festgelegte Wellenlänge für Küstenstationen ist 365 m. Die Wellenlänge der Station Nauen der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie beträgt ca. 2000 m. Diejenige der Poldhu-Station der Marconigesellschaft ist noch etwas größer.

2) Leitvermögen des Quecksilbers = $1{,}063 \cdot 10^{-5}$ C.G.S.

3) Zur Diskussion der Verhältnisse nach anderen Gesichtspunkten vgl. E. Cohn, l. c.; A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 277 ff. 1899.

b) Für den *Leiter* folgt aus den Gleichungen (3) und (7):

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{E_x}{E_z} = -\dfrac{r}{s} = -\sqrt{\dfrac{\iota(1+\iota q)}{q_0}} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+q^2}}{q_0}}\cdot e^{-\iota\varphi}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi = -\dfrac{1}{q}, \end{cases}$$

(2φ im zweiten Quadranten), d. h. es ist:

$$\varphi = 90^0 - \varphi_0,$$

$$\left|\frac{E_x}{E_z}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{E_{0x}}{E_{0z}}\right|}.$$

Es können demnach aus den Kurven von Fig. 2 auch die Verhältnisse im Leiter entnommen werden.

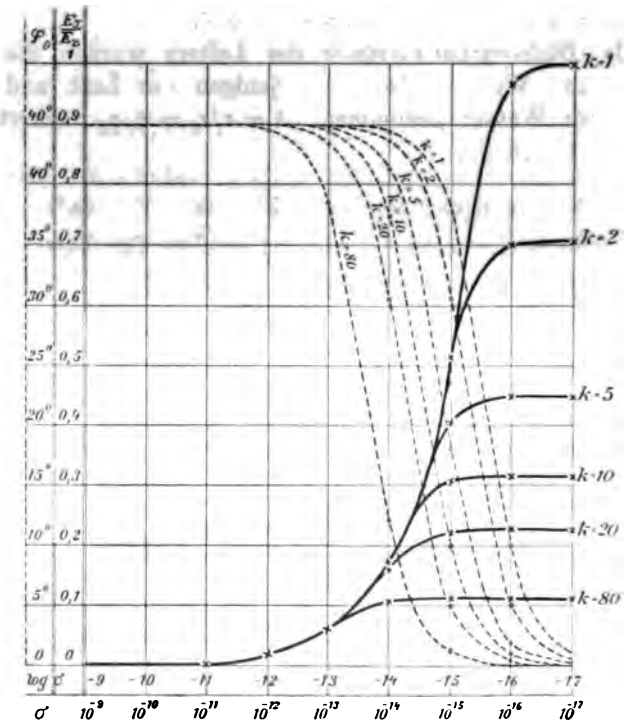


Fig. 2.

Sollen die Kurven für andere Wechselzahlen benutzt werden, so ergibt sich aus der Tatsache, daß in den Gleichungen (8)

und (9) nur die Größe q und q_0, d. h. nur das Verhältnis ν/σ vorkommt, die folgende Regel: Man erhält die Werte für die Wechselzahl $a \cdot 10^6$/sec und das Leitvermögen σ, indem man in Fig. 2 die Kurvenpunkte aufsucht, welche dem Leitvermögen σ/a entsprechen. Größere Wechselzahl wirkt also wie geringeres Leitvermögen.

c) Überblickt man die Kurven von Fig. 2, so sieht man, daß sowohl in Luft als im Leiter kein reines Wechselfeld vorhanden ist. Es kommt stets zu dem Wechselfeld eine mehr oder weniger große Drehfeldkomponente hinzu.

Man bekommt in bekannter Weise ein anschauliches Bild des Feldes, wenn man die resultierende Feldintensität durch einen Vektor darstellt. Die Endpunkte des Vektors während einer Periode liegen dann auf einer Ellipse mit der Eigenschaft (Fig. 3), daß

$$\frac{OB}{OA} = \left|\frac{E_x}{E_z}\right|,$$

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \sin\varphi$$

ist.

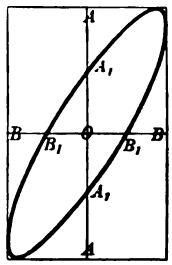


Fig. 3.

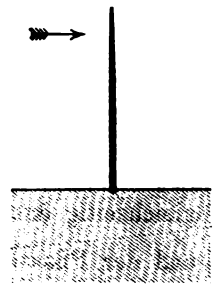


Fig. 4.

Für das Folgende interessiert hauptsächlich das Feld in unmittelbarer Nähe der Leiteroberfläche. Zeichnet man sowohl für Luft als für den Leiter nur die Hälfte der Ellipsen, so nehmen die typischen Fälle, die man bekommen kann, die folgende Form an

1. $\left|\frac{E_x}{E_z}\right|$ sehr klein gegen 1 (Fig. 4).

Das elektrische Feld in Luft und Leiter ist praktisch gesprochen ein reines Wechselfeld. Die Intensitätslinien ver-

laufen in Luft nahezu senkrecht, im Leiter nahezu parallel der Leiteroberfläche. Nach Fig. 2 ist dieser Fall realisiert, wenn der Leiter ein Leitvermögen besitzt, das nicht viel unter 10^{-12} bis 10^{-13} C.G.S. liegt. Die Dielektrizitätskonstante des Leiters ist dabei gleichgültig. Körper mit großer Dielektrizitätskonstante (80) entfernen sich von diesem Fall niemals sehr weit, wie gering auch ihr Leitvermögen sein mag.

2. $\left|\frac{E_x}{E_z}\right|$ nicht sehr klein; der Phasenwinkel φ_0 sehr klein (Fig. 5).

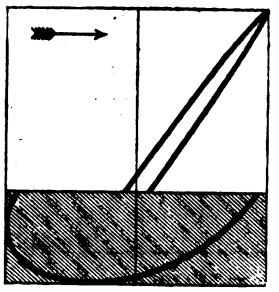


Fig. 5.

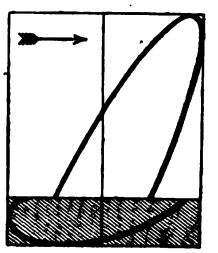


Fig. 6.

In Luft ist ein nahezu reines Wechselfeld vorhanden, dessen Richtung eine starke Neigung gegen die Normale zur Leiteroberfläche besitzt. Im Leiter ist die Drehfeldkomponente sehr bedeutend. Nach Fig. 2 kann dieser Fall eintreten bei kleiner Dielektrizitätskonstante; er ist um so besser realisiert, je schlechter gleichzeitig das Leitvermögen ist.

3. $\left|\frac{E_x}{E_z}\right|$ und der Phasenwinkel φ_0 nicht sehr klein (Fig. 6).

Auch in Luft tritt eine nicht unbeträchtliche Drehfeldkomponente auf. Die große Achse der Ellipse ist mehr oder weniger stark gegen die Normale zur Leiteroberfläche geneigt. Die Bedingung für diesen Fall ist ziemlich kleine Dielektrizitätskonstante und ein Leitvermögen des Leiters, das — bei der angenommenen Wechselzahl — nicht sehr weit von 10^{-15} C.G.S. entfernt ist.

4. Die Absorption der Wellen in der Fortpflanzungsrichtung.

a) Die Absorption der Wellen in der Richtung, in der sie sich längs der Leiteroberfläche ausbreiten (Richtung der

positiven X-Achse), bestimmt sich durch den Wert von s. Bringt man s auf die Form

$$s = -(A - \imath B), \tag{10}$$

so ist $1/B$ die Entfernung, welche die Amplitude der Welle auf $1/e$ reduziert. Diese Entfernung $1/B$ in Kilometern in ihrer Abhängigkeit von Leitvermögen und Dielektrizitätskonstante des Leiters bringt Fig. 7 zur Darstellung. Die Ordinaten der Kurven sind dem gemeinen Logarithmus von $1/B$ km proportional.

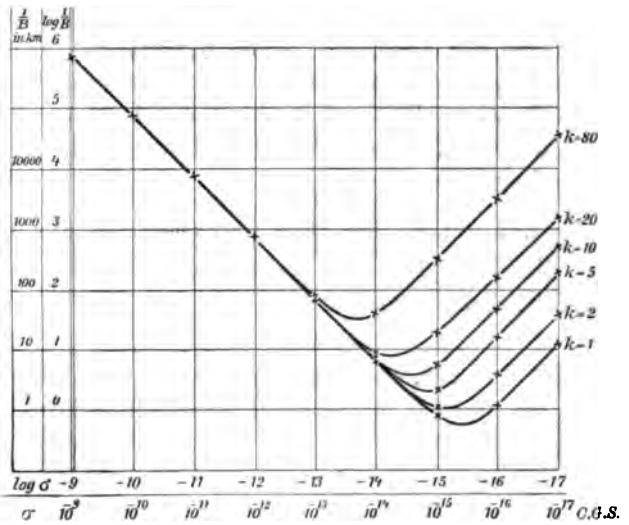


Fig. 7.

b) Die Kurven zeigen, daß bei vorgegebener Dielektrizitätskonstanten *die Entfernung* $1/B$ *ein Minimum, d. h. die Absorption ein Maximum wird für ein ganz bestimmtes Leitvermögen.* Wird das Leitvermögen noch schlechter, so wird die Absorption wieder geringer. Da die Absorption einerseits bei einem unendlich großen Leitvermögen, andererseits bei einem unendlich kleinen verschwindet, so bietet das Vorhandensein eines solchen ausgezeichneten Wertes des Leitvermögens nichts Auffallendes.

c) Sehr klar tritt aus den Kurven zutage der große Einfluß der *Dielektrizitätskonstante* des Leiters. *Sie ist für die Größe der Absorption mindestens ebenso entscheidend wie das*

Leitvermögen. Während bei der Dielektrizitätskonstante des Wassers ($k = 80$) die Entfernung, welche die Amplitude auf $1/e$ ihres Wertes herabdrückt, nicht unter 400 km heruntersinkt, fällt sie bei $k = 2$ auf etwa 1 km, bei $k = 5$ auf etwa 2 km.

d) Für die Abhängigkeit der Absorption von der *Wechselzahl* ergibt Gleichung (7) folgende Regel: die Entfernung $1/B$ für die Wechselzahl $a \cdot 10^6$/sec, das Leitvermögen σ und die Dielektrizitätskonstante k bekommt man, wenn man in den Kurven den Wert von $1/B$ für die Dielektrizitätskonstante k und das Leitvermögen σ/a aufsucht und diesen Wert mit a **dividiert. Die Wechselzahl der Schwingung besitzt demnach auf die Stärke der Absorption einen bedeutenden Einfluß bis herab zu demjenigen Leitvermögen, für welches die Absorption** ein Maximum wird. Bei noch schlechterem **Leitvermögen** verschwindet der Einfluß der Wechselzahl um so **mehr, je** geringer das Leitvermögen ist.

5. Absorption der Wellen beim Eindringen in den Leiter.

Für die Absorption der Wellen beim Eindringen in den Leiter ist der imaginäre Teil von

$$r = C + \imath D$$

maßgebend. Der gemeine Logarithmus von $1/D$ (Zentimeter), der Tiefe, in welcher die Amplitude auf $1/e$ ihres Wertes

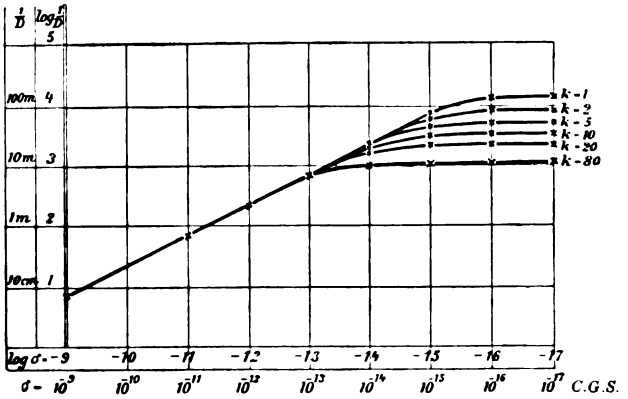


Fig. 8.

an der Leiteroberfläche herabgesunken ist, ist in Fig. 8 angegeben.

Bis herab zu einem Leitvermögen von 10^{-13} C.G.S. bleibt auch hier der Einfluß der Dielektrizitätskonstante unmerklich. Bei noch schlechterem Leitvermögen tritt er zwar hervor, erreicht aber nie eine derartige Bedeutung wie für die Gestalt des elektrischen Feldes oder die Absorption der Wellen längs der Leiteroberfläche.

Im Gegensatz zu letzterer ist die Absorption beim Eindringen in den Leiter außerordentlich stark. Was für die längs der Leiteroberfläche fortschreitenden Wellen 1 km bedeutet, ist für die in den Leiter eindringenden Wellen ungefähr 1 cm.

6. Verhältnis der elektrischen und magnetischen Feldintensität und Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

a) Aus Gleichung (2) folgt:

$$\frac{E_{0x}}{M_{0y}} = - s \cdot \frac{v}{\nu \varepsilon_0}.$$

Eine Diskussion der Werte von s zeigt, daß $\left|\frac{E_{0x}}{M_{0y}}\right|$ sich nie weit von dem Werte der Lichtgeschwindigkeit entfernt, und daß der Phasenwinkel zwischen E_x und M_y stets sehr klein bleibt. Für qualitative Überlegungen kann E_{0x} und M_{0y} als gleichphasig betrachtet werden.

b) Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* c längs der Oberfläche des Leiters ($\mp$ der X-Achse) folgt aus dem reellen Anteil A von s (Gleichung (10)), und zwar ist

$$c = \frac{\nu}{A}.$$

Man bekommt für c Zahlen, die nahezu mit der Lichtgeschwindigkeit in Luft zusammenfallen oder etwas größer als diese sind. Das letztere erklärt sich dadurch, daß die Strahlungsrichtung schief zur Leiteroberfläche steht.

B. Folgerungen für die drahtlose Telegraphie.

7. Die Verwendbarkeit der Resultate für die drahtlose Telegraphie.

Die Rechnungen, deren Resultate im vorhergehenden mitgeteilt wurden, habe ich in erster Linie deshalb durchgeführt, um daraus Schlüsse für die drahtlose Telegraphie zu

ziehen. Ob das gestattet ist, ist nicht über jeden Zweifel erhaben.

a) Daß *ebene* Wellen vorausgesetzt wurden (Gleichung (1)), während die Flächen gleicher Phase bei den Wellen der drahtlosen Telegraphie die Erdoberfläche in Kreisen schneiden, ist kein ernstliches Bedenken. Es beschränkt nur die Gültigkeit auf Entfernungen vom Sender, die sehr groß sind gegen die Wellenlänge.

Statt der ebenen Wellenflächen zylindrische einzuführen liegt nahe. Eine wesentliche Verbesserung läßt sich dadurch aber nicht erzielen. Für große Entfernungen vom Sender gehen die Beziehungen für diese zylindrischen Wellen doch in diejenigen für ebene über und für kleine Entfernungen stellen die zylindrischen Wellen die Verhältnisse ebensowenig richtig dar, wie die ebenen.

b) Es fragt sich, ob die Wellen der drahtlosen Telegraphie auch in großer Entfernung vom Sender überhaupt die Form haben, die in Gleichung (1) vorausgesetzt ist. Diese Form führt zu einer ganz bestimmten Richtung des elektrischen und magnetischen Feldes und damit der Strahlung. Nun ist selbstverständlich, daß ebene Wellen mit ganz anderer Strahlungsrichtung an sich möglich sind.[1]) Es ist nicht von vornherein klar, daß die Wellen der drahtlosen Telegraphie gerade die im früheren vorausgesetzten sind.

Strenge könnte die Frage nur entschieden werden, wenn die Aufgabe, die M. Abraham[2]) für eine unendlich gut leitende Erdoberfläche behandelt hat, für eine Erdoberfläche mit beliebigem Leitvermögen gelöst würde. Solange das nicht geschehen ist, schweben die Schlüsse, die aus dem früheren für die Verhältnisse der drahtlosen Telegraphie gezogen werden, bis zu einem gewissen Grade in der Luft. Wenn im folgenden diese Schlüsse faute de mieux trotzdem gezogen wurden, so geschah es in erster Linie mit Rücksicht auf die Verhältnisse bei Drahtwellen. Sie machen es im höchsten Maße wahrschein-

1) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 443. — Bei anderer Strahlungsrichtung erhält man eine Reflexion der aus der Luft auf die Leiteroberfläche einfallenden Wellen.

2) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 2. p. 331. 1900—1901.

lich, daß die Wellen, welche die Sender der drahtlosen Telegraphie aussenden, jedenfalls in großer Entfernung vom Sender längs der leitenden Erdoberfläche in ähnlicher Weise hingleiten[1]), wie es in § 1 vorausgesetzt ist.

c) Ein weiteres Bedenken liegt darin, daß die Erdoberfläche für die großen Entfernungen, auf welche tatsächlich telegraphiert wird, keinesfalls mehr als eben angesehen werden kann.

Bei gut leitender Erdoberfläche mit nicht zu kleiner Dielektrizitätskonstante (z. B. Seewasser) ist es in höchstem Maße wahrscheinlich, daß die Erdkrümmung die Verhältnisse nicht merklich modifiziert. Da sich nach Abschnitt A Seewasser für die Wellen der drahtlosen Telegraphie in allen wesentlichen Punkten wie ein Metall verhält, so muß angenommen werden, daß die Wellen die Seewasseroberfläche in ähnlicher Weise als Führung benutzen[2]), wie etwa Drahtwellen die Drähte eines Lecherschen Systems, und ebenso wie diese jeder Krümmung des Leiters folgen.

Bei schlecht leitendem Boden von geringer Dielektrizitätskonstanten ist man zu derselben Annahme nicht berechtigt. Allein der Fall, daß man über *sehr große* Strecken festen Bodens, für die allein ein starker Einfluß der Erdkrümmung in Frage kommt, telegraphiert, ist nicht gerade häufig; man schränkt ihn aus guten Gründen möglichst ein. Wo es aber geschieht, muß jedenfalls mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß die Beziehungen, die unter der Annahme einer ebenen Leiteroberfläche abgeleitet wurden, die Verhältnisse nur unvollkommen wiedergeben.

d) Die Voraussetzung eines homogenen Bodenmaterials wird in den meisten Fällen besonders insofern nicht erfüllt

1) Diese Auffassung ist wohl zuerst von A. Blondel (Compt. rend. de l'Assoc. franç. pour l'avancement des sciences. Congrès de Nantes 1898. p. 212 ff.) und von E. Lecher (Physik. Zeitschr. 3. p. 273. 1901 bis 1902) vertreten worden.

2) Schon das sehr viel schlechter leitende Flußwasser scheint beim Telegraphieren über festes Land für die Fortleitung der Wellen eine wichtige Rolle zu spielen. Vgl. Electrician 55. p. 409. 1905: Es wird dort berichtet, daß bei Versuchen mit fahrenden Zügen sich immer eine bedeutende Verstärkung der Wirkung auf den Empfänger zeigte, sobald man sich einem Flußlauf näherte.

sein, als unter der Erdoberfläche der Tiefe nach verschiedene Schichten aufeinander folgen. Wo diese Schichten aus trockenem Boden und Gestein bestehen, ist nach den früheren Resultaten und § 8 nicht wahrscheinlich, daß dies eine große Änderung gegenüber dem Fall eines homogenen schlecht leitenden Bodens geringer Dielektrizitätskonstante bedingt.

Eine besondere Untersuchung ist aber nötig, wenn in nicht großer Tiefe Schichten von sehr verschiedenem Leitvermögen und sehr verschiedener Dielektrizitätskonstante aneinander stoßen. Das trifft einmal zu, wenn unter trockenem Boden Grundwasser sich befindet, und dann, wenn die oberste Bodenschicht durch Regengüsse sehr naß geworden ist. Auch dieser Fall läßt sich für ebene Wellen ohne große Schwierigkeit behandeln. Ich gedenke die Resultate in kurzem mitzuteilen.

8. Werte für Leitvermögen und Dielektrizitätskonstante des Bodens.

a) In der Literatur fand ich unter anderem folgende Werte:

	σ in C.G.S.	$k = \varepsilon/\varepsilon_0$
Seewasser	10^{-10} bis 10^{-11}	ca. 80
Regen-, Flußwasser	10^{-13} bis $5 \cdot 10^{-15}$	
Schiefer	10^{-15} bis 10^{-16}	
Marmor	ca. $2 \cdot 10^{-18}$	ca. 6

b) Die Abhängigkeit des Leitvermögens und der Dielektrizitätskonstanten verschiedener Bodenarten vom Nässegrad hat auf meine Veranlassung Hr. Ingenieur W. Eickhoff bestimmt. Seine Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Als Leitvermögen ergab sich:

Material	Proz. Wasser[1])	Leitvermögen σ in C.G.S.-Einh.
Gelber Flußsand . . .	0	$< 10^{-16}$
	0,86	$1{,}2 \cdot 10^{-14}$
	1,52	2,6 „
	2,37	4,3 „
	3,3	5,9 „
	5,8	8,2 „
	7,4	9,7 „
	9,5	10,5 „

1) Wasserleitungswasser.

Material	Proz. Wasser	Leitvermögen σ in C.G.S.-Einh.
Gartenerde	3,3	$0{,}6 \cdot 10^{-14}$
	4,4	1,1 „
	5,7	2,1 „
	8,2	4,9 „
	10,0	6,4 „
	13,5	11,8 „
	17,3	16,8 „
Lehmerde	4,4	$0{,}69 \cdot 10^{-14}$
	6,8	2,9 „
	9,2	6,7 „
	13,4	13,7 „
	16,1	20 „
	28	63 „
	45	69 „
	58,6	71 „

Die Messung der Dielektrizitätskonstante (mit sehr schnellen Schwingungen) lieferte

Gelber Flußsand, trocken	$k = 2{,}5$
„ „ mit 15 Proz. Feuchtigkeit .	= ca. 9
Gartenerde, trocken	= 1,9
„ mit 19 Proz. Feuchtigkeit . . .	= ca. 8
Lehm, trocken	= 3,5

c) Für qualitative Überlegungen darf man etwa annehmen für

Seewasser	$\sigma =$	10^{-11}	C.G.S.	$k = 80$
Süßwasser	=	10^{-14}	„	= 80
Nasser Boden	=	10^{-13} bis 10^{-14}	„	= 5—15
Trockener Boden . .	<	10^{-15}	„	= 2—6

9. Das elektrische Feld an der Oberfläche der Erde.

a) Wenig Interesse bietet der Fall, wenn die Wellen über eine *Wasser*fläche sich ausbreiten. Mag es See- oder Süßwasser sein, niemals entfernt sich die Richtung, in welcher die elektrische Feldstärke die größte Amplitude besitzt, viel von der Vertikalen: etwa 6° ist das Maximum, was erreicht wird. Das Feld ist praktisch gesprochen stets ein vertikales Wechselfeld.

b) Ganz anders liegen die Verhältnisse bei *trockenem Boden* (vgl. Figg. 5 und 6). Hier kann es zu einer starken Drehfeldkomponente oder zu einem stark gegen die Vertikale geneigten Wechselfeld kommen. *In beiden Fällen ist die Richtung, in welcher die Amplitude der elektrischen Feldstärke ein Maximum ist, erheblich von der Vertikalen verschieden*; im Fall von Fig. 5 z. B. beträgt der Winkel zwischen beiden Richtungen 35°.

Wenn also eine Station auf *festem* Boden errichtet wird, so ist es für den Empfang bei weitem günstiger, der Antenne (Netz, Harfe) die Lage von Fig. 9 (gefiederter Pfeil = Richtung der ankommenden Wellen) zu geben, statt dieselbe vertikal

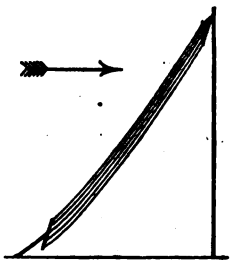


Fig. 9.

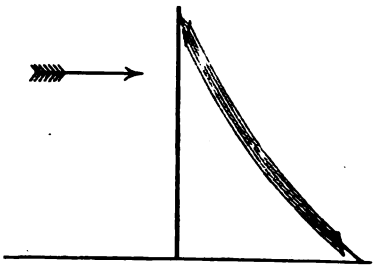


Fig. 10.

aufzuhängen. Ganz besonders ungünstig würde die Lage von Fig. 10 für die Antenne sein.[1]) Setzt man die Konstanten von Fig. 5 voraus, so würde gegenüber der Lage von Fig. 9 die vertikale Stellung der Antenne eine Verminderung der Amplitude um ca. 18 Proz., die Stellung Fig. 10 um 66 Proz. zur Folge haben.

Über die Beziehung, welche diese Verhältnisse zu den

1) Da es sich hier um ein für die Praxis wichtiges Resultat handelt, so lag mir daran zu erfahren, ob nicht Beobachtungen darüber schon vorliegen. Ich verdanke Hrn. Graf von Arco, an den ich mich wandte, die folgende Mitteilung, die das angegebene Resultat durchaus bestätigt: „Die auf Grund Ihrer Messungen zu erwartende Erscheinung, daß eine schräg gezogene Empfangsantenne mehr aufnimmt als eine vertikal gezogene, tritt tatsächlich ein. Die in Ihrer Fig. 2″ — identisch mit Fig. 9 — „gezeichnete Richtung hat sich tatsächlich in der Praxis stets als richtig erwiesen.“

Versuchen Marconis über gerichtete Telegraphie [1]) haben, gedenke ich in kurzem zu berichten.

10. Die Absorption der Wellen längs der Erdoberfläche (vgl. § 4).

a) Würde keine Absorption vorhanden sein, so würde die Amplitude mit wachsender Entfernung x vom Sender abnehmen $\sim 1/x$. Diese Abnahme der Amplitude $\sim 1/x$ ist also stets vorhanden. Nur dann, wenn *im Vergleich zu ihr* die Reduktion der Amplitude durch die Absorption in Betracht kommt, ist die Absorption von *praktischer* Bedeutung.

Wenn das eintritt, zeigen die Kurven der nachstehenden Fig. 11, welche die Abnahme der Amplitude zwischen 1 und 3000 km, ungefähr der Reichweite der größten Stationen, dar-

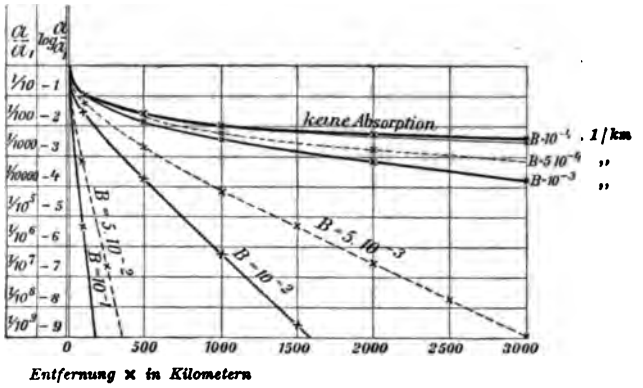


Fig. 11.

stellen. Die Ordinaten der Kurven sind dem gemeinen Logarithmus der Amplitude $\mathfrak{A}$ bez. ihrem Verhältnis zur Amplitude $\mathfrak{A}_1$ in der Entfernung 1 km vom Sender proportional. Es geht daraus hervor, daß bis zu einem Werte $B = 10^{-4}$ die Absorption fast ohne praktische Bedeutung ist.

b) Die Absorption in *Seewasser* spielt also für die Reichweite einer Station keine Rolle. Auch für *Süßwasser* wird die Absorption nie groß, das Leitvermögen mag so schlecht sein wie es will. Das Maximum der Absorption liegt für die

1) Proc. Roy. Soc. 77. p. 413. 1906; Electrician 57. p. 100. 1906.

Wechselzahlen der drahtlosen Telegraphie zwischen einem Leitvermögen $\sigma = 10^{-13}$ und 10^{-14}.

Für *trockenen Boden* kann die Absorption einen ganz außerordentlich hohen Betrag erreichen. Der Grund dafür liegt mindestens ebensosehr an der geringen Dielektrizitätskonstante, als an dem geringen Leitvermögen trockenen Bodens. Die bekannte Tatsache, daß die Reichweite von Stationen durch längere Strecken trockenen Bodens außerordentlich stark reduziert wird, erscheint nach einem Blick auf die Kurven von Fig. 11 sehr verständlich.

c) Eine Diskussion der Kurven Fig. 11 nach der in § 4 d angegenen Regel ergibt, daß beim Telegraphieren über nicht zu trockenen festen Boden, in geringerem Maße auch über Süßwasser, die großen Stationen mit ihren langen Wellen bezüglich der Absorption erheblich günstiger sind als die kleineren Stationen mit den kürzeren Wellen. Beim Telegraphieren über sehr trockenen Boden und über Seewasser tritt die darin begründete Überlegenheit der großen Stationen zurück, im ersten Falle, weil die Absorption hier nur wenig von der Wellenlänge abhängt, im zweiten Falle, weil die Absorption überhaupt ohne praktische Bedeutung ist.

11. Einfluß der Leitfähigkeit der Luft.

a) Nach den bisherigen Beobachtungen[1]) variiert die Leitfähigkeit der Luft in der Nähe der Erdoberfläche etwa um den Wert $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-25}$ C.G.S. herum. Legt man diesen mittleren Wert der Rechnung zugrunde, so wird $\beta = \sigma_0/\sigma$ sehr klein nicht nur gegen 1, sondern auch gegen q_0. Man ist demnach berechtigt, als Beziehung für s aus Gleichung (7) zu folgern:

$$s = -\sqrt{\alpha q_0 \cdot \frac{1 + \imath q}{1 + \imath (q + q_0)}} \left[1 - \frac{\imath \beta}{2 q_0} \frac{1 + \imath q}{1 + \imath (q + q_0)}\right].$$

Früher [§ 4], solange $\beta = 0$ angenommen war, war für s geschrieben worden

$$s = -(A - \imath B);$$

1) Die im folgenden benutzten Angaben über die Leitfähigkeit der Luft sind zum Teil von H. Gerdien (Physik. Zeitschr. 6. p. 647 ff. 1905; Gött. Nachr., mathem.-physik. Kl. 1907, Sitzung vom 28. Juli 1906), zum Teil einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Hrn. Dr. Gerdien entnommen.

bringt man es jetzt für beliebiges β auf die Form

$$s = -(A' - \imath B'),$$

so besteht zwischen dem Absorptionskoeffizienten B' und dem früheren Wert B annähernd die Beziehung[1]):

$$B' = B + A\frac{\beta}{2q_0}.$$

A ist unter den gemachten Voraussetzungen nie viel verschieden von $\frac{\pi}{8}\cdot 10^{-4}$ C.G.S. ($\nu = 10^6$/sec). $\frac{\beta}{2q_0} = \frac{\sigma_0}{2\nu\varepsilon_0}$ hat für die angenommene Größe von σ_0 den Wert $0{,}36\,.\,10^{-9}$. Demnach beträgt die Vermehrung des Absorptionskoeffizienten durch die Leitfähigkeit der Luft

$$\frac{A\beta}{2q_0} = \frac{\pi}{8}\cdot 10^{-4} \times 0{,}36\,.\,10^{-9} = \text{ca. } 0{,}4\,.\,10^{-13}\ 1/\text{cm}.$$

b) Die Leitfähigkeit der Luft kann am Erdboden auf ungefähr das 5fache des oben angenommenen mittleren Wertes ($2\,.\,10^{-25}$ C.G.S.), in einer Höhe von 6000 m im günstigsten Falle auf etwa das 10fache des Wertes am Erdboden steigen. Nimmt man als extremen Wert das 100fache des oben vorausgesetzten mittleren Wertes an, so folgt als Vermehrung des Absorptionskoeffizienten

$$\frac{A\beta}{2q_0} = 0{,}4\,.\,10^{-11}\frac{1}{\text{cm}} = 0{,}4\,.\,10^{-6}\frac{1}{\text{km}},$$

also

$$B' = B + 0{,}4\,.\,10^{-6}\frac{1}{\text{km}}.$$

c) Ein Blick auf die Werte von $1/B$ in Fig. 7 zeigt unmittelbar, daß bei einem Leitvermögen σ des Bodens $\leqq 10^{-13}$ C.G.S., d. h. bei Süßwasser und festem Boden, die Leitfähigkeit der Luft jedenfalls keine Rolle spielt.

Bei Seewasser von sehr gutem Leitvermögen ($\sigma = 10^{-10}$ C.G.S.) ist $B = 1{,}5\,.\,10^{-5}$ 1/km, bei Seewasser von sehr schlechtem Leitvermögen ($\sigma = 10^{-11}$ C.G.S.) $B = 1{,}5\,.\,10^{-4}$ 1/km. Die Vermehrung des Absorptionskoeffizienten beträgt also im ersten

---

1) Da der reelle Teil von $\frac{1+\imath q}{1+\imath(q+q_0)}$ stets viel größer als der imaginäre und nie viel verschieden von 1 ist.

Falle ca. 2 Proz., im zweiten 0,2 Proz. Auch im ersten Falle (vgl. § 10 und Fig. 11) ist also die Vermehrung der Absorption durch die Leitfähigkeit der Luft ohne praktische Bedeutung.

d) Bekanntlich ist ein bedeutender Unterschied zwischen der Reichweite einer Station bei Tag und derjenigen bei Nacht durch Marconi[1]) und seitdem durch andere Beobachter festgestellt worden. Marconi gibt an, daß die Reichweite bei Nacht gelegentlich etwa das $2^1/_2$fache derjenigen bei Tag betrage. Eine mögliche Erklärung dieser Beobachtung, auf die Marconi hingewiesen hat, ist eine vermehrte Absorption der Wellen, hervorgerufen durch die Ionisation der Luft durch das Tageslicht. Es geht aus dem Gesagten hervor, daß für die beobachtete Erscheinung *nicht die Luftschichten, die weniger als 6000 m von der Erdoberfläche entfernt sind, verantwortlich gemacht werden dürfen.* Solange es nicht gelingt, nachzuweisen, daß die Luftschichten in größerer Entfernung vom Erdboden durch das Tageslicht ein Leitvermögen von ganz anderer Größenordnung bekommen, als es bis jetzt jemals beobachtet worden ist, wird man deshalb diese Erklärung nicht annehmen können. Man wird der zweiten möglichen Erklärung, auf die Marconi auch schon aufmerksam gemacht hat, daß durch die Wirkung des Tageslichts[2]) die Entladung der Antenne und der dadurch bedingte Energieverlust vermehrt wird, trotz mancher Bedenken vorerst den Vorzug geben müssen.

12. Einfluß von Nebel.

Bezüglich des günstigen Einflusses, den Nebel auf die Reichweite einer Station besitzt, kann man an folgende Ursachen denken.

a) Durch die in der Luft enthaltenen Wassertröpfchen muß die *Dielektrizitätskonstante* nebelhaltiger Luft größer sein

---

1) G. Marconi, Proc. Roy. Soc. **70.** p. 344. 1002; Electrician **49.** p. 520. 1902; **54.** p. 824. 1905.

2) K. E. F. Schmidt (Physik. Zeitschr. 8. p. 135. 1907) diskutiert die Möglichkeit, daß die Bewegungen der ionisierten Bodenluft mit der Erscheinung im Zusamenhang stehen. Für den Fall, daß der Sender sich auf einem Schiff befindet, würde diese Möglichkeit natürlich wegfallen.

als diejenige nebelfreier. Dadurch müßte[1]) eine Erhöhung der Antennenkapazität hervorgerufen werden. Vorausgesetzt, daß diese Erhöhung überhaupt merkbar[2]) ist, würde sie keinesfalls immer günstig wirken, zumal nicht bei Stationen, die mit loser Koppelung und scharfer Abstimmung arbeiten.

Auch der Einfluß, den eine Erhöhung der Dielektrizitätskonstante der Luft auf die Absorption der Wellen ausübt[3]), ist, wie eine Diskussion von Gleichung (7) ergibt, im allgemeinen kein günstiger.

b) Die *größere Feuchtigkeit des Erdbodens*[4]), die bei Nebel wohl meist vorhanden ist, muß im allgemeinen die Reichweite erhöhen, kann aber zur Erklärung der günstigen Wirkung des Nebels beim Telegraphieren über See nicht herangezogen werden.

c) Es ist Tatsache, daß die *Leitfähigkeit der Luft bei Nebel ganz besonders gering ist.* Die Absorption der Wellen muß demnach bei Nebel zwar geringer sein als bei nebelfreier Luft, allein nach dem in § 11 ausgeführten kann dies praktisch nicht von großer Bedeutung sein.

Am wahrscheinlichsten aber ist wohl, daß durch die geringe Leitfähigkeit der Luft die Entladung der Antenne in die Luft stark reduziert wird. Darin und vielleicht in dem Schutz, den der Nebel gegen die photoelektrische Entladung der Antenne durch die Lichtstrahlen bietet, wird man wohl den Grund für die günstige Wirkung des Nebels suchen müssen.

13. Übergang zwischen Wasser und Land.

Es ist leicht zu übersehen, daß beim Übergang einer ebenen Welle vom Wasser zum Festland und umgekehrt eine teilweise Reflexion eintreten muß. Es muß demnach für die

---

1) J. van Dam, La télégraphie sans fil. Amsterdam 1906. p. 28.

2) Bei Versuchen im Laboratorium mit künstlich erzeugtem Nebel habe ich keine merklich größere Dielektrizitätskonstante als bei nebelfreier Luft gefunden.

3) Daß die höhere Dielektrizitätskonstante nebelhaltiger Luft die Absorption der Wellen beeinflussen müßte, darauf hat mich Hr. Sommerfeld, der so freundlich war, das Manuskript durchzusehen, hingewiesen.

4) Darauf ist in einem Referat über das zitierte Buch von van Dam im Electrician 57. p. 97. 1906 aufmerksam gemacht.

Amplitude der Welle in irgend einem Punkte nicht nur die Entfernung, welche die Wellen über Land und See zurückgelegt haben, sondern auch die *Uferform* von Bedeutung sein. Vielleicht liegt darin eine Erklärung für die, wie es scheint, mehrfach gemachte Beobachtung[1]), daß man unter Umständen an bestimmten Punkten, die weiter entfernt von einem Sender sind, eine bessere Wirkung erhält als an Stellen, die dem Sender näher liegen.

Braunschweig, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.

1) Mitteilung der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie. — Man muß bei derartigen gelegentlichen Beobachtungen natürlich sehr vorsichtig sein, da sie fast nie auf einwurfsfreien vergleichenden Versuchen beruhen.

(Eingegangen 21. Juni 1907.)

3. *Gleitfunken auf sehr dünnen (Glimmer-)Platten;* von *Max Toepler.*

Vorliegend mitgeteilte Beobachtungen bilden eine Ergänzung der früher[1]) für dickere Platten (Glas) ausgeführten Messungen.

I. Versuchsanordnung.

Die allgemeine Versuchsanordnung zur Herstellung von Gleitfunken erster Art war die gleiche wie sie bei Anwendung von Glasplatten benutzt wurde (vgl. l. c., Figg. 1a und 1b).

Bei Ausdehnung der Messungen von Gleitfunkenbildung auf dünnste Glimmerplatten traten einige Schwierigkeiten auf. Nur auf Platten von mehr als 0,1 mm Dicke bildete sich die (Schwefel–Mennige) Staubfigur so scharf aus, wie es erwünscht war; die Benutzung der Bestäubung wurde daher hier aufgegeben und nur die größte Gleit*funken*länge auf *un*bestäubten Platten festgestellt. Ferner war auf dünnsten Platten das Aufkleben des Stanniolstreifens auf der Glimmerplattenrückseite schwierig und wegen der verbleibenden Klebmassenzwischenschicht nicht ganz einwandfrei. Zum Ersatz wurden daher diese dünnsten Platten auf starke Messingstreifen, deren Oberfläche amalgamiert war und auf welchen noch Quecksilber flüssig stand, unter Ausdrücken der Luft vorsichtig aufgelegt.

Die Bestimmung der Plattendicke erfolgte indirekt dadurch, daß Dicke und Gewicht der zu spaltenden starken Glimmerplatte (mehr als 0,1 mm dick, 10 cm breit und 33 cm lang) direkt bestimmt, und dann aus dem Gewicht der Spaltungsstücke deren Dicke berechnet wurde.[2])

---

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 193. 1906.

2) Angaben über die Dicke der benutzten Glimmerplatten finden sich in Tab. II. Die Plattenzählung beginnt hierin mit Nr. 14 in Fortzählung der Plattennumerierung in der eingangs zitierten Arbeit.

Bemerkt sei, daß auch, wie früher, alle Beobachtungen und Messungen vorliegender Arbeit sich auf positive Gleitfunken (Metallstreifen stets

II. Einfluß der Kapazität der benutzten Batterien und der Streifenbreite.

Bei sehr dünnen Platten ist die Kapazität der Oberflächeneinheit sehr beträchtlich, somit auch die Elektrizitätsmenge, welche bei Gleitbüscheln (auch solchen von nur wenigen Zentimetern Länge) auf die Platte fließt. Sind die benutzten Batterien nicht *sehr* groß, so sinkt die Spannung an den Gleitfunkenpolen schon während der Gleitbüschelbildung so stark, daß man *zu kurze* Gleitfunken erhält; Fig. 1 möge dies illustrieren.

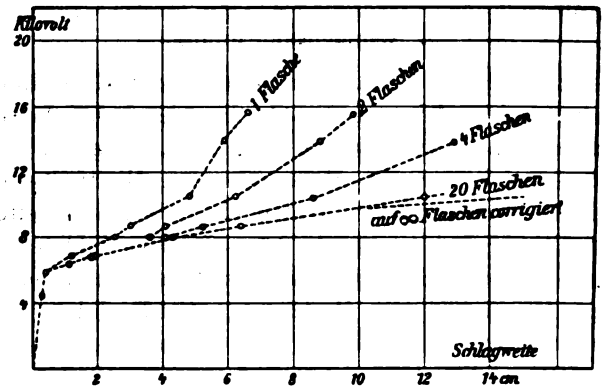


Fig. 1.

Für sehr große Batterien würden die Gleitfunkenlängen schließlich jeweils einen *bestimmten*, von Kapazitätsvermehrung nicht mehr merklich abhängigen *größten Wert erreichen.* Ist die benutzte Batterie nicht zu klein, so läßt sich bei Kenntnis ihrer Kapazität und der Gleitbüscheldimensionen die beobachtete Gleitfunkenlänge auf eben genannte größtmögliche Länge umkorrigieren.

Für lange Gleitfunken (30—100 cm) auf dicken Glasplatten (2—3 mm stark) war früher gefunden[1]), daß mit wachsender *Streifenbreite* die Gleitfunkenlänge erst schnell, dann langsam zunimmt, um schließlich, nach Überschreiten eines Maximums,

Kathode) beziehen; auch auf Glimmerplatten kamen, wie orientierende Messungen ergaben, die längsten negativen Gleitfunkenlängen den positiven nahe.

1) Vgl. M. Toepler, Wied. Ann. **66.** p. 1069. 1898.

wieder etwas abzunehmen. Dasselbe Verhalten zeigen nun auch die Gleitfunkenlängen, die man auf dünnen Glimmerplatten erhält; z. B. ergaben sich auf Glimmerplatte Nr. 14 bei 15,6 Kilovolt angelegter Spannung:

für eine Streifenbreite von	0,1 cm	0,5 cm	2 cm	5 cm
die Gleitfunkenlänge zu	21,7 cm	24,2 cm	23,9 cm	22,7 cm

Bringt man nun aber die nötige Korrektion wegen der nicht ganz hinreichenden Batteriekapazität an und berücksichtigt hierbei, daß bei breiteren Streifen die geladene Fläche eine größere ist, so verschwindet die Abnahme nach Überschreiten des Maximums fast völlig. Bei Streifen, die mehr als das Zehnfache der Plattendicke betragen, weichen dann die Funkenlängen nur noch innerhalb der Versuchsfehlergrenzen voneinander ab.

III. Gleitfunkenlängen als Funktion von Spannung und Plattendicke.

Nachstehende Tab. I gibt Gleitfunkenlängen für einige Glimmerplatten.[1]) Als Streifen dienten ausnahmslos amalgamierte Messingstäbe.

Tabelle I.

Platte Nr. 16 Dicke 0,0447 mm, Streifenbreite 0,2 cm.			Platte Nr. 18 Dicke 0,0130 mm, Streifenbreite 0,1 cm.		
P in Kilovolt	f in cm	$\alpha = P^4 : f$	P in Kilovolt	f in cm	$\alpha = P^4 : f$
2,7	0,3	—	2,3	0,23	—
4,0	0,4	—	2,8	0,30	—
5,1	0,8	—	3,1	0,40	—
5,5	1,4	654	3,3	0,45	—
5,7	1,8	586	3,4	0,6	—
6,5	3,1	576	3,5	0,9	—
7,6	5,2	642	4,3	1,4	244
8,2	6,7	675	4,9	2,6	222
8,7	8,6	666	5,1	2,8	242
9,0	9,1	708	5,3	3,5	225
9,1	12,3	558	5,8	4,8	236
9,2	11,5	623	6,2	6,2	238
9,4	14,5	538	6,3	6,5	275
			Durchschlagen bei 6,3 Kilovolt.		

1) Als Kapazität dienten 2 mal 20 große Leidener Flaschen (wirksame Kapazität 50000 cm). Wo erforderlich, sind die angegebenen Spannungswerte auf unendliche Kapazität korrigiert; die Korrektion an den Spannungen überschritt nirgends 5 Proz.

Tabelle I (Fortsetzung).

Platte Nr. 19

Dicke 0,0068 mm, Streifenbreite 0,15 cm.

P in Kilovolt	f in cm	$\alpha = P^4 : f$
1,9	0,15	—
2,6	0,2	—
3,0	0,5	162
3,2	0,8	181
3,4	1,1	122

Durchschlagen bei 3,4 Kilovolt.

Die Tabellenangaben und die weiteren Messungen zeigen: Wie auf dicken Glasplatten gehorcht die Funkenlänge für wachsende Spannung nacheinander zwei verschiedenen Gesetzen.

Speziell für *gleitende* Entladung ergibt sich: Für alle Glimmerplatten bis zu den dünnsten hinab (1/140 mm Stärke) gilt die Beziehung

$$\alpha . f = P^4, \tag{1}$$

worin α eine jeder Platte individuelle Konstante bedeutet. In Tab. II sind die für verschiedene Glimmerplatten gefundenen Mittelwerte von α zusammengestellt (f in Zentimetern und P in Kilovolt gerechnet).

Tabelle II.

Plattennummer	14	15	16	17	18	19
Plattendicke in mm	0,153	0,0648	0,0447	0,0222	0,0130	0,0068
Kapazität in cm von 1 cm² Oberfläche	34,5	82	118	238	407	778
Konstante α	2217	923	623	368	240	138

Weiter war früher für Glasplatten die Beziehung

$$\alpha^2 . c^3 = 6{,}3 . 10^{10}$$

gefunden. Es bedeutet hier c die Kapazität von 1 cm² Plattenoberfläche. Rechnet man die Kapazität c nach der Formel $c = \varkappa / 4\pi d$ (worin d die Plattendicke, $\varkappa$ die Dielektrizitätskonstante bedeutet) und setzt $\varkappa$ für Glimmer = 6,6, so erhält

man die in der dritten Zeile von Tab. II angegebenen Kapazitätswerte.

In Fig. 2 sind nun zum Vergleich sowohl die früheren Messungen (Kreuze mit Nr. 6—13), wie auch die vorangehend angegebenen neuen (Kreuze mit Platten-Nr. 14—19) eingetragen, und zwar zu $\log . c$ als Abszissen, die Werte von $\log . \alpha$ als Ordinaten. Man sieht, daß die neuen Werte keine geradlinige Fortsetzung der früheren, welche ja auf gerader Linie liegen, ergeben haben.

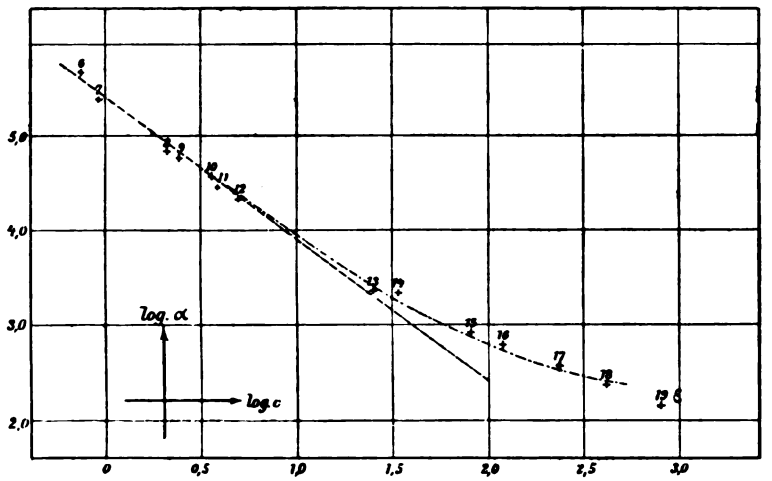


Fig. 2.

Der Grund für die hervorgehobene Abweichung dürfte, wenigstens zum größeren Teile, in folgendem zu finden sein: Nach allem erfolgt der Prozeß der Gleitbüschelbildung noch in Luft. Zu der Glimmerplattendicke ist also sachgemäß noch eine dünne Luftschicht hinzuzurechnen. Andererseits liegt sicher auch der Metallstreifen, selbst der amalgamierte, an der Plattenunterseite nicht völlig an. Die wahre wirksame Platte für Gleitfunkenbildung besteht also aus Glimmer, vermehrt um zwei Luftschichten. Die wirksame Kapazität der Oberflächeneinheit (c') ist also zu rechnen als

$$c' = \frac{1}{4\pi d_1 : \varkappa_1 + 4\pi d_2 : \varkappa_2},$$

wo d_1 und $\varkappa_1$ die Dicke (in Zentimetern) und Dielektrizitätskonstante des Glimmers d_2 und $\varkappa_2$ der Luftlamellen bedeuten.

Nimmt man in obiger Formel $4\pi d_2 : \varkappa_2$ als konstant und speziell = 0,008 an, so erhält man das Gesetz

$$(2) \qquad \alpha^2 . c^3 = \frac{\alpha^2}{(1{,}90 . d_1 + 0{,}008)^3} = 6{,}3 . 10^{10},$$

d. h. also an Stelle der gestrichelten Geraden in Fig. 2 die strichpunktierte Kurve. Diese letztere Kurve schmiegt sich den beobachteten Werten einigermaßen an.

IV. Die beiden Existenzgrenzen der Gleitfunkenbildung.

a) *Erste Grenze, kleine Schlagweite.* Für jede Platte erfolgt bei *kleinen* Schlagweiten schließlich die Funkenbildung nicht mehr gleitend, sondern durch die Luft (die Funkenlänge

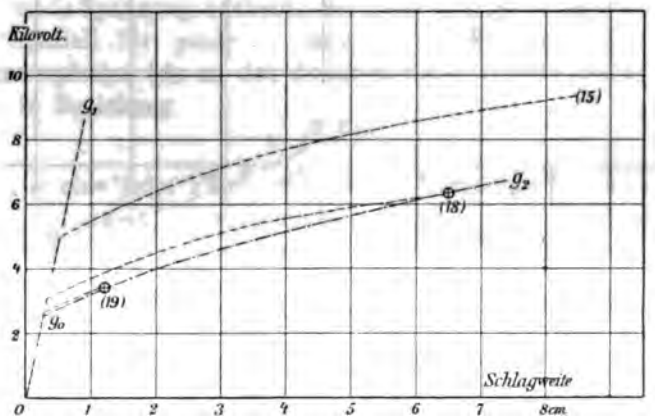


Fig. 3.

als Funktion der Spannung aufgefaßt, besitzt eine Knickstelle). Werden für verschiedentliche Platten jedesmal diejenigen Funkenlängen (Abszissen) als Funktion der Spannung (Ordinaten) gezeichnet, wie dies in Fig. 3 geschehen ist, so bildet die (stark gestrichelte) Verbindungslinie $O g_1$ aller Knickstellen die *untere* Grenze der Gleitbüschelbildung. In Annäherung ist diese Grenze gegeben durch die Formel

$$(3) \qquad f_{\text{min.}} = 0{,}1 . P,$$

wo P in Kilovolt gezählt ist.

b) *Zweite Grenze, große Schlagweite.* Der Länge der Gleitbüschel und Gleitfunken ist für jede Platte eine *obere* Grenze dadurch gesetzt, daß schließlich die Platte durch die für Gleitbüschelbildung nötige Spannung durchschlagen wird. Für dünnste Glimmerplatten wurde bei meinen Messungen diese Grenze tatsächlich erreicht; in Fig. 3 sind die beobachteten beiden Werte von $f_{max.}$ durch die Marke ⊕ gekennzeichnet, die stark strichpunktierte Verbindungslinie $g_0 g_2$ dieser Werte bildet die *obere* Grenze der Existenz von Gleitfunken.

Nach Tab. I wäre für sehr dünne Glimmerplatten zu setzen

$$P_{max.} = 500 \,.\, d, \tag{4}$$

wo $P_{max.}$ die Durchschlagsspannung in Kilovolt bedeutet[1]) und d in Millimetern berechnet ist.

Durch Kombination von Gleichung (4) mit (2) und (1) könnte man die größtmöglichste Gleitfunkenlänge $f_{max.}$ errechnen.

Wie die Figur zeigt, schneiden sich die beiden Grenzkurven (Punkt g_0). Es gibt also eine *kleinste Plattendicke* derart, daß dünnere Platten durchschlagen werden, ehe es überhaupt zur *Gleitfunkenbildung* kommt. Zu ihr gehört eine *kleinste Spannung* (Ordinate von Punkt g_0) und eine *kleinste Gleitfunkenlänge* (Abszisse von Punkt g_0).

Für Glimmer in Berührung mit gewöhnlicher Luft ergibt sich angenähert:

als kleinste Dicke	0,005 mm
als kleinste Gleitfunkenlänge . .	0,2 cm
als kleinste Spannung	2,5 Kilovolt.

Diese drei Minimalwerte wären auch zu errechnen; für den Punkt g_0 koexistieren nämlich die Gleichungen (1), (2), (3) und (4).

1) Hr. C. Bauer (Elektrotechn. Zeitschr. 1904. p. 7) stellt die von Gray beobachteten Durchschlagsspannungen für Glimmerplatten von 0,1 bis 1 mm Dicke durch die Interpolationsformel $P = 81{,}7 \,.\, d^{7/8}$ dar. Hiernach würde sich für $d = 0{,}0130$ mm P zu 4,52 Kilovolt und für $d = 0{,}0068$ mm P zu 2,94 Kilovolt rechnen, Werte, welche den von mir beobachteten immerhin *recht nahe kommen*, wenn man bedenkt, wie sehr die Durchschlagspannung von zufälligen Materialfehlern abhängt.

Als weitere Folge des eben Gesagten findet die in Fig. 3 dargestellte Kurve der Werte $\log . \alpha$ für Glimmer schließlich mit wachsender Kapazität ein *Ende*; dieses liegt etwa an der mit s bezeichneten Stelle.

Qualitativ das gleiche bezüglich der Existenzgrenzen gilt natürlich auch für Platten aus anderem Materiale, wobei freilich quantitativ andere Werte gelten; für Glas z. B. ist die Durchschlagsfestigkeit ja viel geringer, daher liegt hier das Kurvenstück $g_2 g_0$ beträchtlich höher als bei Glimmer.

Dresden, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., 21. Juni 1907.

(Eingegangen 10. Juli 1907.)

4. *Diffraktion und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen; von W. v. Ignatowsky.*

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, einen stetigen Übergang von den Maxwellschen Gleichungen zu den Diffraktions- bez. Reflexionserscheinungen zu schaffen. Diesbezüglich ging ich von einem allgemeinen Integral aus, welches dem Huyghensschen Prinzip entspricht, aber in strenger Weise aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet wurde. Durch Spezialisierung (§ 2) für zylindrische Körper ist das Integral bedeutend vereinfacht worden.

Auch hier wie bei dem Huyghensschen Prinzip sind gewisse Annahmen bezüglich der Oberflächenwerte nötig, um zu bestimmten Lösungen zu gelangen. Diese Annahmen, die wir einführen (§ 4), sind Folgerungen der Maxwellschen Theorie und der Größenverhältnisse zwischen den Dimensionen der beugenden bez. reflektierenden Körper und der Wellenlänge λ der einfallenden Welle. Als letztere setzten wir eine Lichtwelle voraus. Die Erörterungen der beiden ersten Paragraphen und teilweise des § 3 sind aber für beliebige Wellenlängen gültig.

Die Intensität der Lichtstrahlung wurde auf Grund des Poyntingschen Satzes berechnet und nicht mit Hilfe des Quadrates der elektrischen Kraft. Daß diese beiden Berechnungsarten zu verschiedenen Resultaten führen, wird in § 5 gezeigt.

Speziell in der vorliegenden Arbeit wird die Reflexion an einer Ebene und die Diffraktion an einem Draht genauer untersucht. Die Behandlung der Diffraktion an anderen Körpern bez. der Reflexion bleibt einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Die Bezeichnungen entsprechen den üblichen Bezeichnungen der Vektoranalysis. (Vgl. z. B. Föppl-Abraham, Einführung in die Maxwellsche Theorie.) Dementsprechend bedeuten i, j, ℓ die Einheitsvektoren längs den Achsen X, Y, Z.

§ 1. Das allgemeine Integral der Maxwellschen Gleichungen.

In meiner früheren Arbeit[1]) habe ich schon auf ein derartiges Integral hingewiesen, möchte aber hier die allgemeinere Form desselben hinschreiben, aus welcher das zitierte Integral abgeleitet wurde.[2]) Diese Form ist für die Berechnung der Diffraktionserscheinungen am geeignetsten.

Es sei K ein Raum, welcher durch die Oberfläche S begrenzt ist. In diesem Raum K sollen keine Diskontinuitäten der elektrischen bez. der magnetischen Kräfte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ vorkommen. Dasselbe soll auch für die ersten und zweiten Derivierten der Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ längs den Koordinatenachsen gelten. Außerdem sollen in K die Dielektrizitätskonstante ε und Leitfähigkeit σ konstant sein.

Wir erhalten dann für einen Punkt P *innerhalb* des Raumes K, für die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$, folgenden Ausdruck:

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\mathfrak{E} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_K \frac{1}{r}\cdot\left(4\pi\sigma\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}+\frac{\varepsilon-1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}\right)_{t=t-\frac{r}{c}} d\varkappa \\
\qquad -\dfrac{1}{4\pi c}\displaystyle\int_S \frac{\partial}{\partial t}\,V\nabla\lg r\;V\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}\,.\,d\omega_{t=t-\frac{r}{c}} \\
\qquad -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \nabla\frac{1}{r}\cdot\mathfrak{E}\,\mathfrak{n}\,d\omega_{t=t-\frac{r}{c}} + \frac{1}{4\pi}\int_S V\nabla\frac{1}{r}\,V\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}\,d\omega_{t=t-\frac{r}{c}} \\
\qquad +\dfrac{1}{4\pi c}\displaystyle\int_S \nabla\lg r\cdot\frac{\partial\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}}{\partial t}\,d\omega_{t=t-\frac{r}{c}} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r}\,V\mathfrak{n}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\,d\omega_{t=t-\frac{r}{c}}.
\end{cases}
$$

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 505. 1905.

2) Die allgemeinste Form des Integrals werde ich bei einer anderen Gelegenheit mitteilen.

Hier bedeuten:

c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,
∇ = Gradient eines Skalars,
V = Vektorprodukt,
n = Einheitsvektor längs der *äußeren* Normale zu S,
dx und $d\omega$ = Raum- bez. Flächenelement,
r = Entfernung *vom* Aufpunkt P *bis* zu den obigen Elementen.
Die Permeabilität μ ist gleich 1 angenommen.
In den Integralen muß vor der Integration statt t, $t - r/c$ gesetzt werden.
Alle Größen sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt.

Die Ableitung von (1) setzt voraus, daß P innerhalb von S liegt. Liegt P außerhalb von S, so ist $\mathfrak{M} = 0$, falls wir mit $\mathfrak{M}$ die rechte Seite von (1) bezeichnen.

Haben wir n Körper und liegt P außerhalb derselben, so ist für alle Körper:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \ldots \mathfrak{M}_n = 0. \tag{2}$$

Wir nehmen jetzt $K = \infty$ an und setzen voraus, daß in K n Körper mit den entsprechenden Konstanten ε und σ verteilt sind. Die äußere Begrenzung dieses Raumes setzt sich jetzt zusammen: erstens aus einer unendlich weit vom Punkte P entfernten Oberfläche, auf welcher also $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verschwinden, und zweitens aus den n Oberflächen der einzelnen Körper. Bezeichnen wir für diesen Fall die rechte Seite von (1) mit $\mathfrak{M}_0$, so folgt nach (2):

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots \mathfrak{M}_n. \tag{3}$$

Zieht man jetzt in Betracht, daß n in $\mathfrak{M}_0$ die innere Normale, und in $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... $\mathfrak{M}_n$ die äußere Normale zu den Körpern darstellt und daß die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ an den Oberflächen der Körper kontinuierlich sind, so bekommt man nach wirklicher Ausrechnung von (3) unmittelbar das auf p. 505 meiner Arbeit unter (2a) angeführte Integral. Wir sehen demnach, daß dieses Integral nur eine Abart von (1) ist. Für technische Zwecke ist das zweite Integral geeigneter, für Schwingungserscheinungen und für das folgende, wie schon oben bemerkt, das Integral (1).

Wir gehen jetzt zu einigen speziellen Anwendungen von (1) über.

§ 2. Spezialisierung des allgemeinen Falles.

Wir machen jetzt folgende Voraussetzungen:

1. Der Raum $K=\infty$ bestehe aus Luft ($\varepsilon=1$, $\mu=1$, $\sigma=0$).

2. Alle im Raume K befindlichen Körper sind absolut reflektierend und unmagnetisch ($\sigma=\infty$, $\mu=1$).

3. Alle Körper sind durch Zylinderflächen begrenzt, deren Erzeugende unendlich lang und parallel der Z-Achse sind.

4. Die magnetische bez. elektrische Kraft der einfallenden Welle sollen unabhängig von der z-Koordinate sein, d. h. als einfallende Welle nehmen wir eine Zylinderwelle an.

5. Die einfallende und dementsprechend auch die reflektierte Welle sollen periodisch in bezug auf die Zeit sein. Wir bezeichnen im folgenden die Periode durch T und $2\pi/T$ durch ω.

Infolge obiger Voraussetzungen erhalten wir aus (1) § 1:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 &+ \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi c}\int_S \nabla \lg r \,.\, \mathfrak{n}\,\mathfrak{E}'\, e^{-\frac{i\omega r}{c}}\, d\omega \\ &- \frac{e^{i\omega t}}{4\pi}\int_S \nabla\frac{1}{r}\cdot \mathfrak{n}\,\mathfrak{E}'\, e^{-\frac{i\omega r}{c}}\, d\omega \\ &+ \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi}\int_S \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r}\, V\mathfrak{n}\,\mathfrak{H}'\, d\omega,\end{aligned}\right.$$

wo $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ sich bestimmen aus:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}'\, e^{i\omega t},\\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}'\, e^{i\omega t}\end{aligned}\right.$$

und $\mathfrak{H}_1$ bez. $\mathfrak{E}_1$ die magnetische bez. elektrische Kraft der einfallenden Welle bedeuten.

Wir zerlegen jetzt alle magnetischen bez. elektrischen Kräfte in zwei Komponenten: eine parallel der Z-Achse und die andere senkrecht dazu und unterscheiden sie durch die Indizes z und m.

Beachten wir, daß $d\omega = dz\, ds$ ist, wo ds ein Linienelement längs der positiven Richtung (im Uhrzeigersinne, falls

wir längs der Z-Achse schauen) der Schnittkurve der XY-Ebene mit den Zylinderflächen bedeutet, und daß

$$\nabla \lg r = \frac{\mathfrak{r}_0}{r}$$

und

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}$$

sind, wo $\mathfrak{r}_0$ der Einheitsvektor längs r bedeutet, *vom* Aufpunkte aus gerechnet, so erhalten wir aus (1)

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}_{1s} &+ \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi} \int_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} V\mathfrak{n}\mathfrak{H}_m' \, ds\, dz \\ &+ \mathfrak{E}_{1m} + \frac{i\omega e^{i\omega t}}{4\pi c} \int_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{n}\mathfrak{E}_m'}{r} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds\, dz \\ &+ \frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{n}\mathfrak{E}_m'}{r^2} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds\, dz \\ &+ \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi} \int_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} \cdot V\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H}_s' \, ds\, dz. \end{aligned}\right.$$

Wir legen jetzt den Aufpunkt in die XY-Ebene, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, und bezeichnen durch R die Entfernung vom Aufpunkt bis zu einem in der XY-Ebene liegenden Element ds. Dann ist

$$r^2 = R^2 + z^2.$$

Infolge der Symmetrie um die XY-Ebene erhalten wir statt der Integrale 2 und 3 in (3) folgenden Ausdruck:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2i\omega e^{i\omega t}}{4\pi c} \int_s \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{R}_0 \cdot R\mathfrak{n}\mathfrak{E}_m'}{r^2} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds\, dz \\ &\quad + \frac{2e^{i\omega t}}{4\pi} \int_s \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{R}_0 \cdot R\mathfrak{n}\mathfrak{E}_m'}{r^3} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds\, dz = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial R}, \end{aligned}\right.$$

wo $\mathfrak{M}$ nichts anderes ist als:

$$\mathfrak{M} = \frac{2 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_s \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}_0 . n \mathfrak{E}_m'}{r} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds\, dz \tag{5}$$

und $\mathfrak{R}_0$ den Einheitsvektor längs R bedeutet. Bei der Differentiation von $\mathfrak{M}$ in (4) ist $\mathfrak{R}_0$ und z als konstant und der Aufpunkt als beweglich angenommen.

Bezeichnen wir durch φ' die Komponente der magnetischen Kraft längs s, durch ζ' den Tensor von $\mathfrak{H}_s'$ und durch $\mathfrak{s}_0$ den Einheitsvektor längs s, so ist:

$$\begin{cases} V n \mathfrak{H}_m' = - \mathfrak{k} . \varphi', \\ V n \mathfrak{H}_s' = \mathfrak{s}_0 \zeta', \end{cases} \tag{6}$$

wobei berücksichtigt werden muß, daß n hier die innere Normale zu den Körpern darstellt.

Auf Grund von (4), (5), (6) und (4) A p. 506 [1]) erhalten wir statt (3):

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}_{1s} + \dfrac{\mathfrak{k} . i\omega e^{i\omega t}}{2\pi} \displaystyle\int_s Q_0(Rp)\, \varphi'\, ds \\ \qquad + \mathfrak{E}_{1m} - \dfrac{p e^{i\omega t}}{2\pi} \displaystyle\int_s n \mathfrak{E}_m' . \mathfrak{R}_0 . Q_1(Rp)\, ds \\ \qquad - \dfrac{i\omega e^{i\omega t}}{2\pi} \displaystyle\int_s \zeta . Q_0(Rp) \mathfrak{s}_0\, ds, \end{cases} \tag{7}$$

wo

$$p = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist und λ die Wellenlänge bedeutet.

Für die magnetische Kraft erhalten wir aus (7) infolge der bekannten Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$

$$- \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E},$$

1) Der Buchstabe A bei einem Zitat bedeutet den Hinweis auf meine frühere oben zitierte Arbeit in den Annalen.

und falls wir berücksichtigen, daß bei der Differentiation der Aufpunkt bewegt wird, folgenden Ausdruck:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s + \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_{1s} + \dfrac{e^{i\omega t}p}{2\pi}\displaystyle\int_s \zeta' \cdot Q_1(Rp)\, V\mathfrak{R}_0 \mathfrak{s}_0 \cdot ds \\ \qquad + \mathfrak{H}_{1m} - \dfrac{e^{i\omega t}p}{2\pi}\displaystyle\int_s \varphi' Q_1(Rp)\, V\mathfrak{R}_0 \mathfrak{t} \cdot ds. \end{cases}$$

Aus (7) und (8) folgt weiter:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_{1s} + \dfrac{\mathfrak{t} i\omega e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s Q_0(Rp)\varphi' ds, \\ \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_{1m} - \dfrac{p e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s \varphi' \cdot Q_1(Rp)\, V\mathfrak{R}_0 \mathfrak{t} \cdot ds, \end{cases}$$

und

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}_{1m} - \dfrac{p e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s \mathfrak{n}\, \mathfrak{E}_m' \cdot \mathfrak{R}_0 \cdot Q_1(Rp)\, ds \\ \qquad - \dfrac{i\omega e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s \zeta \cdot \mathfrak{s}_0 \cdot Q_0(Rp)\, ds, \\ \mathfrak{H}_s = \mathfrak{H}_{1s} + \dfrac{p e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s \zeta' \cdot Q_1(Rp)\, V\mathfrak{R}_0 \mathfrak{s}_0\, ds. \end{cases}$$

Der Ausdruck (9) stimmt vollständig mit dem Ausdruck (18) A p. 509 überein, welchen wir durch direkte Lösung der Maxwellschen Gleichung für einen absolut reflektierenden Draht gefunden haben. Wir sehen aber, daß (9) und auch (10) überhaupt allgemein gültig sind für alle bei den Voraussetzungen 1 bis 5 möglichen Fälle, z. B. bei einem Gitter, Spalt, Halbebene etc.

Aus der Form von (9) und (10) sehen wir, daß diese beiden Ausdrücke zwei voneinander unabhängige Systeme darstellen und infolgedessen separat behandelt werden können. Wir benutzen dies und wollen im folgenden nur das System (9) näher untersuchen, also voraussetzen, daß

$$\mathfrak{E}_{1m} = \mathfrak{H}_{1s} = 0$$

ist.

Wir können demnach die Indexe z und m fallen lassen, da bei unserer Annahme $\mathfrak{E}$ stets parallel zur Z-Achse ist und $\mathfrak{H}$ senkrecht dazu.

§ 3. Reflexion an einer Ebene und Einführung weiterer Annahmen.

Wir nehmen eine absolut reflektierende unendlich große Ebene senkrecht zur XY-Ebene an unter beliebigem Winkel zur X-Achse.

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{E}_{1n}$ und $\mathfrak{H}_{1n}$ die zur Ebene normalen Komponenten der elektrischen bez. magnetischen Kraft einer *beliebigen* einfallenden Welle in der Ebene selbst und durch $\mathfrak{E}_{1t}$ und $\mathfrak{H}_{1t}$ die entsprechenden tangentialen Komponenten, so erhalten wir für die reflektierten Komponenten, welche wir durch den Index 2 unterscheiden:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{2t} = -\mathfrak{E}_{1t}, \\ \mathfrak{H}_{2n} = -\mathfrak{H}_{1n}. \end{cases}$$

Da aber die Ebene eine Symmetrieebene in bezug auf die Lage der Schwingungszentren, bez. Schwingungslinien wie in unserem Falle von Zylinderwellen, ist, da die reflektierenden Wellen von Schwingungszentren zu kommen scheinen, deren Lagen die Spiegelbilder der Schwingungszentren der einfallenden Wellen sind, so folgt daraus und aus (1) § 2

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{2n} = \mathfrak{E}_{1n}, \\ \mathfrak{H}_{2t} = \mathfrak{H}_{1t}. \end{cases}$$

Deshalb ist die gesamte tangentiale magnetische Kraft in der Ebene selbst gleich:

$$(3) \qquad \mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_{1t} + \mathfrak{H}_{2t} = 2\,\mathfrak{H}_{1t}$$

und die gesamte normale elektrische Kraft

$$(4) \qquad \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_{1n} + \mathfrak{E}_{2n} = 2\,\mathfrak{E}_{1n}.$$

Wir kehren wieder zu den am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen, d. h.

$$\mathfrak{E}_{1m} = \mathfrak{H}_{1z} = 0,$$

zurück, nehmen die reflektierende Ebene senkrecht zur X-Achse an und lassen dieselbe durch den Koordinatenanfang gehen. Die

einfallende Welle sei eine plane ebene Welle, welche sich in der negativen Richtung der X-Achse bewegt.

Dann ist

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{k} A e^{i(\omega t + p x)} \tag{5}$$

und

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{j} \cdot \frac{A p}{\omega} e^{i(\omega t + p x)}, \tag{6}$$

wo A die Amplitude der elektrischen Kraft für $x = 0$ ist.

Aus (3), (6) und (9) § 2 folgt:

$$\varphi' = \frac{2 A p}{\omega}; \quad d s = d y,$$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{k} \cdot A e^{i(\omega t + p x)} + \mathfrak{k} \cdot \frac{A p i}{\pi} e^{i \omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_0 (p R) d y, \tag{7}$$

oder wegen der Symmetrie bezüglich der ZX-Ebene:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{k} \cdot A e^{i(\omega t + p x)} + \mathfrak{k} \cdot \frac{2 A p i e^{i \omega t}}{\pi} \int_{0}^{\infty} Q_0 (p R) d y. \tag{7a}$$

Durch direkte Lösung der Maxwellschen Gleichungen für unseren Fall hätten wir für einen Punkt auf der positiven Seite der X-Achse:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{k} \cdot A e^{i(\omega t + p x)} - \mathfrak{k} \cdot A e^{i(\omega t - p x)}. \tag{8}$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit (7a) erhalten wir unmittelbar:

$$\int_{0}^{\infty} Q_0 (p R) d y = \frac{i \pi}{2 p} \cdot e^{-i p x_1}. \tag{9}$$

Die magnetische Kraft berechnet sich aus (9) § 2 folgendermaßen. Die Summe der normalen Komponente von $V \mathfrak{R}_0 \mathfrak{k}$ für zwei gleiche und entgegengesetzte y ist Null. Die entsprechende Summe der tangentialen Komponenten ist

$$- 2 \mathfrak{j} \cdot \cos (x R) = + 2 \mathfrak{j} \cdot \frac{x}{R}.$$

Demnach folgt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{j} \cdot \frac{A x}{\omega} e^{i(\omega t + p x)} - \mathfrak{j} \cdot \frac{2 A p^2 e^{i \omega t}}{\pi \omega} \int_{0}^{\infty} \frac{Q_1 (p R) x}{R} d y. \tag{10}$$

Andererseits erhalten wir aus (8)

$$\mathfrak{H} = \mathrm{j} \cdot \frac{A x}{\omega} e^{i(\omega t + p x)} + \mathrm{j} \cdot \frac{A p}{\omega} e^{i(\omega t - p x)}. \tag{11}$$

Ein Vergleich von (10) und (11) liefert uns wieder

$$\int_0^\infty \frac{x}{R} \cdot Q_1(pR)\, dy = -\frac{\pi}{2p} e^{-ipx_1}. \tag{12}$$

Wir hätten (12) direkt auch aus (9) durch Differentiation nach x erhalten können. Um eine Anwendung von (9) § 2 zu machen, schlugen wir den anderen Weg vor.

Der Ausdruck (9) zeigt wieder einmal die Richtigkeit des Integrals (9), § 2 und infolgedessen diejenige von (1) § 1, weil (9) auch direkt abgeleitet werden kann.[1])

Hier möge folgende wichtige Bemerkung folgen. Die linke Seite von (9) ändert sich nicht, ob wir x positiv oder negativ voraussetzen, da $R^2 = x^2 + y^2$ ist. Infolgedessen darf sich der Wert der rechten Seite von (9) auch nicht ändern; d. h. auf der rechten Seite von (9) müssen wir für x seinen absoluten Wert einsetzen, was auch durch den Index bei x hervorgehoben worden ist.

Stellen wir uns vor, daß wir statt der Ebene nur eine Halbebene hätten, die bis zur X-Achse ginge, und der Aufpunkt befände sich auf der negativen Seite der X-Achse. In diesem Falle kämen die Ausdrücke (9) § 2 in Betracht. Bei Ergänzung dieser Halbebene zu einer ganzen müßten diese Ausdrücke in (7a) und (10) übergehen und $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$ werden. Auf Grund obiger Bemerkung erhalten wir aber tatsächlich

$$\mathfrak{E} = \bar{\varkappa} \cdot A e^{i(\omega t - p x_1)} - \bar{\varkappa} \cdot A e^{i(\omega t - p x_1)} = 0$$

und infolgedessen auch $\mathfrak{H} = 0$.

Bis jetzt haben wir noch nichts über die Größenordnung der einfallenden Wellenlänge λ angenommen. Wir wollen dies einholen und setzen voraus, daß die Querschnitte bez. die Krümmungsradien der Körper, die unter die Voraussetzungen des § 2 fallen, sehr groß sind im Vergleich zur Wellenlänge,

---

1) Z. B. aus dem Integral (12), p. 255 bei Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen.

und zwar wollen wir Lichtwellen als einfallende Wellen annehmen.

Auf Grund dieser Voraussetzung wollen wir zwei Annahmen machen, die uns die Lösung vereinfachen, bez. überhaupt ermöglichen, und gestatten ziemlich gute Annäherungswerte für $\mathfrak{E}$ bez. $\mathfrak{H}$ zu berechnen.

Diese Annahmen sind folgende:

1. Wir wollen die Gültigkeit von (3) nicht nur für eine Ebene, sondern für beliebige Körper annehmen, solange die Körper, wie oben bemerkt, groß im Vergleich zu λ sind.

2. Das Experiment zeigt, daß die Lichterregung auf dem schattenseitigen Teile der Oberfläche der Körper Null ist. Deshalb wollen wir in (9) § 2 die Integration nur über die belichteten Teile der Körper ausdehnen.

Aus der ersten Annahme folgt, daß dieselbe nur gültig ist, falls die Körper eine solche Form haben, daß man annehmen kann, daß die von denselben reflektierten Wellen nicht wieder zu den Körpern gelangen. Dies ist anzunehmen z. B. bei einem Draht, begrenztem Parabolspiegel etc.

Auf Grund dieser Annahmen wollen wir jetzt die Diffraktionserscheinungen an einem Draht berechnen und mit der Beobachtung vergleichen.

§ 4. Diffraktion an einem Draht.

Wir wollen als Lichtquelle eine leuchtende Linie annehmen, welche sich praktisch durch einen engen leuchtenden Spalt realisieren läßt.

Als einfallende Welle nehmen wir eine Zylinderwelle an, und zwar unabhängig vom Winkel um den Spalt herum. Laut unserer Arbeit *A* erhalten wir:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{k} \cdot B e^{i\left(\omega t + p s - \frac{3\pi}{4}\right)} Q_0(p r_1), \\ \psi_1 = -\frac{Bp}{i\omega} e^{i\left(\omega t + p s - \frac{3\pi}{4}\right)} Q_1(p r_1), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{E}_1$ die einfallende elektrische Kraft ist, B die reelle Amplitude, r_1 die Entfernung vom Aufpunkt bis zum Spalt, und ψ_1 die magnetische Kraft senkrecht zu r_1 und positiv

gerechnet im entgegengesetzten Sinne der Drehung des Uhrzeigers um den Spalt. Der Draht, an welchem die auffallende Welle reflektieren soll, liege parallel zum Spalt in einer Entfernung s bis zur Achse des Drahtes, welcher mit der Z-Achse zusammenfallen soll. Die X-Achse ist zum Spalt gerichtet.

Da r_1 und s groß im Vergleich zu λ sein sollen, so können wir schreiben

$$Q_0(pr_1) = i\sqrt{\frac{\pi}{2pr_1}}\, e^{-i\left(pr_1 - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$Q_1(pr_1) = -\sqrt{\frac{\pi}{2pr_1}}\, e^{-i\left(pr_1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

und infolgedessen, da $i = e^{i\pi/2}$ ist:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{k}\cdot\dfrac{e^{i\omega t}\cdot B}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r_1}}\, e^{-ip(r_1 - s)}, \\ \psi_1 = -\dfrac{Bp\cdot e^{i\omega t}}{2\omega}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r_1}}\, e^{-ip(r_1 - s)}, \end{cases}$$

für $r_1 = s$, also im Koordinatenanfang, ist

$$(3)\qquad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{k}\cdot e^{i\omega t}\cdot\frac{B}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} = \mathfrak{k}\cdot A' e^{i\omega t}.$$

A' ist hierbei reell, weswegen wir auch in (1) die Phase $ps - 3\pi/4$ eingeführt hatten.

Infolge der Lage des Spaltes bezüglich des Drahtes wird die positive Richtung von ψ_1 am Drahte, bei der Voraussetzung, daß s groß zum Durchmesser $2g$ des Drahtes ist, mit der negativen Richtung der Y-Achse zusammenfallen und wir können deshalb für die Oberfläche des Drahtes annehmen:

$$(4)\qquad \varphi' = \frac{Bp}{\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\cdot\cos\varphi\, e^{-ip(r_1 - s)},$$

wo φ den Winkel zwischen der positiven Richtung der X-Ache und dem Radius g bedeutet.

Wir nehmen jetzt die Gleichungen (9) § 2 zur Hilfe, in welchen wir wieder statt R, r, statt s, S schreiben, die Indizes z und m fortlassen und erhalten:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{k} \,.\, B e^{i\omega t}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\, e^{-ip(r_1 - s)} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{p\lambda}{4\pi}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \int\limits_S \frac{e^{-ip(r+r_1-s)}\cos\varphi \,.\, dS}{\sqrt{r \,.\, r_1}}\right], \\ \mathfrak{H} = B \,.\, e^{i\omega t}\left[- V\mathfrak{r}_{10}\,\mathfrak{k} \cdot \frac{p}{2\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\, e^{-ip(r_1 - s)} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{p\, e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\omega} \int\limits_S \frac{e^{-ip(r+r_1-s)}\, V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{k}_0 \cos\varphi\, dS}{\sqrt{r \,.\, r_1}}\right], \end{cases}$$

wo $\mathfrak{r}_{10}$ der Einheitsvektor längs r_1 ist und $\mathfrak{r}_0$ derjenige längs r bedeuten. Bezeichnen wir durch R die Entfernung des Aufpunktes bis zur Achse des Drahtes und setzten R, r und r_1 groß zu g voraus, so können wir unter den Integralen in (5) statt $\sqrt{r \,.\, r_1}$, $\sqrt{Rs}$ schreiben und aus den Integralen herausheben. Aus demselben Grund können wir statt $V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{k}$, $V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{k}$ setzen und aus dem Integral herausheben. $\mathfrak{R}_0$ bedeutet den Einheitsvektor längs R.

Infolgedessen erhalten wir statt (5), da $dS = g\,d\varphi$ ist:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{k} \,.\, B e^{i\omega t}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\, e^{-ip(r_1 - s)} - \frac{p\lambda \,.\, e^{\frac{i\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{Rs}} \cdot D\right], \\ \mathfrak{H} = B \,.\, e^{i\omega t}\left[- V\mathfrak{r}_{10}\,\mathfrak{k} \,.\, \frac{p}{2\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\, e^{-ip(r_1 - s)} + \frac{V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{k} \,.\, p\, e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\omega\sqrt{Rs}} \cdot D\right] \end{cases}$$

wo

$$(7)\qquad D = g \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-ip(r+r_1-s)} \cos\varphi \,.\, d\varphi$$

bedeutet. Dabei sollte die Integration, laut der Annahme am Schluß des vorigen Paragraphen, nur längs des belichteten Teiles der Oberfläche des Drahtes ausgedehnt werden; da aber s groß zu g ist, so kann man mit genügender Annäherung von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ integrieren, denn man vernachlässigt nur sehr kleine Oberflächenteile des Drahtes, bei welchen ohnehin $\cos\varphi$ annähernd Null ist.

Für die Oberfläche des Drahtes können wir mit großer Annäherung setzen:

$$(8)\quad \begin{cases} r_1 = s + \frac{g^2}{4s} - g\cos\varphi - \frac{g^2}{4s}\cos 2\varphi \\ \text{und} \\ r = R + \frac{g^2}{4R} - g\cos(\varphi - \vartheta) - \frac{g^2}{4R}\cos 2(\varphi - \vartheta), \end{cases}$$

wo ϑ den Winkel zwischen der positiven Richtung der X-Achse und R bedeutet.

Wir wollen jetzt statt ϑ, $\pi - s$ setzen und s klein annehmen. Mit anderen Worten, wir wollen die Diffraktionserscheinungen auf der negativen Seite der X-Achse beobachten, also hinter dem Drahte im Sinne der Lichtbewegung, und zwar in kleinen Entfernungen von der X-Achse.

Setzen wir in (8) $\vartheta = \pi - s$ und $\cos s = \cos 2s = 1$, so erhalten wir

$$(8a)\quad \begin{cases} r + r_1 - s = R + \frac{g^2}{4}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s}\right) - g\sin\varphi \,.\, \sin s \\ \qquad - \frac{g^2}{4}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s}\right)\cos 2\varphi + \frac{g^2}{4R}\sin 2\varphi \,.\, \sin 2s. \end{cases}$$

Vernachlässigen wir endlich das letzte Glied, so können wir endgültig schreiben:

$$(9)\quad D = g\,.\,e^{-ipa}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{+ipg\sin\varphi\,.\,\sin s + ipb\cos 2\varphi}\,.\cos\varphi\,.\,d\varphi,$$

wo

$$(10)\quad \begin{cases} a = R + \frac{g^2}{4}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s}\right) \\ \text{und} \\ b = \frac{g^2}{4}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s}\right) \end{cases}$$

sind.

Statt (9) können wir setzen:

$$(9a)\quad D = g\,.\,e^{-ipR}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{+ipg\sin\varphi\,.\,\sin s - 2ipb\sin^2\varphi}\,d(\sin\varphi).$$

Dieses Integral läßt sich leicht umformen, und zwar:

$$(9b)\quad D = \frac{g\sqrt{\pi}}{2\sqrt{pb}}\,.\,e^{-i(pR - t^2)}\int_n^u e^{-\frac{i\pi}{2}t^2}\,dt,$$

wo

$$(11)\qquad \begin{cases} u = +\sqrt{\frac{4pb}{\pi}} - l\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ n = -\sqrt{\frac{4pb}{\pi}} - l\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \text{und} \\ l = \frac{pg \cdot \sin \varepsilon}{2\sqrt{2pb}} \end{cases}$$

sind.

Wir können aber annehmen:

$$(12)\qquad \begin{cases} b = \frac{g^2(R+s)}{4Rs} = \frac{g^2 r_1}{4Rs} \\ \text{und} \\ \sin \varepsilon = \frac{d}{R}, \end{cases}$$

wo d die Entfernung des Aufpunktes von der X-Achse bedeutet. Dann folgt

$$(13)\qquad D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda Rs}{r_1}} \cdot e^{-i(pR-P)} \int_n^u e^{-\frac{i\pi}{2}t^2} dt,$$

und

$$(14)\qquad \begin{cases} u = m - q; \quad n = -m - q, \\ m = g\sqrt{\frac{2r_1}{\lambda Rs}}; \quad q = d\sqrt{\frac{2s}{\lambda R r_1}}, \\ l^2 = \frac{\pi d^2 s}{\lambda R r_1} = \frac{q^2 \pi}{2}. \end{cases}$$

Sind M und N reelle Größen, so können wir statt (13) auch schreiben:

$$(15)\qquad D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda Rs}{r_1}}\, e^{-i(pR-P)}(M - iN),$$

wo

$$(16)\qquad \begin{cases} M = C(m-q) + C(m+q), \\ N = S(m-q) + S(m+q) \end{cases}$$

sind. Dabei sind C und S nichts anderes als die bekannten Fresnelschen Integrale zwischen den Grenzen 0 bis $m-q$, bez. $m+q$.

Wir wollen noch einmal zu dem Integral (7) dieses Paragraphen zurückkehren. Setzen wir dort statt $r + r_1$, Δ,

wo Δ nichts anderes ist als die sogenannte optische Weglänge, so können wir schreiben:

$$D = \text{proportional zu } \int_S e^{-ip\Delta} \cos(\mathfrak{H} S)\, dS, \tag{17}$$

da s konstant ist.

Hätten wir aber statt des Drahtes einen anderen Zylinderkörper, z. B. einen parabolischen Zylinder, so kämen wir zu demselben Ausdruck (17). Befände sich außerdem der Aufpunkt im Bildpunkt des Spaltes, so wäre $\Delta = \text{const.}$ und wir hätten dann

$$D = \text{proportional zu } \int_S \cos(\mathfrak{H} S)\, dS. \tag{18}$$

Dieses Integral hängt nur von der geometrischen Form der reflektierenden Körper und von der Lage des Spaltes zu den Körpern ab.

Aus obigen Erörterungen sieht man, wie es möglich ist, in ganz konsequenter Weise aus den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen zu den Begriffen der geometrischen Optik überzugehen.

Setzen wir jetzt in (6) die Werte von D und A' aus (15) und (3), so erhalten wir:

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{k} \cdot A' e^{i\omega t}\left\{e^{-ip(r_1 - s)} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\eta}(M - iN)\right\}, \\ \mathfrak{H} = \dfrac{A' e^{i\omega t}}{c}\left\{-V \mathfrak{r}_{10} \mathfrak{k} \cdot e^{-ip(r_1 - s)} + \dfrac{V \mathfrak{R}_0 \mathfrak{k} \cdot \sqrt{2}}{2} e^{i\eta}(M - iN)\right\} \end{cases} \tag{19}$$

wo

$$\eta = \frac{\pi}{4} - pR + l^2 \tag{20}$$

ist.

§ 5. Berechnung des Energiestromes und der Energie.

Es seien gegeben zwei Vektoren:

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i(\omega t + p)}(f + ih), \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i(\omega t + p)}(f_1 + ih_1), \end{cases} \tag{1}$$

wo f, h, $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ reelle Größen bedeuten.

Wir wollen jetzt das Produkt $V\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ bez. $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ aus den reellen Teilen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und davon den Mittelwert während einer Periode bilden:

$$(2)\qquad \frac{1}{T}\int_0^T V\mathfrak{E}\mathfrak{H}\,.\,dt, \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{E}\mathfrak{H}\,dt = \tfrac{1}{2}(ff_1 + hh_1).$$

Rechts muß noch der Faktor $V\mathfrak{E}_0\mathfrak{H}_0$ bez. $\mathfrak{E}_0\mathfrak{H}_0$ eingeführt werden, je nachdem, ob das Vektorprodukt oder das skalare Produkt genommen wird. Zu demselben Ausdruck (2) kommen wir, falls wir in (1), z. B. bei $\mathfrak{E}$, statt i, $-i$ setzen, dann mit $\mathfrak{H}$ multiplizieren vektoriell oder skalar, den imaginären Teil des Produktes weglassen und durch 2 dividieren.

Auf Grund des Poyntingschen Satzes und der Gleichungen (19) § 4 erhalten wir jetzt leicht den Mittelwert des Energiestromes $\mathfrak{E}$, welcher durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit fließt. Es ist

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = -\dfrac{A'^2}{8\pi c}\Big\{\mathfrak{r}_{10} + \dfrac{\mathfrak{R}_0}{2}(M^2 + N^2) \\ \qquad - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}_{10})\,(M\cos\gamma + N\sin\gamma)\Big\}, \end{cases}$$

wobei

$$(4)\qquad \gamma = p(r_1 - s - R) + l^2 + \frac{\pi}{2}$$

ist.

Wir können aber setzen

$$(5)\qquad r_1 - s - R = -\frac{d^2 s}{2Rr_1}$$

und folglich ist laut (14) § 4

$$\gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Da außerdem ε klein ist, so können wir $\mathfrak{r}_{10} = \mathfrak{R}_0 = i$ annehmen und bekommen deshalb endgültig

$$(6)\qquad \mathfrak{E} = -\frac{i\,A'^2}{8\pi c}\Big\{1 + \frac{(M^2 + N^2)}{2} - (M + N)\Big\}.$$

Oder

$$(6a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = -\dfrac{i\,.\,A'^2}{8\pi c}\Big\{1 + \dfrac{C^2(m-q) + S^2(m-q)}{2} + \dfrac{C^2(m+q) + S^2(m+q)}{2} \\ \qquad + C(m-q)\,.\,C(m+q) + S(m-q)\,.\,S(m+q) \\ \qquad - [C(m-q) + S(m-q)] - [C(m+q) + S(m+q)]\Big\}. \end{cases}$$

Der Differentialquotient von $\mathfrak{E}$ nach d ist proportional zu $\sin\pi m q$. Deshalb werden unter anderem Maximas bez. Minimas von $\mathfrak{E}$ für Werte von d vorkommen, bei welchen

$$(7)\qquad q m = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

ist, wobei

$$q\,m = \frac{2\,g\,d}{\lambda\,R} \tag{8}$$

ist.

Für die geometrische Schattengrenze haben wir:

$$d = \frac{r_1\,g}{s} \tag{9}$$

und folglich

$$m = g\sqrt{\frac{2\,r_1}{\lambda\,R\,s}} = q\,. \tag{10}$$

Demnach folgt für diesen Fall:

$$\mathfrak{E}_s = -\frac{i\,.\,A'^2}{8\,\pi\,c}\left\{1 + \frac{C^2(2m) + S^2(2m)}{2} - [C(2m) + S(2m)]\right\}. \tag{11}$$

Für $d = 0$, also auf der X-Achse in der Mitte des geometrischen Schattens, berechnet sich der Energiestrom, da $q = 0$ ist, zu

$$\mathfrak{E}_0 = -\frac{i\,.\,A'^2}{8\,\pi\,c}\left\{1 + 2\,[C^2(m) + S^2(m)] - 2\,[C(m) + S(m)]\right\}, \tag{12}$$

und zwar wird $\mathfrak{E}_0$ immer ein Maximalwert sein.

Setzen wir

$$D = \alpha + i\beta,$$

wo α und β reell sind, so erhalten wir aus (6) § 4 folgenden Wert für den Energiestrom

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{E} = -\frac{A'^2}{8\,\pi\,c}\Big\{&\mathfrak{r}_{10} + \frac{\mathfrak{R}_0\,.\,r_1\,.\,(\alpha^2+\beta^2)}{\lambda\,R\,s} \\ &- (\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}_{10})\sqrt{\frac{r_1}{\lambda\,R\,s}}\,.\,(\alpha\cos\delta - \beta\sin\delta)\Big\},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

wo

$$\delta = p\,(r_1 - s) + \frac{\pi}{4} \tag{14}$$

ist. Und dieser Wert (13) ist, wie auch (6) § 4, für beliebige Winkel ϑ gültig.

Wir gehen jetzt über zur Berechnung des Mittelwertes W der Energie in einem Volumenelement. Es folgt wieder aus (6) § 4 für den elektrischen Teil der Energie

$$W_1 = \frac{A'^2}{16\,\pi\,c^2}\left\{1 + \frac{r_1\,(\alpha^2+\beta^2)}{\lambda\,R\,s} - 2\sqrt{\frac{r_1}{\lambda\,R\,s}}\,(\alpha\cos\delta - \beta\sin\delta)\right\}, \tag{15}$$

und für den magnetischen Teil

$$(16)\quad \left\{ W_2 = \frac{A'^2}{16\pi c^2}\left\{1 + \frac{r_1(\alpha^2+\beta^2)}{\lambda R s} - \Re_0 \mathfrak{r}_{10} \cdot 2\sqrt{\frac{r_1}{\lambda R s}}(\alpha\cos\delta - \beta\sin\delta)\right\}.\right.$$

Und die gesamte Energie ist

$$(17)\quad W = W_1 + W_2.$$

Vor dem Draht, also bei $\vartheta = 0$, ist $\Re_0 + \mathfrak{r}_{10} = 0$ und $\Re_0 \mathfrak{r}_{10} = -1$. In diesem Falle besteht der Energiestrom aus zwei Teilen. Der erste Teil kommt vom Spalt und der zweite vom Draht. Demnach erhalten wir, da hier $\mathfrak{r}_{10} = \mathfrak{i}$ ist,

$$(18)\quad \mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{i} A'^2}{8\pi c}\left\{1 - \frac{r_1(\alpha^2+\beta^2)}{\lambda R s}\right\}$$

und

$$(19)\quad W = \frac{A'^2}{8\pi c^2}\left\{1 + \frac{r_1(\alpha^2+\beta^2)}{\lambda R s}\right\}.$$

Hinter dem Draht, für $s = 0$, ist $\Re_0 + \mathfrak{r}_{10} = 2$ und

$$W_1 = W_2,$$

$$(20)\quad W = 2 W_1$$

und

$$(21)\quad \mathfrak{E} = -\mathfrak{i}\, 2 c W_1.$$

Wir sehen, daß es nur für $s = 0$ möglich ist, aus der Energie bez. Quadrat der elektrischen Kraft den Energiestrom zu berechnen. Identifizieren wir aber den Poyntingschen Strömungsvektor mit dem Lichtstrahl, so müssen wir immer mit dem Ausdruck (13) rechnen.

§ 6. Ausrechnung der gewonnenen Resultate.

Bei der Verwertung der gewonnenen Resultate kommt es hauptsächlich auf die Berechnung des Energiestromes $\mathfrak{E}$ an, denn die Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ an und für sich bieten wohl kaum ein Interesse. Dies ist hauptsächlich der Fall bei Lichtwellen, die wir gerade berücksichtigen.

Wir wollen also $\mathfrak{E}$ berechnen laut (6), (6a), (11) und (12) § 5. Dabei wollen wir nur die Klammerwerte dieser Ausdrücke in Betracht ziehen, welche nichts anderes sind als die Verhältnisse der tatsächlich durchgegangenen Energie zu der-

jenigen, welche bei Abwesenheit des reflektierenden Drahtes durchgehen würde, denn diese letztere ist ja gleich

$$\frac{-r_{10} \cdot A'^2}{8\pi c} \quad \text{bez.} \quad \frac{-i \cdot A'^2}{8\pi c}.$$

Diese Klammernwerte wollen wir im folgenden schlechtweg Energie nennen und mit $\mathfrak{E}'$ bezeichnen.

Zur Erleichterung der Berechnung von $\mathfrak{E}'$ nach (6) und (6a) haben wir die Tab. I zusammengestellt. Dabei wurden die Werte der Fresnelschen Integrale weiter berechnet für die Argumente von 5,0 bis 8,5. Die ersten 50 Werte sind dem Handbuch d. Physik von Winkelmann, 2. Aufl. Bd. VI. p. 1054 entnommen.

Die vorletzte Kolumne stellt den Klammerwert von (12) § 5 dar, und die letzte denjenigen von (11) § 5. Da

$$m = g\sqrt{\frac{2r_1}{\lambda R s}} = g\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s}\right)}$$

ist, so vergrößert sich m bei konstantem g, λ und s, je näher wir dem Drahte kommen, dagegen verkleinert sich $\mathfrak{E}_0'$ ständig, wie wir aus der Tabelle ersehen. Das heißt bei konstantem g, λ und s wird das mittlere Maximum im geometrischen Schatten desto kleiner, je näher wir zum Draht kommen.

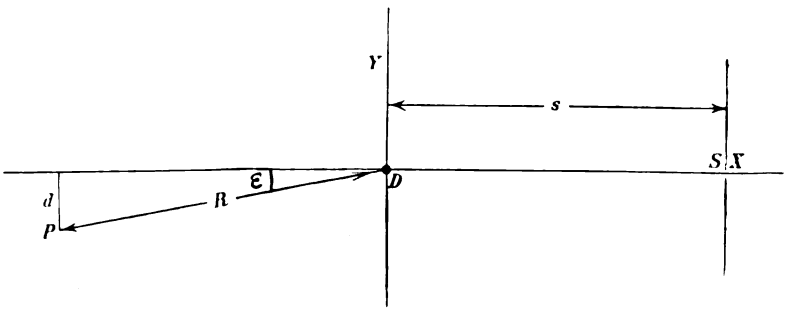


Fig. 1.

Für das Folgende sei noch auf die Fig. 1 hingewiesen, welche die Lagen des Aufpunktes P, des Spaltes S und des Drahtes D veranschaulicht. Die Figur stellt den Schnitt durch die Z-Achse dar und fällt mit der XY-Ebene zusammen.

Tabelle I.

u	$C(u)$	Log $C(u)$	$S(u)$	Log $S(u)$	$\frac{C^2(u)+S^2(u)}{2}$	$C(u)+S(u)$	$\mathfrak{E}_0'$	$\mathfrak{E}_s'$
0	0	$-\infty$	0	$-\infty$	0	0	1,0000	1,0000
0,1	0,0999	$\bar{2}$,999565	0,0005	$\bar{4}$,698970	0,0050	0,1004	0,8192	0,8159
0,2	0,1999	$\bar{1}$,300813	0,0042	$\bar{3}$,623249	0,0200	0,2041	0,6717	0,6487
0,3	0,2994	$\bar{1}$,476252	0,0141	$\bar{2}$,149219	0,0449	0,3135	0,5527	0,4833
0,4	0,3975	$\bar{1}$,599337	0,0334	$\bar{2}$,523746	0,0796	0,4309	0,4564	0,3201
0,5	0,4923	$\bar{1}$,692230	0,0647	$\bar{2}$,810904	0,1232	0,5570	0,3791	0,1820
0,6	0,5811	$\bar{1}$,764251	0,1105	$\bar{1}$,043362	0,1749	0,6916	0,3165	0,1114
0,7	0,6597	$\bar{1}$,819346	0,1721	$\bar{1}$,235781	0,2324	0,8318	0,2660	0,1454
0,8	0,7230	$\bar{1}$,859138	0,2493	$\bar{1}$,396722	0,2924	0,9723	0,2252	0,2667
0,9	0,7648	$\bar{1}$,883548	0,3398	$\bar{1}$,531223	0,3592	1,1046	0,1916	0,3710
1,0	0,7799	$\bar{1}$,892039	0,4383	$\bar{1}$,641771	0,4002	1,2182	0,1643	0,3465
1,1	0,7648	$\bar{1}$,883548	0,5365	$\bar{1}$,729570	0,4364	1,3013	0,1429	0,2144
1,2	0,7154	$\bar{1}$,854549	0,6234	$\bar{1}$,794767	0,4502	1,3388	0,1234	0,1713
1,3	0,6386	$\bar{1}$,805229	0,6863	$\bar{1}$,836514	0,4394	1,3249	0,1082	0,2830
1,4	0,5431	$\bar{1}$,734880	0,7135	$\bar{1}$,853394	0,4020	1,2566	0,0949	0,3269
1,5	0,4453	$\bar{1}$,648653	0,6975	$\bar{1}$,843544	0,3424	1,1428	0,0840	0,2046
1,6	0,3655	$\bar{1}$,562887	0,6383	$\bar{1}$,805025	0,2705	1,0038	0,0744	0,2251
1,7	0,3238	$\bar{1}$,510277	0,5492	$\bar{1}$,739731	0,2032	0,8730	0,0669	0,3203
1,8	0,3363	$\bar{1}$,526727	0,4509	$\bar{1}$,654080	0,1582	0,7872	0,0584	0,2138
1,9	0,3945	$\bar{1}$,596047	0,3734	$\bar{1}$,572174	0,1475	0,7679	0,0543	0,2466
2,0	0,4883	$\bar{1}$,688687	0,3434	$\bar{1}$,535800	0,1782	0,8317	0,0493	0,2937
2,1	0,5814	$\bar{1}$,764475	0,3743	$\bar{1}$,573220	0,2391	0,9557	0,0449	0,2004
2,2	0,6362	$\bar{1}$,803594	0,4556	$\bar{1}$,658584	0,3062	1,0918	0,0410	0,2023

Tabelle I (Fortsetzung).

u	$C(u)$	Log $C(u)$	$S(u)$	Log $S(u)$	$\frac{C^2(u)+S^2(u)}{2}$	$C(u)+S(u)$	$\mathfrak{E}_0'$	$\mathfrak{E}_*'$
2,3	0,6268	$\bar{1}$,797129	0,5525	$\bar{1}$,742332	0,3491	1,1793	0,0377	0,2107
2,4	0,5550	$\bar{1}$,744293	0,6197	$\bar{1}$,792181	0,3460	1,1747	0,0347	0,2869
2,5	0,4574	$\bar{1}$,660296	0,6192	$\bar{1}$,791831	0,2963	1,0766	0,0320	0,2206
2,6	0,3889	$\bar{1}$,589838	0,5500	$\bar{1}$,740363	0,2219	0,9389	0,0297	0,2840
2,7	0,3926	$\bar{1}$,593950	0,4529	$\bar{1}$,656002	0,1796	0,8455	0,0275	0,2161
2,8	0,4675	$\bar{1}$,669782	0,3915	$\bar{1}$,592732	0,1859	0,8590	0,0257	0,2908
2,9	0,5624	$\bar{1}$,750045	0,4102	$\bar{1}$,612996	0,2423	0,9726	0,0239	0,2135
3,0	0,6057	$\bar{1}$,782258	0,4963	$\bar{1}$,695744	0,3066	1,1020	0,0224	0,2782
3,1	0,5616	$\bar{1}$,749427	0,5818	$\bar{1}$,764774	0,3269	1,1434	0,0210	0,2476
3,2	0,4663	$\bar{1}$,668665	0,5933	$\bar{1}$,773274	0,2847	1,0596	0,0197	0,2282
3,3	0,4057	$\bar{1}$,608205	0,5193	$\bar{1}$,715418	0,2171	0,9250	0,0185	0,2851
3,4	0,4385	$\bar{1}$,641970	0,4297	$\bar{1}$,633165	0,1885	0,8682	0,0174	0,2377
3,5	0,5326	$\bar{1}$,726401	0,4153	$\bar{1}$,618362	0,2281	0,9479	0,0165	0,2284
3,6	0,5880	$\bar{1}$,769377	0,4923	$\bar{1}$,692230	0,2941	1,0803	0,0156	0,2780
3,7	0,5419	$\bar{1}$,733919	0,5750	$\bar{1}$,759668	0,3121	1,1169	0,0147	0,2628
3,8	0,4481	$\bar{1}$,651375	0,5656	$\bar{1}$,752509	0,2603	1,0137	0,0140	0,2236
3,9	0,4223	$\bar{1}$,625621	0,4752	$\bar{1}$,676876	0,2021	0,8975	0,0133	0,2363
4,0	0,4984	$\bar{1}$,697578	0,4205	$\bar{1}$,623766	0,2126	0,9189	0,0126	0,2708
4,1	0,5737	$\bar{1}$,758685	0,4758	$\bar{1}$,677424	0,2778	1,0495	0,0120	0,2759
4,2	0,5417	$\bar{1}$,733759	0,5632	$\bar{1}$,750663	0,3053	1,1049	0,0115	0,2531
4,3	0,4494	$\bar{1}$,652633	0,5540	$\bar{1}$,743510	0,2544	1,0034	0,0110	—
4,4	0,4383	$\bar{1}$,641771	0,4623	$\bar{1}$,664924	0,2029	0,9006	0,0105	—
4,5	0,5258	$\bar{1}$,720821	0,4342	$\bar{1}$,637690	0,2325	0,9600	0,0100	—

Tabelle I (Fortsetzung).

u	$C(u)$	Log $C(u)$	$S(u)$	Log $S(u)$	$\frac{C^2(u)+S^2(u)}{2}$	$C(u)+S(u)$	$\mathfrak{E}_0'$	$\mathfrak{E}_1'$
4,6	0,5672	$\bar{1}$,753736	0,5162	$\bar{1}$,712818	0,2941	1,0834	0,0096	—
4,7	0,4914	$\bar{1}$,691435	0,5669	$\bar{1}$,753506	0,2814	1,0583	91	—
4,8	0,4338	$\bar{1}$,637290	0,4968	$\bar{1}$,696182	0,2175	0,9306	88	—
4,9	0,5002	$\bar{1}$,699144	0,4351	$\bar{1}$,638589	0,2198	0,9353	84	—
5,0	0,5636	$\bar{1}$,750971	0,4992	$\bar{1}$,698275	0,2834	1,0628	81	—
5,1	0,4987	$\bar{1}$,697839	0,5624	$\bar{1}$,750045	0,2825	1,0611	78	—
5,2	0,4389	$\bar{1}$,642366	0,4969	$\bar{1}$,696269	0,2198	0,9358	75	—
5,3	0,5078	$\bar{1}$,705693	0,4404	$\bar{1}$,643847	0,2260	0,9482	72	—
5,4	0,5573	$\bar{1}$,746089	0,5140	$\bar{1}$,710963	0,2874	1,0713	70	—
5,5	0,4784	$\bar{1}$,679791	0,5537	$\bar{1}$,743275	0,2677	1,0321	67	—
5,6	0,4517	$\bar{1}$,654850	0,4700	$\bar{1}$,672098	0,2125	0,9217	65	—
5,7	0,5385	$\bar{1}$,731186	0,4595	$\bar{1}$,662286	0,2506	0,9980	64	—
5,8	0,5298	$\bar{1}$,724112	0,5461	$\bar{1}$,737272	0,2894	1,0759	60	—
5,9	0,4484	$\bar{1}$,651666	0,5163	$\bar{1}$,712902	0,2338	0,9647	58	—
6,0	0,4995	$\bar{1}$,698535	0,4469	$\bar{1}$,650210	0,2246	0,9464	56	—
6,1	0,5495	$\bar{1}$,739968	0,5165	$\bar{1}$,713070	0,2844	1,0660	54	—
6,2	0,4676	$\bar{1}$,669875	0,5398	$\bar{1}$,732233	0,2550	1,0074	53	—
6,3	0,4760	$\bar{1}$,677607	0,4555	$\bar{1}$,658488	0,2170	0,9315	51	—
6,4	0,5496	$\bar{1}$,740047	0,4965	$\bar{1}$,695919	0,2743	1,0461	49	—
6,5	0,4816	$\bar{1}$,682686	0,5454	$\bar{1}$,736715	0,2647	1,0270	48	—
6,6	0,4690	$\bar{1}$,671173	0,4631	$\bar{1}$,665675	0,2172	0,9321	46	—
6,7	0,5467	$\bar{1}$,737749	0,4915	$\bar{1}$,619524	0,2702	1,0382	45	—
6,8	0,4831	$\bar{1}$,684037	0,5436	$\bar{1}$,735279	0,2644	1,0267	44	—

Tabelle I (Fortsetzung).

u	$C(u)$	Log $C(u)$	$S(u)$	Log $S(u)$	$\frac{C^2(u)+S^2(u)}{2}$	$C(u)+S\,u)$	$\mathfrak{E}_0'$	$\mathfrak{E}_s'$
6,9	0,4732	$\bar{1}$,675045	0,4624	$\bar{1}$,665018	0,2189	0,9356	0,0043	—
7,0	0,5455	$\bar{1}$,736795	0,4997	$\bar{1}$,698709	0,2786	1,0452	41	—
7,1	0,4733	$\bar{1}$,675137	0,5360	$\bar{1}$,729165	0,2557	1,0093	40	—
7,2	0,4887	$\bar{1}$,689042	0,4572	$\bar{1}$,660106	0,2239	0,9459	39	—
7,3	0,5393	$\bar{1}$,731830	0,5199	$\bar{1}$,715920	0,2806	1,0592	39	—
7,4	0,4601	$\bar{1}$,662852	0,5161	$\bar{1}$,712734	0,2390	0,9762	37	—
7,5	0,5160	$\bar{1}$,712650	0,4607	$\bar{1}$,663418	0,2393	0,9767	36	—
7,6	0,5156	$\bar{1}$,712313	0,5389	$\bar{1}$,731508	0,2781	1,0545	35	—
7,7	0,4628	$\bar{1}$,665393	0,4820	$\bar{1}$,683047	0,2232	0,9448	34	—
7,8	0,5395	$\bar{1}$,731991	0,4896	$\bar{1}$,689841	0,2654	1,0291	33	—
7,9	0,4760	$\bar{1}$,677607	0,5323	$\bar{1}$,726156	0,2550	1,0083	32	—
8,0	0,4998	$\bar{1}$,698796	0,4602	$\bar{1}$,662947	0,2308	0,9600	32	—
8,1	0,5228	$\bar{1}$,718336	0,5320	$\bar{1}$,725912	0,2781	1,0548	31	—
8,2	0,4638	$\bar{1}$,666331	0,4859	$\bar{1}$,686547	0,2256	0,9497	30	—
8,3	0,5378	$\bar{1}$,730621	0,4932	$\bar{1}$,693023	0,2662	1,0310	29	—
8,4	0,4709	$\bar{1}$,672929	0,5243	$\bar{1}$,719580	0,2483	0,9952	29	—
8,5	0,5142	$\bar{1}$,711132	0,4653	$\bar{1}$,667733	0,2405	0,9795	28	—

Anmerkung. Die Werte der Fresnelschen Integrale für die Argumente von 5,0 bis 8,5 wurden berechnet laut:

$$C(u) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi u}\sin\frac{\pi}{2}u^2 - \frac{1}{\pi^2 u^5}\cos\frac{\pi}{2}u^2,$$

$$S(u) = 0{,}5 - \frac{1}{\pi u}\cos\frac{\pi}{2}u^2 - \frac{1}{\pi^2 u^5}\sin\frac{\pi}{2}u^2.$$

Auf Grund der Tab. I wurden die Energien berechnet für drei Fälle

(1) $$m = 0{,}5; \quad m = 1{,}5; \quad m = 3{,}0,$$

wobei als Argument q betrachtet wurde, denn bei gegebenem R, λ, g und s ist m konstant und $\mathfrak{E}'$ nur eine Funktion von q, bez. von d.

Die Resultate der Rechnung sind in den Tabb. II, III und IV niedergelegt.

Tabelle II.

($m = 0{,}5$.)

q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$
0,0	0,3791	3,0	1,1523	4,7	1,1767	6,4	1,0289
0,3	0,2816	3,1	0,8750	4,8	1,0634	6,5	0,9036
0,5	0,1820	3,2	0,7471	4,9	0,8377	6,6	1,0599
0,6	0,1628	3,3	0,8606	5,0	0,9361	6,7	0,9651
0,9	0,4162	3,4	1,0871	5,1	1,1695	6,8	0,8764
1,2	1,0863	3,5	1,1917	5,2	1,0732	6,9	1,0741
1,5	1,3455	3,6	1,0998	5,3	0,8606	7,0	1,0545
1,8	1,1547	3,7	0,9580	5,4	0,9753	7,1	0,8815
2,0	1,0693	3,8	0,9231	5,5	1,1198	7,2	1,0969
2,1	1,0641	3,9	0,9682	5,6	1,0037	7,3	1,0006
2,2	1,0087	4,0	0,9881	5,7	0,9297	7,4	0,9298
2,4	0,8101	4,1	0,9973	5,8	1,0174	7,5	1,0870
2,5	0,7483	4,2	1,0598	5,9	1,0258	7,6	0,9557
2,6	0,8340	4,3	1,0855	6,0	1,0051	7,7	0,9969
2,7	1,0561	4,4	0,9662	6,1	0,9898	7,8	1,0285
2,8	1,2793	4,5	0,8613	6,2	0,9604	7,9	0,9810
2,9	1,3313	4,6	0,9952	6,3	1,0502	8,0	0,9973

Tabelle III.

($m = 1{,}5$.)

q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$
0,0	0,0840	0,5	0,0598	1,0	0,0511	1,5	0,2046
0,1	0,0660	0,6	0,1099	1,1	0,1047	1,6	0,2325
0,2	0,0284	0,7	0,1081	1,2	0,1894	1,7	0,3585
0,3	0,0061	0,8	0,0790	1,3	0,2379	1,8	0,6307
0,4	0,0167	0,9	0,0356	1,4	0,2807	1,9	0,6651

Tabelle III (Fortsetzung).

q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$
2,0	0,6718	3,3	0,8657	4,6	1,0796	5,9	0,9261
2,1	0,6842	3,4	0,8401	4,7	1,0536	6,0	0,9848
2,2	0,8030	3,5	0,7838	4,8	0,9980	6,1	1,0305
2,3	1,0537	3,6	0,9158	4,9	0,8306	6,2	1,1174
2,4	1,2764	3,7	1,1764	5,0	0,9307	6,3	0,9071
2,5	1,3391	3,8	1,2446	5,1	1,1558	6,4	0,8705
2,6	1,2720	3,9	1,1091	5,2	1,0821	6,5	1,1056
2,7	1,2508	4,0	1,0468	5,3	0,9878	6,6	1,0070
2,8	1,3481	4,1	1,0174	5,4	0,9633	6,7	0,9865
2,9	1,3929	4,2	0,8582	5,5	0,8779	6,8	0,9191
3,0	1,2207	4,3	0,7969	5,6	1,0471	6,9	1,0799
3,1	0,9482	4,4	1,0200	5,7	1,1660	7,0	1,0572
3,2	0,8288	4,5	1,1627	5,8	0,9488		

Tabelle IV.

($m = 3{,}0$.)

q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$	q	$\mathfrak{E}'$
0,0	0,0224	1,4	0,0244	2,8	0,1376	4,2	1,4324
0,1	0,0077	1,5	0,0091	2,9	0,2187	4,3	1,2845
0,2	0,0021	1,6	0,0321	3,0	0,2782	4,4	1,3034
0,3	0,0207	1,7	0,0406	3,1	0,2687	4,5	1,1967
0,4	0,0102	1,8	0,0173	3,2	0,3760	4,6	0,9427
0,5	0,0007	1,9	0,0356	3,3	0,4950	4,7	0,9400
0,6	0,0165	2,0	0,0610	3,4	0,5037	4,8	0,7795
0,7	0,0223	2,1	0,0485	3,5	0,6455	4,9	0,7756
0,8	0,0038	2,2	0,0453	3,6	0,8279	5,0	0,8786
0,9	0,0214	2,3	0,0892	3,7	0,8500	5,1	0,3150
1,0	0,0280	2,4	0,0800	3,8	0,9776	5,2	1,1574
1,1	0,0119	2,5	0,0731	3,9	1,2281	5,3	1,1540
1,2	0,0075	2,6	0,1347	4,0	1,2023	5,4	1,1875
1,3	0,0307	2,7	0,1517	4,1	1,3346	5,5	1,1106

Zur besseren Übersicht sind diese Tabellen auch graphisch dargestellt (Fig. 2).

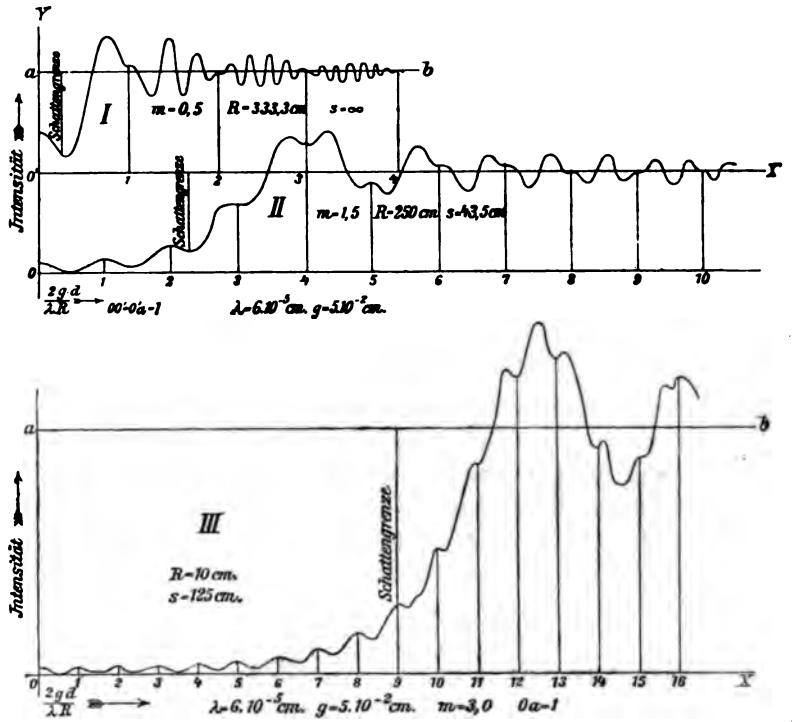


Fig. 2.

Die Maßstäbe der Kurven I und II sind gleich. Die Linie $O'X'$ dient als Abszisse für die Kurve I. Auf den Abszissen wurden die Werte von q aufgetragen und auf den Ordinaten diejenigen der Intensitäten in demselben Maßstabe. Deshalb stellen die Geraden $O'X'$ bez. ab die Intensität des einfallenden Lichtes dar, bei Abwesenheit des reflektierenden Drahtes. Die Zahlen auf den Abszissen bedeuten die Werte von $q\,m = 2\,g\,d/\lambda\,R$. Was die Kurve III anbetrifft, so gilt das eben Gesagte auch für sie, nur daß der Maßstab der Intensität bei ihr doppelt so groß ist, als derjenige von q. Die Kurven I, II und III stellen demnach die Intensität des durchgehenden Lichtes dar bei variablem d auf der einen

Seite der X-Achse. Auf der anderen Seite wird die Verteilung der Intensität dieselbe sein, da der Vorgang um die X-Achse symmetrisch ist.

Die Tabb. II, III und IV und demnach auch die entsprechenden Kurven sind gültig für beliebige R, λ, g und s, solange nur (1) erfüllt bleibt. Um bestimmte Fälle herauszugreifen, haben wir folgende Werte für diese Größen angenommen:

Nr.	m	λ	R	g	s
1	0,5	$6 \cdot 10^{-5}$ cm	333,3 cm	$5 \cdot 10^{-2}$ cm	∞
2	1,5	„	250,0 „	„	43,5 cm
3	3,0	„	10,0 „	„	125,0 „

Alle drei Fälle wurden praktisch realisiert, wobei bei Nr. 1 zwischen Spalt und Draht ein Objektiv ($F = 250$ mm) eingeschaltet wurde, in dessen Brennebene sich der Spalt befand. Dadurch wurde praktisch s auf ∞ gebracht. Es wurde mit der Lupe beobachtet und auch photographische Aufnahmen gemacht, wo mit Genüge die Übereinstimmung der Theorie und Praxis bestätigt wurde.

Was Nr. 3 anbelangt, so sei nebenbei bemerkt, daß er mit dem von Verdet[1]) angegebenen Beispiel übereinstimmt. Nach Verdet sollen im geometrischen Schatten 17 Streifen zu erwarten sein. Die Kurve III und die Beobachtung bestätigen dies.

Betrachten wir die Kurven näher, so sehen wir, daß im geometrischen Schatten für diejenigen Werte von d, welche sich aus (7) § 5 berechnen, Maxima der Energie entsprechen, während außerhalb des geometrischen Schattens für diese Werte von d sowohl Maxima wie Minima, als auch Inflexionswerte der Energie auftreten können. Außerdem bemerkt man, daß außerhalb des Schattens die Energie ständig um den Wert 1 mit abnehmender Amplitude oszilliert.

Man kann auch die Werte von $\mathfrak{E}'$ mit Hilfe der Cornuschen Spirale graphisch ermitteln. Und zwar ist bekanntlich

1) E. Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes 1. p. 264. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

$M^2 + N^2$ gleich dem Quadrate der Entfernung der Punkte $u = m - q$ und $n = -m - q$ der Spirale. Was die Summe $M + N$ anbetrifft, so ist dieselbe, wie dies leicht zu beweisen ist, nichts anderes als die Projektion obiger Entfernung auf die Verbindungslinie zwischen den beiden asymptotischen Punkten der Spirale, falls man hierbei als Längeneinheit die Hälfte obiger Verbindungslinie annimmt.

Wir wollen die Anzahl der Maximas bez. der Streifen im geometrischen Schatten bestimmen. Bezeichnen wir durch ν die größte ganze Zahl, welche noch im m^2 enthalten ist[1]) und die Anzahl der Streifen durch w, so ist

$$w = 2\nu + 1, \tag{2}$$

was leicht aus (7) und (10) § 5 zu ersehen ist.

Zum Schluß möchten wir noch bemerken, daß die Werte von $\mathfrak{C}_0'$ der Tab. I, welche aus (12) § 5 berechnet sind, mit größerer Annäherung den Tatsachen entsprechen werden als die anderen Werte von $\mathfrak{C}'$. Denn bei $\mathfrak{C}_0'$ ist $d = \varepsilon = 0$ und folglich fallen die Glieder, welche von ε abhängen, in (8a) § 4 von selber weg, außerdem ist in (4) § 5

$$r_1 - s - R = 0 \quad \text{und} \quad l^2 = 0.$$

§ 7. Zusammenfassung.

Wir haben aus dem allgemeinen Integral (1) § 1 die Ausdrücke (9) und (10) § 2 abgeleitet, welche allgemein gültig sind für alle Fälle, die bei den Voraussetzungen 1 bis 5 § 2 möglich sind.

Durch eingehende Diskussion der Reflexion an einer Ebene kamen wir zu Annahmen, welche uns weitere Lösungen ermöglichten. Die Ableitung des Integrals (9) § 3 bestätigt die Richtigkeit des allgemeinen Integrals (1) § 1.

Die Resultate der Berechnung des § 6 bestätigen die Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment. Wie bei der Fresnelschen Theorie, so auch hier ergeben sich die Werte für d, für die Lagen der Maxima im geometrischen Schatten, gleich

$$d = \frac{\lambda R}{2g} n,$$

1) Ist m^2 selbst eine ganze Zahl, so ist in (2) statt ν, $\nu - 1$ zu setzen, wie z. B. bei Nr 3.

wo n eine ganze Zahl ist. Nur sind unsere Resultate eine konsequente Ableitung aus der Maxwellschen Theorie, was der Hauptzweck dieser Arbeit war.

Weiter ist in § 4 auf den Übergang von der Maxwellschen Theorie zu den Begriffen der geometrischen Optik hingewiesen, und zwar für allgemeinere Fälle, als derjenige der Reflexion an einem Draht.

Zum Schluß möchte ich noch der Firma E. Leitz in Wetzlar meinen besten Dank für ihr gütiges Entgegenkommen bei der Ausführung des experimentellen Teiles dieser Arbeit aussprechen.

Wetzlar, den 24. Juli 1907.

(Eingegangen 25. Juli 1907.)

5. *Berechnung des Widerstandes eines Drahtes bei der Reflexion von elektromagnetischen Wellen; von W. v. Ignatowsky.*

Ich schließe mich im folgenden an meine frühere Arbeit[1]) an und möchte hier den Widerstand R berechnen für die Einheit der Länge des Drahtes für den ersten Fall, d. h. die einfallende elektrische Kraft ist parallel zum Draht.

Die im Draht absorbierte Energie ist laut (24) p. 519 gleich:

$$(1) \qquad E = \frac{A^2 \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{3/2}}{32 \cdot \pi^2 g \sqrt{\sigma'}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \left(\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2} = J^2 . R .$$

Demnach ist der Widerstand R:

$$(2) \qquad R = \frac{E}{J^2},$$

wo J den effektiven Strom bedeutet.

Der momentane Wert J' des Stromes berechnet sich aus (6) und (8) p. 502 zu

$$J' = \frac{g}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\psi' + \psi)\, d\varphi = \frac{\varkappa \cdot e^{i\omega t} g}{2 i \omega} \{B_0 \cdot Q_0'(\varkappa g) + A J_0'(\varkappa g)\},$$

oder laut (2) p. 513 und (18) p. 500

$$J' = \frac{A \varkappa g e^{i\omega t}}{2 i \omega} \left\{ J_0'(\varkappa g) - \frac{J_0(\varkappa g)\, Q_0'(\varkappa g)}{Q_0(\varkappa g)} \right\} = - \frac{A e^{i\omega t}}{2 i \omega\, Q_0(\varkappa g)}.$$

Da $\varkappa g$ klein ist, was bei der Berechnung von E in (1) auch vorausgesetzt wurde, so können wir schreiben:

$$J' = - \frac{A e^{i\omega t}}{2 i \omega \left[\frac{i\pi}{2} + \lg \frac{\pi g \gamma}{\lambda} \right]}.$$

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 505. 1905.

Bezeichnen wir den reellen Teil von J' durch $\Re(J')$, so ist

$$J^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \Re^2(J')\,dt = \frac{A^2\lambda^2}{32\pi^2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\left(\lg\frac{\pi g\gamma}{\lambda}\right)^2+\frac{\pi^2}{4}}.$$

Hieraus und (2) bestimmt sich R:

$$R = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma'\lambda}} = \sqrt{\frac{\omega R'}{2}}, \tag{3}$$

wo R' den Ohmschen Widerstand der Einheit der Länge des Drahtes bedeutet.

Dieser letzte Ausdruck stimmt vollständig mit dem Thomsonschen Wert[1]), falls wir dort $b = \infty$ und $\mu = 1$ setzen, überein.

Wetzlar, den 22. Juli 1907.

---

1) J. J. Thomson, Notes on Recent Researches in Elektr. and Magn. 43. p. 295.

(Eingegangen 25. Juli 1907.)

6. *Über die Abhängigkeit der Wärmeleitung einiger Gase und Dämpfe von der Temperatur*[1]; *von E. Pauli.*

§ 1. Einleitung.

Den Anlaß zu nachfolgend mitgeteilter Arbeit gaben folgende Tatsachen: Durch Winkelmann[2]) waren im Jahre 1876 die Temperaturkoeffizienten einer Reihe von Dämpfen untersucht worden, und zwar gründeten sich diese Untersuchungen auf die Voraussetzung, daß Luft und Wasserstoff in bezug auf die Wärmeleitung dieselbe Abhängigkeit von der Temperatur besitzen. Bei den damals angestellten Versuchen war, wie sich später[3]) herausstellte, der Temperaturkoeffizient der beiden Gase zu hoch gefunden worden. Den Grund hierfür vermutet Winkelmann in der durch die Apparate bedingten ungenauen Bestimmung der Siedetemperaturen. Da gleichzeitig mit diesen Bestimmungen der Temperaturkoeffizienten für Luft und Wasserstoff die Temperaturkoeffizienten für Ammoniak, Alkohol-, Äther-, Wasser- und Schwefelkohlenstoffdampf ermittelt worden waren, so ist anzunehmen, daß auch die Werte für die Temperaturkoeffizienten dieser Dämpfe sich zu hoch ergeben hatten; und zwar einmal wegen der schon erwähnten Fehler in den Siedepunktsbestimmungen, bezüglich deren noch zu bemerken ist, daß die damaligen Glasapparate nicht frei von thermischen Nachwirkungen waren, dann aber auch noch aus folgendem Grunde: In die Formel zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten obengenannter Dämpfe ging jedesmal eine Größe A ein, welche das konstante Leitungsverhältnis der Luft (oder des Wasserstoffs) bei ca. 108° zu der bei ca. 8° darstellte; diese Zahl A ist aber, wie Winkelmann selbst später gezeigt hat[4]),

1) Auszug aus der gleichnamigen Dissertation. Jena 1907.
2) A. Winkelmann, Pogg. Ann. **159.** p. 177. 1876.
3) A. Winkelmann, Wied. Ann. **19.** p. 679. 1883.
4) A. Winkelmann, Wied. Ann. **19.** p. 663. 1883.

zu groß, und daraus folgt gemäß der Formel, daß auch die Temperaturkoeffizienten genannter Dämpfe sich zu hoch ergeben mußten. Es sei noch bemerkt, daß die eben erwähnte Ungenauigkeit zum Teil kompensiert wurde durch eine Zahl m, die ebenfalls in die damals verwandte Formel zur Berechnung der Leitungskonstanten einging; es war nämlich m zu klein angenommen worden; hierauf wird später noch eingegangen werden.

Da die später in genauerer Weise ermittelten Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung für Luft und Wasserstoff um etwa 0,0008 kleiner sind als die zuerst im Jahre 1876 gefundenen — 0,00277 —, so kann man versuchen, eine entsprechende Korrektion an den Temperaturkoeffizienten der untersuchten Dämpfe anzubringen; die Korrektur ist einfach so angebracht, daß an jedem beobachteten Koeffizienten der Wert 0,0008 subtrahiert ist.

Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung.

	beobachtet	nach Korrektion berechnet
Wasserdampf	0,00439	0,00359
Alkohol	0,00615	0,00535
Schwefelkohlenstoff . .	0,00572	0,00492
Ammoniak	0,00513	0,00433
Äther	0,00701	0,00621

Die korrigierten Werte der vorliegenden Tabelle sind naturgemäß mit einer großen Unsicherheit behaftet. Der Zweck dieser Arbeit, die durch Hrn. Geheimrat Winkelmann angeregt wurde, war daher, die Temperaturkoeffizienten von Ammoniak, sowie der Dämpfe von Alkohol, Äther, Wasser und Schwefelkohlenstoff tunlichst mit Ausschluß aller angeführten Fehlerquellen von neuem zu bestimmen und zu sehen, inwieweit die nach Korrektion berechneten mit den neuen Werten übereinstimmten. Sehr erleichtert wurden die neuen Bestimmungen, da inzwischen eine — auch von Winkelmann angegebene — Methode[1]) gefunden worden war, die es gestattete, die Untersuchungen auch ohne die Annahme durchzuführen, daß Luft und Wasserstoff denselben Temperatur-

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. **19.** p. 656. 1883.

koeffizienten der Wärmeleitung besitzen. Ferner waren die neuen Apparate aus Jenaer Normalglas verfertigt, bei denen thermische Nachwirkungen fast gänzlich vermieden sind. Auch in bezug auf die Bestimmung der Null- und Siedepunkte war eine ausreichende Genauigkeit — $^1/_{100}{}^0$ — ermöglicht worden. In den Formeln schließlich, die zur Berechnung der Temperaturkoeffizienten dienen, kommen nach der neuen Methode nur noch Glieder vor, die durch direkte, bei den Untersuchungen selbst ermittelte Zahlenwerte bestimmt werden, so daß ein Zurückgreifen auf früher gefundene Werte unnötig wird.

§ 2. Methode der Untersuchung.

Ein in einer kälteren Umgebung befindlicher Körper gibt seine Wärme durch eine Gas- oder Dampfschicht hindurch auf dreierlei Weise ab, nämlich erstens durch Wärmeleitung des Mediums — also hier Gas oder Dampf —, zweitens durch Strömung und drittens durch Strahlung. Den Einfluß der Strömungen kann man durch Anwendung genügend kleiner Drucke beseitigen; so waren — bei den Versuchen mit Luft — die Resultate für das logarithmische Dekrement der Abkühlungsgeschwindigkeit bei einem Drucke von 20 mm nicht merklich von den Werten verschieden, die bei einem Drucke von 8,9 mm erhalten wurden, ein Beweis dafür, daß bei 20 mm Druck der Einfluß der Strömungen schon verschwindend klein ist. — Der Anteil der Wärmeabgabe durch Strahlung kann eliminiert werden, indem man denselben Körper in zwei verschieden großen Hüllen sich abkühlen läßt, es ist nämlich in beiden Fällen die Strahlung gleich groß. Es sei v_1 die Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers in der Hülle I und v_2 diejenige in der Hülle II. Dann ist[1]):

$$v_1 = l_\tau \cdot f_1 + r_\tau$$

und

$$v_2 = l_\tau \cdot f_2 + s_\tau .$$

Dabei ist l_τ die Wärmeleitungskonstante des Mediums für die Temperatur τ; in f_1 gehen die Dimensionen des sich abkühlenden Körpers und der Hülle I ein; f_2 hat die entsprechende Bedeutung für die Hülle II. Die Strahlungsgröße s_τ, bezogen

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. 44. p. 177. 1891.

auf die Temperatur τ, ist für beide Fälle dieselbe. Aus den beiden Gleichungen ergibt sich:

$$v_1 - v_2 = l_\tau \cdot (f_1 - f_2). \tag{1}$$

Für eine höhere Temperatur T seien die Abkühlungsgeschwindigkeiten V_1 und V_2 in den Hüllen I und II. Es ist dann wieder:

$$V_1 = l_T \cdot f_1 + s_T$$

und

$$V_2 = l_T \cdot f_2 + s_T.$$

Daraus folgt:

$$V_1 - V_2 = l_T \cdot (f_1 - f_2). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$\frac{V_1 - V_2}{v_1 - v_2} = \frac{l_T}{l_\tau} = A.$$

Es ist also A das Verhältnis der Leitungsfähigkeiten des zu untersuchenden Mediums bei den Temperaturen T und τ; letztere waren bei den später mitgeteilten Versuchen so gewählt, daß sie sich um ca. 100° C. voneinander unterschieden.

§ 3. Die Erzeugung und Fortleitung des Dampfes im Apparat.

Um den Dampf luftfrei zu erhalten, mußte er notwendigerweise in dem Apparate selbst entwickelt werden. Dies wurde auf folgende Art erreicht.[1]) Man füllte die Flüssigkeit in kleine Kölbchen, schmolz den engen Stiel mit einer Stichflamme zu und brachte das nun gefüllte Kölbchen in einen an die Quecksilberluftpumpe angekitteten Dampfkolben, der so lange in einem Ölbade erhitzt wurde, bis das Kölbchen platzte. Zur Orientierung über die ganze Anordnung diene die beigegebene Skizze (Fig. 1). Die Quecksilberluftpumpe steht durch die Ventilröhre R in Verbindung mit der Hauptleitung $A\,B$. Von dieser zweigen verschiedene Röhren ab, die zu folgenden Apparaten führen: Zunächst sind ein Manometer M_1 und ein Gefäß G mit Phosphorsäureanhydrid, welches zum Trocknen dient, angesetzt; dann folgt bei C eine Ab-

1) Vgl. Höfker, Über die Wärmeleitung der Dämpfe von Aminbasen, Diss. 1893 und W. Hennsgen, Über die Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung der Dämpfe von Aminbasen, Diss. 1905.

zweigung, durch die Luft in den Apparat eingeleitet werden kann. Durch den Hahn 2 kann die Leitung von allen übrigen Teilen abgeschlossen werden. Zwei weitere Abzweigungen, die durch Hahn 3 getrennt werden können, führen zu dem Schwefelsäuregefäß S; die Wirkung desselben wird noch erläutert werden. Der Dampfkolben D, in dem das mit Flüssigkeit gefüllte Kölbchen durch Erhitzen zum Zerspringen gebracht wird, kann durch Hahn 7 von der Leitung abgeschlossen

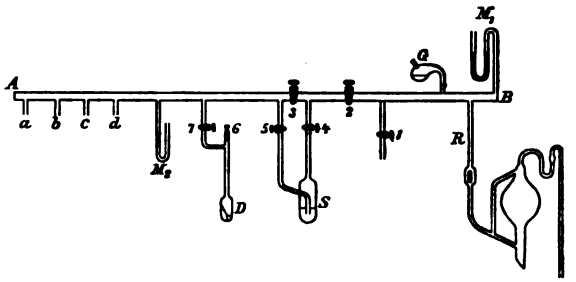


Fig. 1.

werden. Ein zweites Manometer M_2 gestattet, den Druck bis 120 mm abzulesen. An den Abzweigungen a, b, c, d sind mehrfach gebogene, lange Glasröhren angekittet, die zu den Glasapparaten hinführen, welche zur Bestimmung der Wärmeleitung dienen. Die Füllung der Apparate geht folgendermaßen vor sich: Nachdem das gefüllte Kölbchen in den Dampfkolben D gebracht worden ist, werden alle Hähne, mit Ausnahme von 1, geöffnet und das Ganze so weit wie möglich evakuiert. Dann schließt man Hahn 7 und erhitzt den Dampfkolben D in einem Ölbade so lange, bis das Kölbchen platzt und der Dampf sich in D entwickeln kann. Dann schließt man die Hähne 3 und 5 und läßt nun durch kurzes Öffnen des Hahnes 7 Dampf in die Apparate einströmen; der Druck wird bei M_2 abgelesen. Öffnet man nun Hahn 5, so wird der Dampf durch die Schwefelsäure getrieben und teilweise absorbiert; gleichzeitig werden aber auch die letzten Spuren von Luft aus den Apparaten entfernt. Dann schließt man wieder Hahn 5, läßt neuen Dampf in die Apparate einströmen und wiederholt die Operation mehrere Male, bis man sicher sein kann, daß nur noch reiner Dampf in der Leitung und den

Apparaten ist. Zeigt das Manometer M_2 den gewünschten Druck, so werden die Apparate abgeschmolzen und sind nun zu den Beobachtungen bereit.

Allgemein hat man zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten die Gleichung

$$l_t = l_0(1 + \gamma t).$$

Für die beiden Temperaturen τ und T ist daher:

$$l_\tau = l_0(1 + \gamma \tau)$$

und

$$l_T = l_0(1 + \gamma T),$$

daher:

$$\frac{l_T}{l_\tau} = \frac{1 + \gamma T}{1 + \gamma \tau} = A.$$

Daraus ergibt sich der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung:

(3) $$\gamma = \frac{A - 1}{T - A \cdot \tau}.$$

§ 4. Beobachtung der Abkühlungsgeschwindigkeiten.

Die Form der zur Beobachtung der Abkühlungsgeschwindigkeit dienenden Apparate ist in Fig. 2 wiedergegeben. Sie bestehen im wesentlichen aus Thermometern mit kugelförmigen oder zylinderförmigen Gefäßen, die in eine Glashülle eingeschmolzen sind. Der zwischen dem Thermometergefäß und der sie umgebenden Glashülle befindliche Raum kann durch eine seitlich angesetzte, rechtwinklig umgebogene Röhre mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt werden. Von den mit 1, 5, 7, 8 bezeichneten Apparaten waren 1 und 7 mit engen, 5 und 8 mit weiten Hüllen versehen, so daß bei der Berechnung Apparat 1 mit 5 und Apparat 7 mit 8 zu kombinieren war. Da es darauf ankam, die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur zu ermitteln, so mußten die Abkühlungsgeschwindigkeiten in zwei verschiedenen Temperaturen beobachtet werden; als zweckmäßig ergaben sich von selbst Schmelz- und Siedetemperatur des Wassers. In schmelzendem Eis wurde die Abkühlungsgeschwindigkeit im Intervall von 20° bis 10°, in siedendem Wasser von 120° bis 110° beobachtet, und zwar wurde mit einem elektrischen Registrier-

apparat jedesmal der Augenblick markiert, in welchem man die Quecksilberkuppe hinter dem Gradstrich des Thermometers verschwinden sah. Vor den Versuchen wurden die Apparate auf 30° bez. 130° erwärmt; ersteres geschah in einem Wasser-, letzteres in einem Luftbade. Die später angegebenen Formeln für die Abkühlungsgeschwindigkeit v und weiterhin für den Temperaturkoeffizienten γ zeigen eine starke Empfindlichkeit für die Temperaturen τ und T; es mußte also bei den Versuchen besonderer Wert auf eine möglichst genaue Temperaturbestimmung bez. möglichstes Konstanthalten des Bades gelegt werden. Die Versuche in Eis wurden in einem Gemisch von zerkleinerten Eisstücken und Wasser ausgeführt; um das Entstehen von wärmeren Schichten, die eine Verkleinerung der Abkühlungsgeschwindigkeit herbeigeführt hätten, zu vermeiden, wurde die Mischung während der Versuche durch fortgesetztes Rühren in Bewegung gehalten. — Die Eis- und Siedepunkte der Apparate wurden mit einem Fernrohre bestimmt, dessen Okular mit einer Trommelteilung versehen war, und mit Hilfe dessen eine Genauigkeit von $^1/_{100}{}^0$ erzielt werden konnte. Bei den Versuchen in siedendem Wasser wurde ein mit drei Öffnungen versehenes Siedegefäß verwandt. Die mittlere, große Öffnung diente zur Aufnahme des in einen Kork eingespannten Apparates. In die zweite Öffnung kam ein in Zehntelgrade geteiltes Thermometer, an dem die Temperatur des siedenden Wassers abgelesen wurde; durch die dritte, mit einem Rohr versehene Öffnung konnte der sich entwickelnde Wasserdampf abziehen. Da die Tiefe des Eintauchens sich bei den Ablesungen bemerkbar macht, so mußte dafür gesorgt werden,

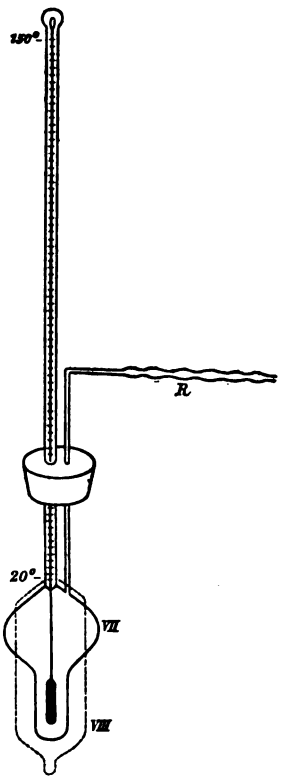


Fig. 2.

daß die Apparate und das Vergleichsthermometer in siedendem Wasser stets gleich tief eintauchten. — Zu den Siedepunktsbestimmungen diente ein doppelwandiger Metallzylinder, der auf einen kleinen Siedekessel aufgesetzt war; der sich bildende Wasserdampf konnte nach Passieren des Zylinders durch eine seitliche Röhre abziehen. Dadurch, daß das Kondensationswasser aufgefangen und direkt in den Kessel zurückgeführt wurde, konnte der zu untersuchende Apparat ca. 2 Stunden in Dampf stehen, ohne daß neues Wasser zugeführt wurde.

§ 5. Formeln.

Ist die konstante Temperatur des Bades, in der die Abkühlung des Apparates stattfindet, gleich ϑ, und werden die Zeitmomente beobachtet, bei denen das sich abkühlende Thermometer die Temperaturen $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_n$ zeigt, so daß der Apparat die Temperatur

τ_0 zeigt zur Zeit 0,
τ_1 „ „ „ t_1,
. . . . . .
τ_n „ „ „ t_n,

so ist die Abkühlungsgeschwindigkeit für die einzelnen Intervalle[1])

$$v_1 = \frac{\log \text{nat}\,(\tau_0 - \vartheta) - \log \text{nat}\,(\tau_1 - \vartheta)}{t_1},$$

oder

$$v_1 . \log e = \frac{\log (\tau_0 - \vartheta) - \log (\tau_1 - \vartheta)}{t_1},$$

ebenso:

$$v_2 . \log e = \frac{\log (\tau_0 - \vartheta) - \log (\tau_2 - \vartheta)}{t_2},$$

. . . . . .

$$v_n . \log e = \frac{\log (\tau_0 - \vartheta) - \log (\tau_n - \vartheta)}{t_n}.$$

Winkelmann hat darauf aufmerksam gemacht, daß die nach dieser Formel berechneten Werte in derselben Beobachtungsweise mit abnehmender Temperatur ebenfalls stetig abnehmen, weil nämlich das Wärmeleitungsvermögen und die Strahlung selbst mit der Temperatur stetig abnehmen. Winkel-

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. 11. p. 481. 1880.

mann bildete daher den Mittelwert sämtlicher Werte von v und zeigte, für welche Temperatur der so berechnete Wert gilt. Es war also der Mittelwert:

$$\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

Aber auch dieser Wert gibt die Beobachtungen nicht mit der erreichbaren Genauigkeit wieder, was leicht einzusehen ist. Der Wert von v hängt ab von der beobachteten Abkühlungszeit t; ein Fehler in dieser Zeitbestimmung wird aber einen um so größeren Einfluß auf v ausüben, je kleiner die Zeit ist. Nimmt man daher das arithmetische Mittel aus den Werten von v, so haben die Fehler, die bei den kleinen Abkühlungszeiten gemacht wurden, einen größeren Einfluß auf das Endresultat, als die Fehler, welche bei der Beobachtung der größeren Zeiten begangen sind. Winkelmann half diesem Übelstand ab, indem er jedem Werte von v das ihm seiner Genauigkeit nach zukommende Gewicht beilegte. Die endgültige Formel, deren Ableitung hier übergangen sei, lautet:

$$v \,.\log e = \frac{n.\log(\tau_0 - \vartheta) - [\log(\tau_1 - \vartheta) + \log(\tau_2 - \vartheta) + \ldots + \log(\tau_n - \vartheta)]}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n}.$$

Der sich auf diesen Wert von $v \,.\log e$ beziehende Wert der Mitteltemperatur ist:

$$T = \frac{\tau_0 + \vartheta}{2} - \frac{t_1 + 2\,t_2 + 3\,t_3 + \ldots + n\,t_n}{4\,(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)}.$$

In den nachfolgenden Angaben sind die Werte der Mitteltemperaturen, die sich auf die Versuche mit Eis beziehen, mit τ, und diejenigen, welche sich auf die Versuche mit siedendem Wasser beziehen, mit T bezeichnet.

§ 6. Beobachtungen.

Vor der Bestimmung der Temperaturkoeffizienten von Alkohol-, Äther-, Schwefelkohlenstoff- und Wasserdampf wurden diejenigen von Luft und Kohlensäure ermittelt. Wie schon hervorgehoben wurde, sind die Versuche mit Luft bei zwei verschiedenen Drucken, nämlich 20 mm und 9 mm angestellt worden; es ergab sich, daß die Werte der Abkühlungsgeschwindigkeiten sowohl in Eis als auch in siedendem Wasser für die beiden Drucke nirgends einen prozentualen Unterschied

von 0,3 Proz. erreichten; damit war erwiesen, daß der Anteil der Wärmeabgabe durch Strömungen bei einem Drucke von 20 mm schon verschwindend klein war. Es wurden dann bei der Berechnung des Temperaturkoeffizienten aus den Werten von $v \cdot \log e$ für die beiden Drucke einfach das Mittel genommen, was bei den geringen Differenzen wohl gestattet ist. Die Drucke bei der Bestimmung der Temperaturkoeffizienten von Alkohol-, Äther-, Schwefelkohlenstoffdampf und Ammoniak waren sämtlich ungefähr 9 mm, nur bei der Untersuchung des Wasserdampfes wurde ein Druck von 3,6 mm verwandt; letzteres war notwendig, da der Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei 0^0 nur 4,6 mm beträgt und der Druck der Dämpfe in den Apparaten stets unter ihrem Sättigungsdruck bei 0^0 gewählt werden mußte. Es machte sich hier eine Voruntersuchung notwendig und zwar aus folgendem Grunde: Nach der kinetischen Theorie der Gase wächst in einem bestimmten Volumen Gas mit abnehmendem Drucke, d. h. bei einer Verringerung der Anzahl der Moleküle die mittlere Weglänge eines Moleküls. Die gewöhnliche Theorie der Wärmeleitung ist ohne merklichen Fehler anwendbar, solange der Abstand der Wände, zwischen denen sich der Temperaturausgleich vollzieht, unendlich groß angenommen werden kann gegenüber der mittleren Weglänge. Es fragte sich nun, ob diese Bedingung bei einem Drucke von ca. 3 mm für die engen Apparate noch erfüllt war; bei den weiten Apparaten — 5 und 8 — schien dies kaum zweifelhaft. Es wurde deshalb bei zwei Apparaten, 7 (eng) und 8 (weit), eine Füllung mit Schwefelkohlenstoffdampf bei 3,6 mm vorgenommen. Stimmten die Werte für die Abkühlungsgeschwindigkeiten in Eis mit denen überein, die bei einem Drucke von 9 mm erhalten worden waren, so durften auch die Beobachtungen mit Wasserdampf bei einem so niedrigen Drucke vorgenommen werden. Es ergab sich:

	Druck 3,6 mm		Druck 9,3 mm	
Apparat 7	1177,5 1167,5 1169,5 1175,4 1174,9	Mittel 1173,0	1179,6 1173,8 1173,1 1168,5 1172,3	Mittel 1173,5

	Druck 3,6 mm		Druck 9,3 mm	
Apparat 8	1613,9 1616,3 1611,2 1607,9 1609,3	Mittel 1611,7	1604,3 1607,0 1616,6 1608,8	Mittel 1609,2

Aus diesen Werten geht hervor, daß auch die engen Apparate bei einem Drucke von 3,6 mm noch verwendbar waren. —

Bei der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten aller Dämpfe wurden stets zwei verschiedene Füllungen vorgenommen.[1] Denn da eine noch so genaue Prüfung der Quecksilberluftpumpe mit allen daranhängenden Apparaten auf ihre Dichtigkeit hin vor dem Füllen der Apparate keine Garantie dafür bot, daß nicht doch dem Dampf noch Luft beigemischt war, so war es zweckmäßig, eine zweite, von der ersten unabhängige Füllung der Apparate vorzunehmen. Stimmten die erhaltenen Endresultate für den Temperaturkoeffizienten bei den beiden Füllungen überein, so war damit für die Reinheit des Dampfes eine große Wahrscheinlichkeit gegeben. — Es sei bemerkt, daß bei der Beobachtung der Abkühlungsgeschwindigkeiten die Genauigkeit als hinreichend angesehen wurde, wenn die Summenwerte von 3—4 Beobachtungsreihen gut untereinander übereinstimmten, d. h. wenn sie nicht mehr wie 0,5—0,7 Proz. voneinander abwichen. Nach der Beendigung der Untersuchungen mit Alkoholdampf zeigte sich, daß diese Genauigkeit bei den Apparaten 5 und 8 (Abkühlung in siedendem Wasser, Füllung II) nicht erreicht war. Die Beobachtungen wurden deshalb wiederholt. Da die Werte der Summen der Abkühlungsgeschwindigkeiten in siedendem Wasser nicht direkt mit den früher angestellten Beobachtungen vergleichbar waren, so ergaben die neu angestellten Versuche neue Werte für die Temperaturkoeffizienten, die aber wenig von den anderen abwichen.

---

1) Die Untersuchungen mit Kohlensäure wurden nur mit einer Füllung vorgenommen.

	Apparat	Versuche in Eis		Versuche in siedendem Wasser		Wärmeleitungskonstante	Temperaturkoeffizient	Endwert des Temperaturkoeffizienten
		$v \cdot \log e$	t	$v \cdot \log e$	T	$A_{korr.}$	γ	
Luft	1	0,0023274	8,20°	0,0036111	108,00°	1,17096	0,001742	0,001970
	5	0,0015936	8,29	0,0027320	107,50			
	7	0,0026570	8,13	0,0039325	108,68	1,21720	0,002199	
	8	0,0015786	8,12	0,0025983	108,65			
Kohlensäure	1	0,0016714	8,20	0,0030203	108,45	1,4100	0,004253	0,004184
	5	0,0012500	8,20	0,0024032	107,49			
	7	0,0019583	8,16	0,0033066	108,60	1,4000	0,004116	
	8	0,0012564	8,12	0,0023076	108,53			
Alkoholdampf	1	0,0015750	8,20	0,0029974	107,90	1,5387	0,005665 (I)	0,005756
	5	0,0011870	8,199	0,0023843	107,44		0,005908 (II)	
	7	0,0018025	8,15	0,0032651	108,54	1,5456	0,005671 (I) (775)	
	8	0,0011883	8,12	0,0023000	108,47		0,005761 (II) (56)	
Ätherdampf	1	0,0015510	8,25	0,0030074	108,09	1,5912	0,006249 (I)	0,006315
	5	0,0011657	8,20	0,0023738	107,34		0,006533 (II)	
	7	0,0017803	8,15	0,0032867	108,43	1,5899	0,006180 (I)	
	8	0,0011722	8,12	0,0023033	108,37		0,006300 (II)	

	Apparat	Versuche in Eis		Versuche in siedendem Wasser		Wärmeleitungskonstante $A_{korr.}$	Temperaturkoeffizient γ	Endwert des Temperaturkoeffizienten
		$v \cdot \log e$	τ	$v \cdot \log e$	T			
Schwefelkohlenstoffdampf	1	0,0011157	8,20°	0,0021927	107,72°	1,4869	0,005112 (I)	0,005159
	5	0,0009209	8,20	0,0018925	107,17		0,005240 (II)	
	7	0,0012727	8,15	0,0023679	108,23	1,5007	0,005216 (I)	
	8	0,0009326	8,12	0,0018487	108,17		0,005071 (II)	
Wasserdampf	1	0,0018093	8,24	0,0031127	108,14	1,3584	0,003705 (I)	0,003688
	5	0,0012836	8,27	0,0023778	107,56		0,003619 (II)	
	7	0,0020523	8,20	0,0033595	108,71	1,3613	0,003810 (I)	
	8	0,0012937	8,16	0,0023090	108,57		0,003617 (II)	
Ammoniak	1	0,0021578	8,27	0,0037196	107,68	1,4224	0,004413 (I)	0,004385
	5	0,0014849	8,27	0,0027416	107,30		0,004586 (II)	
	7	0,0024697	8,20	0,0040274	108,41	1,4107	0,004240 (I)	
	8	0,0014971	8,15	0,0026334	108,36		0,004302 (II)	
Äthylamin	1	0,0016240	8,25	0,0031667	107,68	1,5947	0,006203 (I)	0,006113
	5	0,0011815	8,28	0,0024405	107,17		0,006097 (II)	
	7	0,0018486	8,20	0,0034066	108,27	1,5744	0,006020 (I)	
	8	0,0011983	8,15	0,0023662	108,24		0,006131 (II)	

Bezüglich der Berechnung der Leitungskonstanten A und des Temperaturkoeffizienten γ sei bemerkt, daß die Werte von $v.\log e$ bei Kombination zweier Apparate (etwa 1 und 5) natürlich auf gleiche Mitteltemperaturen τ und T zu reduzieren waren.

Weiterhin ist noch in bezug auf die Leitungskonstante A zu erwähnen, daß für dieselbe eine Korrektion notwendig ist, da der Wasserwert des Thermometergefäßes mit steigender Temperatur abnimmt; es verringert sich nämlich durch das Steigen der Quecksilbersäule in dem Thermometergefäße das Gewicht des Quecksilbers, dessen spezifische Wärme außerdem bei steigender Temperatur abnimmt. Bei den Temperaturen 100° und 0° ist — nach Winkelmann — das Verhältnis der Wasserwerte gleich 0,984 [1]), mit welchem Faktor A zu multiplizieren ist.

In der Tabelle p. 918 u. 919 sind aus dem umfangreichen Beobachtungsmaterial die wichtigsten Zahlen zusammengestellt: Für die Versuche in Eis und in siedendem Wasser sind die Werte für $v.\log e$ mit den dazu gehörigen Mitteltemperaturen τ und T angegeben und zwar für alle vier Apparate 1, 5, 7, 8. Es ist schon bemerkt worden, daß die Untersuchungen für Alkohol-, Äther-, Schwefelkohlenstoff- und Wasserdampf, ferner für Ammoniak mit zwei verschiedenen Füllungen ausgeführt wurden; die in der Tabelle angegebenen Werte von $v.\log e$ und die Mitteltemperaturen beziehen sich nur auf die erste Füllung; von der zweiten Füllung sind nur die Temperaturkoeffizienten aufgenommen. Bei den Untersuchungen mit Alkohol ergaben sich durch die schon erwähnten Kontrollversuche zwei weitere Werte für den Temperaturkoeffizienten; dieselben sind in Klammern an der betreffenden Stelle beigefügt. Außer diesen Werten sind ferner in die Tabelle noch aufgenommen die Wärmeleitungskonstanten A und die Endwerte des Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung, wie er sich aus den Einzelwerten ergibt.

Außer den Temperaturkoeffizienten der schon angeführten Gase und Dämpfe wurde auch noch derjenige von Äthylamin bestimmt; die betreffenden Werte stehen in der untersten Reihe der Tabelle.

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. **44.** p. 94. 1891.

Die Untersuchung mit Äthylamin war aus folgendem Grunde wünschenswert. Höfker[1]) und Henssgen[2]) haben durch ihre Untersuchungen gezeigt, daß die Wärmeleitungsfähigkeit und auch der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitung von Aminbasen abhängig ist von der Größe und Konstitution der Moleküle, die ihrerseits eine Änderung der mittleren Weglänge bedingen.

Es war von Henssgen nachgewiesen worden, daß bei Dämpfen metamerer Verbindungen die Konstitution des Moleküls insofern auf den Temperaturkoeffizienten von Einfluß ist, als der mehrfach alkylierten Base der größere Temperaturkoeffizient zukommt. Ferner war durch die Versuche festgestellt worden, daß bei den einfach alkylierten Basen: Methylamin, Äthylamin, Propylamin, Amylamin der Temperaturkoeffizient mit der Größe des Moleküls wächst; es mußten demnach den Dämpfen Temperaturkoeffizienten zukommen, die in derselben Reihenfolge wachsen, in der die eben angeführten Aminbasen stehen; der Temperaturkoeffizient des Äthylamin mußte somit zwischen denen des Methylamin und Propylamin liegen. Für Methylamin war $\gamma = 0{,}005671$ und für Propylamin $\gamma = 0{,}006166$ gefunden worden. Der Wert von γ für Äthylamin mußte also zwischen diesen beiden Zahlen liegen. Es ist aber nun von Henssgen für Äthylamin $\gamma = 0{,}006418$ gefunden worden, also ein zu großer Wert. Den Grund dafür glaubt Henssgen in der Verunreinigung der Substanz sehen zu dürfen. Henssgen hat nun den Wert für den Temperaturkoeffizienten von Äthylamin interpoliert und gleich 0,005900 berechnet. Durch die neue Bestimmung des Temperaturkoeffizienten von Äthylamin sollte festgestellt werden, inwieweit der von Henssgen interpolierte Wert von γ mit jenem übereinstimmte. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, hat sich der Temperaturkoeffizient zu $\gamma = 0{,}006113$ ergeben, ein Wert, der allerdings zwischen 0,005671 und 0,006166 liegt, sich aber stark dem letzteren, also dem Werte für Propylamin nähert; es wird danach ge-

---

1) Höfker, Über die Wärmeleitung der Dämpfe von Aminbasen, Diss. 1893.

2) W. Henssgen, Über die Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung der Dämpfe von Aminbasen, Diss. 1905.

stattet sein zu sagen, daß der von Henssgen interpolierte Wert ($\gamma = 0{,}005900$) etwas zu klein ist.

§ 7. Berechnung der Leitungskonstanten.

Die Wärmeleitungsfähigkeit eines Dampfes bei einer bestimmten Temperatur τ bezogen auf Luft = 1 bei derselben Temperatur τ kann man berechnen, indem man wieder den Anteil der Strahlung bei der Wärmeabgabe eliminiert. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: v_{1_l} und v_{1_d} seien die Abkühlungsgeschwindigkeiten des Apparates 1 bei der Mitteltemperatur τ, wenn der Apparat einmal mit Luft, das andere Mal mit Dampf gefüllt ist. Mit v_{5_l} und v_{5_d} werden dann die entsprechenden Größen für den Apparat 5 bezeichnet. Sind noch l und d die Wärmeleitungskonstanten der Luft bez. des Dampfes und haben f_1 und f_5 dieselbe Bedeutung wie auf p. 909, so ergibt sich:

$$v_{1_l} = l.f_1 + s_\tau, \qquad v_{5_l} = l.f_5 + s_\tau,$$
$$v_{1_d} = d.f_1 + s_\tau, \qquad v_{5_d} = d.f_5 + s_\tau.$$

Folglich ist:

$$v_{1_l} - v_{5_l} = l.(f_1 - f_5)$$

und

$$v_{1_d} - v_{5_d} = d.(f_1 - f_5)$$

und hieraus:

$$\frac{d}{l} = \frac{v_{1_d} - v_{5_d}}{v_{1_l} - v_{5_l}}.$$

Analog erhält man für die Apparate 7 und 8:

$$\frac{d}{l} = \frac{v_{7_d} - v_{8_d}}{v_{7_l} - v_{8_l}}.$$

Man erhält also für jeden Dampf zwei Werte für den Quotienten d/l, aus welchen dann das Mittel zu nehmen ist. Die Wertepaare von $v.\log e$ für die zu kombinierenden Apparate müssen natürlich zur Bestimmung der Leitungskonstanten auf dieselbe Mitteltemperatur bezogen werden; sie ist für alle Beobachtungen durchschnittlich 8,2°. Führt man die Rechnung durch, so ergeben sich die Leitungskonstanten, bezogen auf Luft = 1, wie folgt:

Luft	= 1
Alkohol	= 0,547
Äther	= 0,544
Wasserdampf	= 0,709
Schwefelkohlenstoff . . .	= 0,294
Ammoniak	= 0,916

Um einen Vergleich mit den von Winkelmann erhaltenen Resultaten zu ermöglichen, müssen die Werte der eben angegebenen Leitungskonstanten, die sich auf die Temperatur 8,2° beziehen, noch auf 7,5°, für welche die Winkelmannschen Werte berechnet sind, reduziert werden. Hierzu dient, wenn γ den Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung des Dampfes, β denjenigen der Luft bezeichnet, die Formel:

$$\frac{d_{7,5}}{l_{7,5}} = \frac{(1 + \gamma \,.\, 7{,}5) \,.\, (1 + \beta \,.\, 8{,}2) \,.\, d_{8,2}}{(1 + \gamma \,.\, 8{,}2) \,.\, (1 + \beta \,.\, 7{,}5) \,.\, l_{8,2}},$$

wobei $\beta = 0{,}0019705$ zu setzen ist. Demnach werden die Leitungskonstanten, auf 7,5° bezogen, für:

Luft	= 1
Alkohol	= 0,545
Äther	= 0,542
Wasserdampf	= 0,708
Schwefelkohlenstoff . . .	= 0,293
Ammoniak	= 0,914

Die von mir ermittelten Werte für das Verhältnis der Wärmeleitung der Dämpfe von Alkohol, Äther, Schwefelkohlenstoff, Wasser und Ammoniak zu Luft lassen sich nicht direkt vergleichen mit den Werten, welche früher Winkelmann für dieselben Dämpfe gefunden hat. Winkelmann gibt nämlich das Verhältnis der Wärmeleitung von Wasserstoff zu den genannten Dämpfen an, also den Wert w/x, der sich nach der Gleichung berechnet:

$$\frac{w}{x} = \frac{V_w - s}{V_x - s},$$

wobei V_w und V_x die Abkühlungsgeschwindigkeit für Wasserstoff und Dampf bedeuten. Die Strahlungsgröße s ließ sich nach der Formel berechnen:

$$s = V_l - \frac{V_w - V_l}{n - 1}.$$

V_1 ist die Abkühlungsgeschwindigkeit für Luft und n das Verhältnis der Leitungsfähigkeit des Wasserstoffs zu derjenigen der Luft. Aus früher angestellten Untersuchungen hatte sich $n = 6{,}33$ ergeben; diese Zahl wurde nun auch von Winkelmann zur Berechnung der Strahlungsgröße s benutzt. Wie aber spätere Versuche gezeigt haben, ist der richtige Wert für $n = 6{,}9$. Es wurde daher zuerst das Verhältnis w/x unter Benutzung des richtigen Wertes für $n = 6{,}9$ neu berechnet; es ergab sich so w/x für:

Alkohol	= 12,92
Äther	= 18,28
Schwefelkohlenstoff . . .	= 24,88
Wasserdampf	= 10,05
Ammoniak	= 7,71

Setzt man schließlich noch $w/x = m'$ und $x/l = m$ (w, l, x sind die Wärmeleitungsfähigkeiten für Wasserstoff, bez. Luft bez. Dampf), so kann man m' leicht in m überführen, was ja zur direkten Vergleichung der Winkelmannschen Werte mit den von mir gefundenen Resultaten nötig ist.

Da $w = 6{,}9 \,.\, l$ ist, so folgt:

$$m' = \frac{6{,}9 \,.\, l}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{l} = \frac{6{,}9}{m'},$$

d. h.:

$$m = \frac{6{,}9}{m'}.$$

Es ergeben sich so für den Quotienten $x/l = m$ aus den Winkelmannschen Beobachtungen die Werte:

Luft	= 1
Alkohol	= 0,534
Äther	= 0,522
Schwefelkohlenstoff . . .	= 0,284
Wasserdampf	= 0,690
Ammoniak	= 0,900

§ 8. Zusammenstellung und Vergleich der Resultate.

Die folgende Tabelle soll einen Vergleich ermöglichen zwischen den Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung, die 1876 von Winkelmann experimentell bestimmt wurden und den Werten, die das Resultat vorliegender Arbeit sind. Die erste Kolumne enthält die ursprünglichen Winkelmannschen

Werte, die zweite die nach Korrektion berechneten Winkelmannschen Koeffizienten, und die dritte schließlich die von mir neu ermittelten Werte.

	1.	2.	3.	4.	5.
	Winkelmann 1876 beobachtet	Winkelmann nach Korrektion berechnet	Pauli beobachtet	Differenz in Proz. zw. 2. u. 3.	Mittlere Abweichung zw. 2. u. 3.
Alkohol	0,00615	0,00535	0,00575	7,1	
Äther	0,00701	0,00621	0,00632	1,8	
Schwefelkohlenstoff	0,00572	0,00492	0,00516	4,7	3,6 Proz.
Wasserdampf	0,00439	0,00359	0,00369	2,8	
Ammoniak	0,00513	0,00433	0,00439	1,4	

Daß die von Pauli gefundenen Temperaturkoeffizienten sämtlich kleiner sind als die Winkelmannschen Werte (erste Kolumne), war nach dem in der Einleitung Gesagten zu erwarten. Vergleicht man die Werte der zweiten und dritten Kolumne miteinander, so ergibt sich hier eine durchschnittliche Differenz von 3,6 Proz.; diese Differenzen sind jedoch nicht auffallend, weil — wie ebenfalls schon hervorgehoben wurde — die nach Korrektion berechneten Werte von Winkelmann notwendigerweise mit einiger Unsicherheit behaftet sind. Auch die von Winkelmann und Pauli gefundenen Leitungskonstanten (bez. auf Luft = 1 und berechnet für die Temp. 7,5°) seien, obwohl schon mitgeteilt, noch einmal in einer Tabelle zusammengestellt. Hier ist nur zu bemerken, daß sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Werten von Winkelmann und Pauli zeigt. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, leitet Ammoniak von den untersuchten Gasen am besten, an zweiter Stelle steht Wasserdampf, fast gleich gut leiten Alkohol und Äther, die geringste Leitfähigkeit besitzt der Schwefelkohlenstoff.

	Winkelmann	Pauli
Ammoniak	0,900	0,914
Wasserdampf	0,690	0,708
Alkohol	0,534	0,545
Äther	0,522	0,542
Schwefelkohlenstoff . .	0,284	0,293

Was schließlich die Leitungskonstante für Äthylamin betrifft, so war dieselbe schon früher von Höfker und Henssgen ermittelt worden; beide Angaben beziehen sich aber auf die Temperatur 6,46°, weshalb auch der von mir ermittelte Wert für diese Temperatur berechnet wurde. Wie aus der Zusammenstellung ersichtlich ist, zeigt sich auch hier eine ausreichende Übereinstimmung, die von mir gefundene Leitungskonstante nähert sich mehr dem Höfkerschen Werte.

	Beobachter		
	Henssgen	Höfker	Pauli
Leitungskonstante des Äthylamin bez. auf 6,46°	0,577	0,584	0,590

§ 9. Schlußbetrachtungen.

Am Schlusse dieser Arbeit liegt die Frage nahe, ob die durch die vorliegenden Untersuchungen gefundenen großen Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung mit denjenigen übereinstimmen, welche uns die Theorie liefert, und welches außerdem die Ursachen der großen Verschiedenheit in den Werten der Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung für die einzelnen Gase und Dämpfe sind. Beiläufig sei bemerkt, daß schon früher derartig hohe Werte für die Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung ermittelt wurden und zwar zuerst von Winkelmann[1]), später auch von Henssgen.[2])

Bekanntlich wird durch die Theorie die Veränderlichkeit der Wärmeleitung k auf diejenige der inneren Reibung η und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen c_v mit der Temperatur zurückgeführt, gemäß der Gleichung:

$$\frac{k_{100}}{k_0} = \frac{\eta_{100}}{\eta_0} \cdot \frac{c_{v_{100}}}{c_{v_0}}. \tag{4}$$

Nach dieser Gleichung wird die Wärmeleitungsfähigkeit derjenigen Gase, bei denen die spezifische Wärme unabhängig

1) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 159. p. 190. 1876.
2) W. Henssgen, l. c.

von der Temperatur ist, ebenso wie die innere Reibung mit der Temperatur zunehmen. Diese Eigenschaft haben nach Regnault und E. Wiedemann nur die chemisch einfachen Gase und außerdem alle diejenigen Gase, deren Molekül aus nur zwei Atomen besteht. Von den hier untersuchten Gasen kommt nur der Luft diese Eigenschaft zu, ihre Wärmeleitungsfähigkeit muß sich also ebenso wie ihre innere Reibung mit der Temperatur ändern; es ist aber der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung gleich 0,0027 gefunden, während derjenige der Wärmeleitungsfähigkeit nur 0,00197 beträgt. Die Übereinstimmung zwischen dem theoretischen Wert des Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung und dem experimentell ermittelten ist also eine recht mangelhafte. Wie sich aus der weiteren Betrachtung ergibt, ist ein ähnliches Mißverhältnis bei Kohlensäure und bei Ammoniak zu konstatieren, d. h. bei allen diesen Gasen wächst der Theorie nach die Wärmeleitungsfähigkeit mit der Temperatur bedeutend schneller, als es die praktischen Untersuchungen ergeben haben. Bei den chemisch nicht einfachen Gasen ist der Quotient $c_{v_{100}}/c_{v_0}$ größer als 1 und kommt daher als vergrößernder Faktor zu dem Verhältnis η_{100}/η_0, welches ja für den Wärmeleitungskoeffizienten bestimmend ist. Es müssen also, um dem experimentell ermittelten Werte von k_{100}/k_0 den theoretischen gegenüberstellen zu können, die beiden Quotienten η_{100}/η_0 und $c_{v_{100}}/c_{v_0}$ bekannt sein. Leider sind diese Konstanten für die hier untersuchten Gase nur zum allergeringsten Teil bekannt, η_{100}/η_0 nur für Luft und Kohlensäure, $c_{v_{100}}/c_{v_0}$ nur für Luft, Kohlensäure und Ammoniak. Angenähert läßt sich das Verhältnis der inneren Reibung des Wasserdampfes bei den Temperaturen 100° und 0° aus der bekannten Abhängigkeit der Diffusion des Wasserdampfes von der Temperatur berechnen, und zwar auf folgendem Wege: Wird der Reibungskoeffizient durch η, der Diffusionskoeffizient durch D ausgedrückt, so kann man setzen:

$$\eta_\vartheta = \eta_0 (1 + \alpha\,\vartheta)^n$$

und

$$D_\vartheta = D_0 (1 + \alpha\,\vartheta)^m,$$

wobei die Relation besteht:

$$m = n + 1.$$

Winkelmann[1]) hat in seinen Beobachtungen über die Abhängigkeit der Diffusion von der Temperatur den Exponenten m unter anderen auch für folgende Kombinationen bestimmt:

	m
Wasserdampf-Luft	1,774
Wasserdampf-Kohlensäure . . .	1,972

Bezeichnet man den Exponenten der inneren Reibung für Wasserdampf mit n_1, für Luft bez. Kohlensäure mit n_2 bez. n_2', so kann man n_1 nach den Gleichungen:

$$m = n + 1 = \frac{n_1 + n_2}{2} + 1,$$

bez.

$$m = n + 1 = \frac{n_1 + n_2'}{2} + 1$$

berechnen.

Man erhält durch Einsetzen für n_1 so die beiden Werte:

0,788 und 1,004.

Daraus ergeben sich leicht die zwei Werte für das Verhältnis η_{100}/η_0 des Wasserdampfes, nämlich 1,2794 und 1,3687, daher als Mittel für

$$\frac{\eta_{100}}{\eta_{0\,\text{Wasserdampf}}} = 1{,}324.$$

	Formel	1. $\frac{\eta_{100}}{\eta_0}$	2. $\frac{c_{v_{100}}}{c_{v_0}}$	3. $\frac{\eta_{100}}{\eta_0} \cdot \frac{c_{v_{100}}}{c_{v_0}}$	4. $\frac{k_{100}}{k_0}$ (beob.)
Luft	$O_2 + N_2$	1,270	1	1,270	1,197
Wasserdampf . .	H_2O	1,324			1,369
Kohlensäure . . .	CO_2	1,348	1,123	1,514	1,418
Ammoniak . . .	NH_3		1,094		1,439
Schwefelkohlenstoff	CS_2				1,516
Alkohol	C_2H_6O				1,576
Äthylamin . . .	NC_2H_7				1,611
Äther	$C_4H_{10}O$				1,632

In der vorstehenden Tabelle sind nun die von mir ermittelten Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung zusammengestellt mit den Werten des Verhältnisses der inneren Reibung bei

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. **36**. p. 112. 1889.

100° und 0° und mit den Werten des Quotienten $c_{v_{100}}/c_{v_0}$, soweit dieselben zu ermitteln waren, außerdem mit dem Produkt $\eta_{100}/\eta_0 \cdot c_{v_{100}}/c_{v_0}$, welches den theoretischen Wert des Verhältnisses k_{100}/k_0 darstellt. Die Reihenfolge der Gase und Dämpfe ist durch die Größe des Temperaturkoeffizienten bestimmt.

Für die drei Gase Luft, Wasserdampf, Kohlensäure zeigt sich, daß die innere Reibung mit der Temperatur in derselben Reihenfolge wächst wie die Wärmeleitung. Da für Ammoniak k_{100}/k_0 größer als für Kohlensäure ist, da andererseits für Ammoniak $c_{v_{100}}/c_{v_0}$ kleiner als für Kohlensäure ist, so darf man vermuten, daß für Ammoniak η_{100}/η_0 größer ist als für Kohlensäure. Das in der dritten Kolumne stehende Produkt $\eta_{100}/\eta_0 \cdot c_{v_{100}}/c_{v_0}$, welches den theoretischen Wert des Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung ausdrückt, ist — wie schon erwähnt — bei Luft und Kohlensäure ganz erheblich größer als der experimentell ermittelte Wert, der in der letzten Kolumne steht. Wenn auch bei den hier in Betracht kommenden Gasen und Dämpfen diese Tatsache an nur zwei Gasen festgestellt ist, so kann man doch vielleicht sagen: Nach der Theorie würden jedenfalls auch die anderen Werte des Quotienten k_{100}/k_0 größer sein als die beobachteten Werte, so daß die auffallende Erscheinung so großer Temperaturkoeffizienten zum mindesten mit der Theorie nicht in Widerspruch steht.

Mit der von Sutherland[1]) in neuester Zeit aufgestellten Theorie über die Veränderlichkeit der inneren Reibung der Gase mit der Temperatur ist außerdem die starke Zunahme der Wärmeleitungsfähigkeit mit der Temperatur, sowie die große Verschiedenheit in den Werten der Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung in befriedigender Weise erklärt worden. Bekanntlich wächst die innere Reibung der Gase mit der Temperatur schneller als es die Theorie verlangt, nämlich schneller als proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur, und außerdem wächst sie sehr verschieden stark für die verschiedenen Gase und Dämpfe. Durch die Annahme von Kohäsionskräften zwischen den Molekülen und durch die Einführung einer Kohäsionskonstanten, die für die verschiedenen Gase verschieden große Werte hat, sind die berechneten

1) Vgl. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 220.

Werte für den Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung in guter Übereinstimmung mit den beobachteten Werten gefunden worden. Damit ist aber auch — nach Gleichung (4) — die starke Zunahme der Wärmeleitung mit der Temperatur, sowie die große Verschiedenheit der gefundenen Werte für den Quotienten k_{100}/k_0 besser verständlich — soweit wenigstens das Verhältnis η_{100}/η_0 für den Temperaturkoeffizienten maßgebend ist. Auf der anderen Seite gestattet aber auch die Sutherlandsche Theorie einen Schluß zu ziehen in bezug auf den Anteil, den der Wert $c_{v_{100}}/c_{v_0}$ an dem Quotienten k_{100}/k_0 haben kann. Nach Sutherland kann nämlich die innere Reibung nicht schneller als proportional $(1 + \alpha t)^{1,5}$ wachsen; für $t = 100^0$ wird also:

$$(1 + \alpha t)^{1,5} = 1{,}598.$$

Ist daher der Temperaturkoeffizient γ der Wärmeleitung eines Dampfes größer als 0,00598, so ist mindestens die Differenz von $(\gamma - 0{,}00598)$ durch das Wachsen der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen bedingt. —

Die Resultate vorliegender Arbeit lassen sich so zusammenfassen:

1. Es sind die Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung der Dämpfe von Alkohol, Äther, Schwefelkohlenstoff, Wasser, Ammoniak und Äthylamin untersucht und zur Sicherstellung der Resultate auch die Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung von Luft und Kohlensäure bestimmt worden.

2. Von den oben angegebenen Dämpfen waren bereits im Jahre 1876 von Winkelmann die Dämpfe von Alkohol, Äther, Schwefelkohlenstoff, Wasser und Ammoniak untersucht worden. Die Winkelmannschen Resultate ergeben aber, wie aus späteren Beobachtungen zu vermuten war, zu große Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitung. Diese Vermutung ist durch die vorliegende Arbeit bestätigt worden.

3. Der Temperaturkoeffizient von Äthylamin ist ebenfalls neu bestimmt worden und sein Wert innerhalb der von Henssgen als richtig angenommenen Grenzen gefunden worden.

4. Von den unter 1. genannten Dämpfen ist das Verhältnis der Leitungsfähigkeit zu Luft berechnet worden; nach

Umrechnung der Winkelmannschen Werte hat sich eine gute Übereinstimmung mit diesen ergeben.

5. Am Schlusse der Arbeit ist der Zusammenhang der Temperaturkoeffizienten, der inneren Reibung und der spezifischen Wärme besprochen und die Sutherlandsche Beziehung der Kohäsionskonstanten zur inneren Reibung erörtert.

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, Hrn. Geheimrat Winkelmann für die Anregung zu vorliegender Arbeit, sowie für die freundlichen Ratschläge meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Jena, Physik. Institut, Juli 1907.

(Eingegangen 9. Juli 1907.)

7. *Über den Einfluß des Magnetfeldes auf den Widerstand von Elektrolyten;* *von G. Berndt.*

Einleitung. Nachdem man beobachtet hatte, daß der Widerstand der Metalle, und zwar besonders der der ausgeprägt para- oder diamagnetischen, im Magnetfelde Änderungen erleidet, suchte man nach ähnlichen Einflüssen bei den Lösungen ihrer Salze. Neesen[1]) beobachtete an Eisenchloridlösungen in einem verhältnismäßig schwachen (von drei Bunsenelementen erregten) Magnetfelde bei äquatorialer Stellung der Röhre keinen Einfluß, bei axialer Stellung eine Verringerung des Widerstandes. Da die Messung mit Gleichstrom erfolgte, so hält er seine Resultate nicht für entscheidend; der beobachtete Effekt kann durch Einwirkung des Magnetfeldes auf den Widerstand oder aber auf die Polarisation verursacht sein.

Bagard[2]) fand bei einer ($^1/_4$ norm.) Kupfersulfatlösung in einem Felde von 5000 Gauss eine Widerstandsvermehrung von 1 Proz. bei äquatorialer Stellung der Röhre. Der Versuch erfolgte in der Weise, daß Gleichstrom durch die Lösung geschickt und der Ausschlag eines d'Arsonvalgalvanometers beobachtet wurde; nachdem dieser konstant geworden, wurde das Magnetfeld eingeschaltet. Da die Elektroden außerhalb des Magnetfeldes liegen, kann es sich nicht um Änderung der Polarisation handeln; wohl aber können elektrodynamische Wirkungen den beobachteten Einfluß verursacht haben.

Bei beiden Messungen ist keine Rücksicht genommen auf Konstanthaltung der Temperatur. Da aber 1° Temperaturänderung eine Widerstandsänderung von im Durchschnitt 2 Proz. bewirkt, ist gerade bei den Elektrolyten besondere Sorgfalt darauf zu verwenden.

1) F. Neesen, Wied. Ann. **23.** p. 482. 1884.
2) H. Bagard, Compt. rend. **128.** p. 91. 1899.

Methode der Untersuchung und Apparate. Die Messungen erfolgten mit der Wheatstoneschen Brückenanordnung. Die 1 m lange Drahtbrücke war durch beiderseits angesetzte Drähte, die sich in Holzkästen befanden, auf 10 m verlängert und nach der Fosterschen Methode kalibriert (an den Zahlenangaben ist die Kaliberkorrektion bereits angebracht). Als Vergleichswiderstand diente ein Kurbelrheostat aus Manganin von Siemens & Halske, dessen Korrektionen und Temperaturkoeffizient durch Vergleich mit bekannten Normalen mittels des Differentialgalvanometers bestimmt waren. Holzkästen und Rheostat waren in einigem Abstande von einem Pappmantel umgeben, dessen Außenseite mit Stanniol beklebt war; der Zwischenraum wurde mit Watte angefüllt. Die Temperatur des Rheostaten wurde an einem in $^1/_{10}{}^0$ geteilten Thermometer abgelesen; durch Vergleich mit einem kalibrierten Thermometer wurde festgestellt, daß etwaige Korrektionen kleiner als $^1/_{10}{}^0$ waren, also vernachlässigt werden konnten.

Das Elektrolytgefäß (Fig. 1) hatte H-förmige Gestalt. Der Röhrendurchmesser betrug 7 mm; das Verbindungsrohr war des leichteren Temperaturaustausches wegen aus dünnwandigem Glase. Die nach dem Lummer-Kurlbaumschen [1]) Verfahren platinierten Elektroden hatten eine Oberfläche von 35 × 3 mm². Der Kontakt in den Ansatzröhren erfolgte durch Quecksilber, in das 1 mm starke amalgamierte Kupferdrähte tauchten.

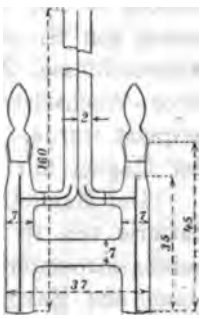


Fig. 1.

Als Stromquelle diente ein kleines Induktorium mit „Mückenton", das in einem Nebenzimmer aufgestellt war und von dem Beobachtungstisch aus in Gang gesetzt werden konnte. Der Primärstrom wurde durch einen Nickelinwiderstand soweit geschwächt, daß das Induktorium gerade im Gange erhalten wurde. Für die Gleichstrommessungen dienten ein Akkumulator und derselbe Vorschaltwiderstand.

Bei den Wechselstrommessungen diente als Nullinstrument

---

1) F. Kohlrausch u. L. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte p. 10. 1898.

ein außerordentlich empfindliches Telephon (Modell der Reichspost), bei den Gleichstrommessungen ein d'Arsonvalgalvanometer von Carpentier (Reduktionsfaktor $0{,}79 \cdot 10^{-6}$ Amp./mm), später ein solches von Siemens & Halske (Reduktionsfaktor $2{,}25 \cdot 10^{-8}$ Amp./mm, bezogen auf den benutzten Skalenabstand von 314,5 cm).

Das Magnetfeld wurde von einem kleinen Hufeisenelektromagneten mit quadratischen Polschuhen (50 mm Kantenlänge) geliefert. Der verwendete Polabstand betrug bei den Messungen senkrecht zu den Kraftlinien 17 mm, bei denen parallel zu den Kraftlinien 50 mm. Das Magnetfeld wurde bestimmt durch Beobachtung des Ausschlages an einem ballistischen Galvanometer von Edelmann beim Herausziehen einer Spule bekannter Windungsfläche. Die Spule war um einen genau abgedrehten Messingring gewickelt; ihre Dimensionen wurden auf einer Teilmaschine von der Société Genevoise bestimmt. Nachdem wurden die einzelnen Windungen durch Siegellack auf der Außenseite unverrückbar befestigt, der Messingring herausgezogen und auf der Innenseite in derselben Weise verfahren. — Die Strommessung erfolgte mit einem Milliamperemeter von Siemens & Halske unter Benutzung geeigneter Nebenschlüsse. Zum Entmagnetisieren diente ein kleiner Gleichstrom-Wechselstrom-Umformer, der mit vier Akkumulatoren gespeist wurde. Durch Umlegen einer Sechsnapfwippe konnte der Magnet mit der Wechselstromquelle verbunden werden.

Der Magnetisierungsstrom wurde von einer Akkumulatorenbatterie von 10 oder 20 Zellen mit 25 Amp. maximaler Entladungsstromstärke geliefert. Zum Regulieren diente ein Widerstand aus Manganinblech, der mit 75 Amp. belastet werden konnte. Da im Maximum ein Strom von 45 Amp. entnommen wurde, blieb die Stromstärke sehr gut konstant.

Zur Kontrolle wurde das Magnetfeld bei dem geringeren Polabstande durch die Widerstandsänderung einer Wismutspirale von Hartmann & Braun bestimmt. Die aus den graphisch aufgetragenen Resultaten erhaltenen Werte sind in Tab. 1 mitgeteilt. Mit Ausnahme der schwächeren Felder, wo die Messungen mit der Wismutspirale ungenaue Resultate liefern, ist die Übereinstimmung zufriedenstellend.

Tabelle 1.

Magnetfeld in Gauss.

Ampere	Polabstand 17 mm			Polabstand 50 mm durch Spule
	durch Spule	durch Bi-Spirale	Mittel	
2,5	800	650	725	240
5	1520	1320	1420	450
10	2400	2300	2350	750
15	2750	2620	2690	880
20	2950	2800	2880	950
25	3140	2940	3040	1000

Im Maximum wurden also Felder von 3000, bez. 1000 Gauss erhalten.

Um die Temperatur konstant zu halten, wurde das Elektrolytgefäß in eine Art Cavendishröhre mit siedendem Äther

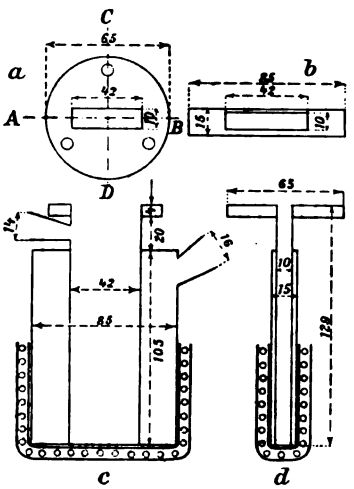


Fig. 2.

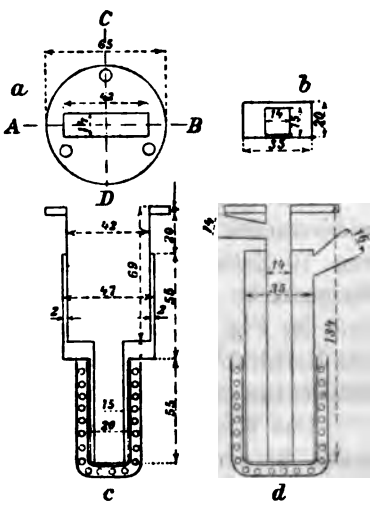


Fig. 3.

gesetzt, ein sehr naheliegendes Verfahren, daß aber meines Wissens bis jetzt bei Elektrolyten noch nicht Anwendung gefunden. Benutzt wurde stets die Siedetemperatur bei Atmosphärendruck. Die Dimensionen der Gefäße ergeben sich aus

Fig. 2 (senkrecht zu den Kraftlinien benutzt) und Fig. 3 (bei den Untersuchungen parallel zu den Kraftlinien verwendet). Die Wandstärke betrug $^1/_2$ mm. Es stellt *a* die Ansicht von oben, *b* die von unten, *c* und *d* die Längsschnitte in den Richtungen *AB* und *CD* dar. Die eingetragenen Maße bedeuten Millimeter. Die Einbuchtung in den unteren Teil des Gefäßes der Fig. 3 war bedingt durch die Dimension des Elektromagneten zwischen den Wickelungsspulen.

Bei der Feuergefährlichkeit des Äthers konnte selbstverständlich nur elektrische Heizung in Frage kommen. Zu diesem Zweck wurden die unteren Teile der Gefäße mit einem Asbestmantel umgeben; um diesen wurde der Heizdraht ($^1/_2$ mm bez. 1 mm starkes Manganin) mit etwa drei Windungen pro Zentimeter gelegt und durch einen zweiten äußeren Asbestmantel in seiner Lage gehalten. Das Asbest war mit Wasserglas getränkt und haftete so fest aneinander und an dem Gefäße. Der verdampfende Äther wurde in zwei Liebigschen Glaskühlern, die hintereinander geschaltet an die Wasserleitung angeschlossen waren, wieder kondensiert. Der Heizstrom wurde so reguliert, daß der Äther in dem äußeren Mantel kräftig siedete, was wegen der großen Abkühlungsflächen (namentlich der Polschuhe) notwendig war; dann trat im inneren Gefäß langsames regelmäßiges Sieden ein.

Der Heizstrom wurde unter Vorschaltung eines Nickelinwiderstandes von der Lichtleitung (110 Volt), zum Teil auch von 10 Zellen der Akkumulatorenbatterie entnommen. Die Stromstärke betrug bei dem Gefäß der Fig. 2 2 Amp., bei dem der Fig. 3 etwa 5 Amp.; damit ein etwaiges Durchbrennen des Heizdrahtes sofort erkannt werden konnte, war ein Demonstrationsamperemeter in den Stromkreis geschaltet.

Das Widerstandsgefäß war zusammen mit einem Thermometer in ein elliptisches Rohr eingesiegelt; dieses Rohr war in einen Messingdeckel eingelötet, der unter Zwischenlegung einer Gummidichtung auf den Flansch des Siedegefäßes aufgeschraubt werden konnte. Das Thermometer sollte nur anzeigen, wann im inneren Gefäße konstante Temperatur herrschte; die eigentliche Siedetemperatur wurde durch den (auf 0° korrigierten) Barometerstand gemessen.

Weicht der beobachtete Barometerstand von dem normalen

um n mm ab und ist T die absolute Siedetemperatur, so ist die Temperatukorrektion

$$\delta = \pm \frac{n\,T\,c}{50}\ ^{1});$$

dabei bestimmt sich die Materialkonstante c aus der Gleichung

$$c = \frac{D}{T},$$

wo D die Änderung des Siedepunktes bei einer Druckänderung von 50 mm ist. Zur Rechnung dienten die folgenden Angaben:

$$T = 307{,}6; \quad D = 1{,}99; \quad c = 0{,}00647.$$

Im Verlauf der Beobachtungen stellte sich die Notwendigkeit heraus, Quecksilber und flüssiges Wismut in bezug auf ihr Verhalten im Magnetfelde zu untersuchen. Das Quecksilber

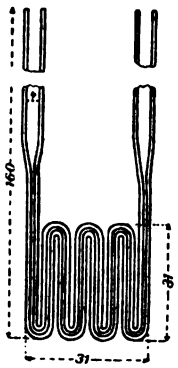


Fig. 4.

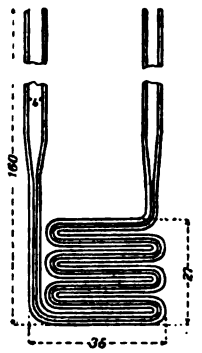


Fig. 5.

war, auf elektrolytischem Wege hergestellt, von Merck, Darmstadt, bezogen. Es wurde in Kapillarröhren mit angeschmolzenen, etwa 7 mm weiten Röhren gefüllt, deren Formen durch Fig. 4 (senkrecht zu den Kraftlinien) und Fig. 5 (parallel zu den Kraftlinien) dargestellt sind. Ihre Durchmesser betrugen 0,37 und 0,29 mm; sie wurden in einem Messingdeckel mit drei angelöteten Röhren (zwei für das Gefäß, eine für das Thermometer) eingesiegelt. Das von derselben Firma als chemisch rein bezogene Wismut wurde (nur senkrecht zu den

1) H. Landolt-Börnstein, Physik.-Chem. Tabellen p. 177. 1905.

Kraftlinien) in einer ähnlichen Röhre von 0,53 mm untersucht. Da hier Erhitzung bis über den Schmelzpunkt des Wismuts (270°) notwendig war, konnten die obigen Siedegefäße nicht verwendet werden. Aus Messingblech wurde deshalb ein kleines Gefäß von rechteckigem Querschnitt gebogen; in diesem konnte sich das Kapillarrohr mit gelinder Reibung bewegen. Das Gefäß wurde vollständig mit der Heizvorrichtung (Asbestunterlage, Heizdraht, Asbestdecke) umgeben und mit dieser zusammen zwischen die Polschuhe bei unverändertem Polabstand gestellt. Die Heizstromstärke betrug hier 10 Amp.; nach etwa fünfstündigem Heizen wurde eine sehr konstante Temperatur erzielt. Das in einem Porzellantiegel geschmolzene Wismut wurde durch ein Glasrohr in die warme Kapillare gegossen und durch ein Handgebläse hindurchgepreßt. Bei engeren Kapillaren ließ sich dies Verfahren leider nicht mehr durchführen. — Die Stromzuführung erfolgte in allen Fällen durch 2 mm starke Kupferdrähte, die bei der Untersuchung des Quecksilbers in dem Glasrohr festgesiegelt wurden.

Es wurden folgende Elektrolyte untersucht: Ferrosulfat, Eisenchlorid, Nickelsulfat, Nickelnitrat, Kobaltnitrat, Wismutnitrat, Brechweinstein und Kupfersulfat, die mit Ausnahme des Kupfersulfats als chemisch rein von **Merck**, Darmstadt, bezogen waren. Zur Lösung wurde zweimal (unter Zusatz von Schwefelsäure und Kalilauge) destilliertes Wasser verwendet; beim Wismutnitrat wurde, um die Bildung basischen Salzes zu vermeiden, chemisch reine Salpetersäure zugesetzt; Eisenchlorid und Kupfersulfatlösung wurden den Beständen des Laboratoriums entnommen, Nickel- und Kobaltnitratlösung waren im chemischen Laboratorium für analytische Zwecke hergestellt worden. Bei den Beobachtungen senkrecht und parallel zu den Kraftlinien wurden Lösungen angenähert derselben Konzentration untersucht. Die Ferrosulfat-, Nickelsulfat-, Wismutnitrat-, Brechweinstein- und Kupfersulfatlösungen waren nahezu konzentriert, die Eisenchlorid-, Nickel- und Kobaltnitratlösungen etwa $^1/_2$ norm.[1]) Die genaue Kenntnis der Konzentration ist, wie aus den unten mitgeteilten Resultaten folgt, nicht notwendig.

1) Angabe des chemischen Laboratoriums.

Um die Brauchbarkeit der Methode zu prüfen, wurden zunächst Messungen an Nickeldraht angestellt, da nach den Untersuchungen von Grunmach[1]) Nickel von allen Metallen die größte Widerstandsänderung im Magnetfelde erleidet. Der $^1/_{10}$ mm starke, von Heraeus bezogene Nickeldraht wurde auf ein Glimmerblatt von 40 mal 40 mm gewickelt, das mit entsprechenden Einkerbungen versehen war, so daß ungefähr 90 cm Draht aufgewickelt wurden. Um dem Draht eine feste Lage zu geben, wurden zwei allerseits überragende Glasplatten aufgesiegelt und die Zwischenräume zwischen den Überragungen gleichfalls mit Siegellack ausgefüllt. An die hervorragenden Drahtenden wurden 2 mm starke Kupferdrähte angelötet und diese vollständig in Glasröhren eingesiegelt. Sie wurden dann analog den Kapillaren in einem Deckel befestigt.

Messungen. Die Messungen wurden in der Weise angestellt, daß zunächst zwei- bis dreimal ohne Magnetfeld durch Verschieben des Gleitkontaktes die Nullstellung des Telephons bez. des Galvanometers herbeigeführt wurde, sodann mit Magnetfeld und schließlich wieder ohne Magnetfeld. Benutzt wurden nur diejenigen Messungen, bei welchen die Mittel der Beobachtungssätze außerhalb des Magnetfeldes um nicht mehr als $^1/_{10}$ mm von dem gemeinsamen Endmittel abwichen.

Bei der Untersuchung des Quecksilbers und des flüssigen Wismuts wurde ohne Magnetfeld abgeglichen und dann die Einstellung des Galvanometers abgelesen, welche nach dem Einschalten des Magnetfeldes auftrat; zum Schluß wurde in analoger Weise wie bei den anderen Messungen wieder die Galvanometerstellung außerhalb des Magnetfeldes bestimmt. Auch hier wurden nur die Messungen benutzt, wo die Galvanometerstellungen vor und nach dem Ausschalten des Magnetfeldes bis auf wenige $^1/_{10}$ mm übereinstimmten. Die Empfindlichkeit des Galvanometers wurde bei jeder Messung bestimmt durch wiederholte Beobachtung des Galvanometerausschlages für eine Verschiebung des Gleitkontaktes um 1 mm. Selbstverständlich überzeugte ich mich vor jeder Messung davon, daß beim Einschalten des Magnetfeldes das stromlose Galvanometer keine Einwirkung erlitt.

---

1) L. Grunmach, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 359. 1906.

A. *Nickeldraht.* Um ein Beispiel für die Art der Beobachtung und die erreichte Genauigkeit zu geben, teile ich zunächst einige Messungen am Nickeldraht in Tab. 2 ausführlich mit. Die Genauigkeit hätte sich bei Gleichstrom bedeutend weiter treiben lassen, doch wurde hier nur dieselbe wie bei den Wechselstrommessungen erstrebt. $\Delta w/w$ Proz. bedeutet die Änderung des Widerstandes im Magnetfelde, gemessen in Prozenten des Widerstandes außerhalb des Magnetfeldes.

Tabelle 2.

Nickeldraht senkrecht zu den Kraftlinien.

Barometerstand 758,2 mm. Siedetemperatur 34,5°.

Strom	Magnetfeld	Einstellung an der Brücke	Mittel	Gesamtmittel	Verschiebung	Widerstand	$\Delta w/w$ Proz.
Wechselstrom	0	447,2 447,3 447,1	447,2	447,15		12,500	
	3040	432,2 432,2	432,2		14,95	12,425	−0,600
	0	447,2 447,0	447,1				
Gleichstrom	0	449,1 449,0 448,9	449,0	449,03		12,509	
	3040	434,0 434,1	434,05		14,98	12,434	−0,600
	0	449,1 449,0	449,05				

Die Widerstandsänderungen haben also für Gleich- und Wechselstrom bis auf $^1/_6$ Proz. denselben Wert. Die Unterschiede in der Brückenstellung erklären sich daraus, daß sich inzwischen die Temperatur geändert hatte. Zum Beweis dafür,

daß auch außerhalb des Magnetfeldes Gleich- und Wechselstromwiderstand identisch, gebe ich die Tab 3.

Tabelle 3.

Nickeldraht. Barometerstand 758,9 mm. Siedetemperatur 84,6°. Widerstand 12,506 Ohm.

Strom	Einstellung an der Brücke	Mittel	Gesamtmittel
Gleichstrom	448,4 448,4	448,4	448,40
Wechselstrom	448,4 448,3	448,35	448,40
Gleichstrom	448,5 448,4 448,4 448,4	448,4	
Wechselstrom	448,5 448,4	448,45	

Die Unterschiede der Brückeneinstellung bei Gleich- und Wechselstrom sind demnach kleiner als $^1/_{10}$ mm, Gleich- und Wechselstromwiderstand sind also bis auf $^1/_{250}$ Proz. identisch. Da sich bei Wechselstrom keine größere Meßgenauigkeit erreichen läßt als $^1/_{250}$ Proz., muß man sich vorläufig mit diesem Resultate begnügen.

Die Interpolation aus den Grunmachschen Messungen ergibt für 3040 Gauss $\Delta w/w$ Proz. $= -0{,}887$ bei 20,3°. Die Differenz gegen die obigen Werte ist, wie aus meinen sonstigen Beobachtungen folgt, durch die Verschiedenheit der Temperatur bedingt. Man ersieht hieraus, wie wichtig es schon bei der Untersuchung der Metalle im Magnetfelde ist, die Temperatur konstant zu halten.

B. *Elektrolyte.* Die Meßresultate sind in Tab. 4 (senkrecht zu den Kraftlinien) und in Tab. 5 (parallel zu den Kraftlinien) mitgeteilt. Die angegebenen Werte sind Mittel aus zwei bis drei Ablesungen, die von dem erhaltenen Mittelwert um höchstens $^1/_{10}$ mm abweichen (beim Wismutnitrat um durchschnittlich 0,5 mm).

Tabelle 4.

Elektrolyte **senkrecht zu den Kraftlinien.**

Elektrolyt	Brückeneinstellung			Mittel	Widerstand	Barometer	Siede-temp.	Magnet-feld
	Ohne	Mit Magnetfeld	Ohne	Ohne				
Ferrosulfat . . .	430,15	430,05	430,10	430,13	143,914	750,2	34,2°	3050
Eisenchlorid . . .	444,73	444,80	444,75	444,74	101,447	747,4	34,1	3050
	444,70	444,75	444,85	444,78				
Nickelsulfat . . .	443,97	444,00	444,00	443,99	129,549	747,4	34,1	3050
	444,00	443,95	443,85	443,93				
	443,47	443,45	443,40	443,44				2240
	443,90	443,90	443,90	443,90				700
Nickelnitrat . . .	447,23	447,15	447,05	447,14	141,768	751,2	34,2	3050
	446,97	447,00	447,15	447,06				
Kobaltnitrat . . .	443,47	443,50	443,55	443,51	200,250	751,2	34,2	3050
	443,63	443,77	443,87	443,75				
Wismutnitrat . .	445,8	445,5	445,1	445,3	34,409	749,5	34,2	3040
Brechweinstein .	452,13	452,15	452,23	452,18	462,176	749,5	34,2	3040
	452,00	451,95	451,95	451,97				
Kupfersulfat . .	445,90	445,80	445,75	445,82	240,793	747,4	34,1	3050
	446,77	446,75	446,65	446,71				

Tabelle 5.

Elektrolyte parallel zu den Kraftlinien.

Elektrolyt	Brückeneinstellung			Mittel	Widerstand	Barometer	Siede-temp.	Magnet-feld
	Ohne	Mit Magnetfeld	Ohne	Ohne				
Ferrosulfat . . .	441,05	440,95	440,85	440,95	156,700	752,9	34,3°	1020
	439,85	440,05	440,15	440,00				
Eisenchlorid . . .	440,20	440,15	440,05	440,18	100,557	752,9	34,3	1020
	440,30	440,25	440,15	440,23				
Nickelsulfat . . .	437,97	437,85	437,85	437,90	134,523	752,9	34,3	1020
	437,95	437,85	437,75	437,85				
Nickelnitrat . . .	457,30	457,25	457,25	457,28	139,447	749,4	34,2	1020
	461,20	461,35	461,45	461,33				
Kobaltnitrat . .	442,20	442,10	442,05	442,13	198,551	752,9	34,3	1020
	444,35	444,20	444,05	444,20				
Wismutnitrat . .	439,4	439,3	439,1	439,3	32,654	752,9	34,3	1020
	437,2	437,2	437,5	437,4				
Brechweinstein . .	444,25	444,35	444,45	444,35	512,572	752,9	34,3	1020
Kupfersulfat . .	481,45	481,40	481,45	481,45	238,466	752,4	34,3	1020
	485,65	485,80	485,80	485,73				

Es ergibt sich also bei sämtlichen untersuchten Lösungen sowohl senkrecht wie parallel zu den Kraftlinien innerhalb der Ablesegenauigkeit von $^1/_{10}$ mm (bei Wismut von $^1/_2$ mm) dieselbe Einstellung auf der Brücke. Ein Einfluß des Magnetfeldes ist also nicht zu konstatieren; derselbe ist kleiner als $^1/_{250}$ Proz. (bei Wismut $^1/_{50}$ Proz.). Ob bei Bestimmung der Leitfähigkeit diese Genauigkeit bei den verwendeten kleinen Dimensionen hätte erzielt werden können, will ich dahingestellt sein lassen. Hier handelte es sich nur um die Messung etwaiger kleiner Differenzen schnell hintereinander; bei einiger Übung war es dabei nicht schwer, die angegebene Genauigkeit zu erreichen.

Bei der Widerstandsänderung der Metalle im Magnetfelde handelt es sich um Erscheinungen, die mit dem Halleffekt in nahem Zusammenhange stehen aber doch nicht identisch damit sind. Man nimmt an, daß die beobachteten Widerstandsänderungen durch molekulare Umwandlungen bedingt sind.[1]) Molekulare Umlagerungen können aber nur in festen Körpern eintreten; flüssige Körper dürften somit keine Widerstandsänderungen im Magnetfelde zeigen. Zum Entscheid dieser Frage wurden Quecksilber und geschmolzenes Wismut untersucht.

C. *Quecksilber.* Beim Quecksilber haben Drude und Nernst[2]) in einem Felde von 8000 Gauss eine Widerstandserhöhung von 0,16—0,27 Proz. gefunden, je nach der Stärke des zur Messung verwendeten Stromes. Sie halten deshalb dieses Resultat nicht für sicher, da die gefundene Widerstandsänderung auch durch elektrodynamische Einwirkung erklärt werden könnte. Der Durchmesser der von ihnen benutzten Kapillare ist nicht angegeben, scheint aber verhältnismäßig groß gewesen zu sein.

In einer Kapillare von 0,37 mm Durchmesser fand ich zunächst, daß die Widerstandsänderung des Quecksilbers kleiner als $^1/_{2500}$ Proz. sei. Nachdem ich in den Besitz des empfindlicheren Galvanometers von Siemens & Halske gekommen, nahm ich die Untersuchungen wieder auf. Die erhaltenen

1) z. B. L. Grunmach, l. c.
2) P. Drude u. W. Nernst, Wied. Ann. 42. p. 573. 1891.

Resultate sind in Tab. 6 dargestellt; ein + Zeichen bedeutet einen Ausschlag, der einem wachsenden Widerstande entspricht. (Selbstverständlich hatte ich mich davon überzeugt, daß Kommutieren des Magnetstromes die Resultate nicht änderte.)

Tabelle 6.

Quecksilber senkrecht zu den Kraftlinien in Kapillare von 0,37 mm Durchmesser.

Barometerstand 751,7 mm. Siedetemperatur 34,3°.

Brückeneinstellung 488,7 mm. Widerstand 2,752 Ohm.

Magnetfeld 3040 Gauss.

Galvanometerablesung			Mittel	Verschiebung	Bestimmung der Empfindlichkeit		
Ohne	Mit Magnetfeld	Ohne	Ohne		Brücken-einstellung	Galvano-meter-ablesung	Diff.
546,9	546,3	547,4	547,2	+0,9	489,7	461,0	
542,0	541,0	541,9	542,0	+1,0	488,7	543,8	82,8
542,5	542,0	542,5	542,5	+0,5	489,7	470,0	73,8
541,0	540,0	540,6	540,8	+0,8	488,7	548,0	78,0
541,0	540,0	541,0	541,0	+1,0	489,7	466,6	81,4
538,0	537,0	538,5	538,3	+1,3	488,7	546,4	79,8
540,0	539,0	540,0	540,0	+1,0	489,7	469,3	77,1
547,0	545,5	547,0	547,0	+1,5	488,7	549,8	80,5
546,0	545,0	546,0	546,0	+1,0		Mittel:	79,1
551,0	550,8	551,5	551,3	+0,5			
550,5	551,8	551,0	550,8	+1,0*			
			Mittel:	+0,96			

* Meßstrom kommutiert.

Es sind also:

79,1 Skt. äquivalent 1 mm Verschiebung des Gleitkontaktes, d. i.
„ einer Widerstandsänderung von $^1/_{25}$ Proz.; also sind
0,96 „ „ „ „ „ $^1/_{2060}$ „

Der Versuch lieferte also das Resultat, daß der Widerstand des Quecksilbers in einem Felde von 3040 Gauss um $^1/_{2060}$ Proz. wächst. Da es aber nicht ausgeschlossen war, daß hierbei elektrodynamische Wirkungen mitspielten, wurde für die weiteren Untersuchungen eine Kapillare von 0,29 mm

Durchmesser gewählt. Die damit erhaltenen Resultate sind in Tab. 7 wiedergegeben; ein + Zeichen bedeutet ein Wachsen, ein — Zeichen eine Abnahme des Widerstandes.

Tabelle 7.

Quecksilber senkrecht zu den Kraftlinien in Kapillare von 0,29 mm Durchmesser.

Barometerstand 751,7 mm. Siedetemperatur 34,3°.

Brückeneinstellung 474,9 mm. Widerstand 4,616 Ohm.

Magnetfeld 3040 Gauss.

Galvanometerablesung			Mittel	Verschiebung	Bestimmung der Empfindlichkeit		
Ohne	Mit Magnetfeld	Ohne	Ohne		Brückeneinstellung	Galvanometerablesung	Diff.
540,0	539,9	539,7	539,9	0,0	475,4	606,6	
554,8	554,9	555,0	554,9	0,0	474,4	507,8	98,8
557,3	557,1	556,9	557,1	0,0	475,4	609,0	101,2
558,5	558,3	558,1	558,3	0,0	474,4	510,8	98,8
547,3	547,3	547,3	547,3	0,0*	475,4	609,5	98,7
537,8	538,0	537,8	537,8	−0,2	474,4	512,6	96,9
555,8	556,0	556,2	556,0	0,0	475,4	608,0	95,4
					474,4	510,5	102,5
			Mittel:	$-0{,}0_3$		Mittel:	98,7

* Meßstrom kommutiert.

Es sind also:

98,7 Skt. äquivalent 1 mm Verschiebung des Gleitkontaktes, d. i.
„ einer Widerstandsänderung von $^1/_{25}$ Proz.; also sind
0,1 „ „ „ „ „ $^1/_{25000}$ „

In dieser engeren Röhre sind also die elektrodynamischen Einflüsse verschwunden; Quecksilber zeigt in einem Magnetfelde von 3040 Gauss senkrecht zu den Kraftlinien keine Widerstandsänderung, die größer als $^1/_{25000}$ Proz. wäre.

Bei den Beobachtungen parallel zu den Kraftlinien wurde eine Röhre von 0,37 mm Durchmesser benutzt. Die Beobachtungen sind in Tab. 8 wiedergegeben; + und — Zeichen haben dieselbe Bedeutung wie oben.

Tabelle 8.

Quecksilber parallel zu den Kraftlinien in Kapillare von 0,37 mm Durchmesser.
Barometerstand 751,7 mm. Siedetemperatur 84,8°.
Brückeneinstellung 484,1 mm. Widerstand 8,441 Ohm.
Magnetfeld 1020 Gauss.

Galvanometerablesung			Mittel	Verschiebung	Bestimmung der Empfindlichkeit		
Ohne	Mit Magnetfeld	Ohne	Ohne		Brückeneinstellung	Galvanometerablesung	Diff.
540,0	540,0	540,0	540,0	0,0	483,6	536,0	
539,0	538,9	538,8	538,9	0,0	484,6	461,6	74,4
537,0	537,1	537,2	537,1	0,0	483,6	543,3	81,7
534,0	534,0	534,0	534,0	0,0	484,6	459,8	83,8
520,5	520,5	520,5	520,5	0,0*	483,6	558,0	78,5
520,2	520,1	520,0	520,1	0,0	484,6	456,5	81,8
			Mittel:	0,0		Mittel:	80,0

* Magnetstrom kommutiert.

Es sind also:

80,0 Skt. äquivalent 1 mm Verschiebung des Gleitkontaktes, d. i.
„ einer Widerstandsänderung von $^1/_{25}$ Proz.; also sind
0,1 „ „ „ „ „ $^1/_{20000}$ „

Auch parallel zu den Kraftlinien ist also beim Quecksilber in einem Magnetfelde von 1020 Gauss keine Widerstandsänderung zu konstatieren, die größer als $^1/_{20000}$ Proz. wäre.

D. *Wismut.* Drude und Nernst[1]) finden in einem Felde von 8000 Gauss bei geschmolzenem Wismut eine Widerstandsänderung von 0,41 Proz. (bei 290°); elektrodynamische Einflüsse sind aber auch hier nicht ausgeschlossen.

Das geschmolzene Wismut befand sich bei meinen Untersuchungen in einer Kapillare von 0,53 mm Durchmesser; dieselben gestalteten sich insofern sehr schwierig, als beim Erstarren des Wismuts die Röhren regelmäßig sprangen; nach dem Einfüllen des Wismuts durfte also die Temperatur nicht unter den Schmelzpunkt sinken. Die sorgfältigste Messung, bei welcher die Temperatur (nach 5 stündigem Heizen) konstant blieb (etwa 365°), ergab die in Tab. 9 dargestellten Resultate; das + Zeichen bedeutet, wie oben, ein Wachsen des Widerstandes.

1) P. Drude u. W. Nernst, l. c.

Tabelle 9.

Wismut senkrecht zu den Kraftlinien in Kapillare von 0,53 mm Durchmesser.
Brückeneinstellung: 448,9 mm. Widerstand: 1,629 Ohm.
Magnetfeld: 3020 Gauss.

Galvanometerablesung			Mittel	Verschiebung	Bemerkungen
Ohne	Mit Magnetfeld	Ohne	Ohne		
530,2	528,2	529,8	530,0	+1,8	
530,3	529,0	530,9	530,6	+1,6	
525,2	523,5	525,0	525,1	+1,6	
529,0	526,8	529,2	529,1	+2,3	Magnetstrom
528,8	527,0	529,2	529,0	+2,0	kommutiert
533,5	535,3	533,1	533,3	+2,0	Meßstrom
535,2	537,0	534,4	534,8	+2,1	kommutiert
530,0	532,0	530,4	530,2	+1,8	
536,5	538,8	537,0	536,8	+2,0	Magnetstrom
538,5	540,5	538,0	538,3	+2,2	kommutiert
541,5	543,3	541,1	541,3	+2,0	
			Mittel:	+1,95	
542,2	544,4	542,6	542,4	+2,0	
542,0	544,4	542,8	542,4	+2,0	
542,8	545,0	542,8	542,8	+2,2	Magnetstrom
542,3	544,0	541,5	541,2	+2,0	kommutiert
527,8	526,0	527,5	527,7	+1,7	Meßstrom
526,0	524,0	526,0	526,0	+2,0	kommutiert
530 5	528,9	530,2	530,7	+1,8	Magnetstrom
532,3	530,0	532,3	532,3	+2,2	kommutiert
			Mittel:	+2,0	
			Gesamtmittel:	+2,00	

Bestimmung der Empfindlichkeit

Brücken-einstellung	Galvanometer-ablesung	Diff.
448,9	504,1	
449,9	554,3	50,2
448,9	502,5	51,8
449,9	559,1	56,6
448,9	509,3	49,8
449,9	560,9	52,6
448,9	508,0	53,9
	Mittel:	52,5

Es sind also:

52,5 Skt. äquivalent 1 mm Verschiebung des Gleitkontaktes, d. i.
„ einer Widerstandsänderung von $^1/_{25}$ Proz.; also sind
2,0 „ „ „ „ „ $^1/_{660}$ „

Wismut zeigt also in dem Magnetfelde von 3020 Gauss bei 365° eine Widerstandszunahme von $^1/_{660}$ Proz. Der Unterschied gegen die Beobachtung von Drude und Nernst erklärt sich durch die Verschiedenheit des Magnetfeldes und der Temperatur, zum großen Teil aber auch durch die Verschiedenheit der elektrodynamischen Einwirkung. In einer weiteren Röhre hatte ich bei Temperaturen von etwa 420° bis 500° Widerstandsänderungen von $^1/_{230}$ bis $^1/_{400}$ Proz. gefunden. Da bei den mitgeteilten Messungen trotz der tieferen Temperatur diese Änderung nur $^1/_{660}$ Proz. beträgt, beweist dies, daß durch die engere Röhre die elektrodynamische Einwirkung zum Teil vermieden ist. Ich zweifle nicht, daß in noch engeren Röhren, wo die elektrodynamischen Einwirkungen verschwinden, auch die Widerstandsänderungen völlig verschwinden würden. Die Verwendung engerer Röhren scheiterte aber bis jetzt an technischen Schwierigkeiten. Die beobachtete Änderung von $^1/_{660}$ Proz. ist so klein, daß sie vollständig auf elektrodynamische Einflüsse zurückgeführt werden kann und somit keinen Widerspruch gegen die sonstigen Beobachtungen bildet, wonach Flüssigkeiten keine Widerstandsänderung im Magnetfelde erleiden.

Sollte man dieser Ansicht nicht zustimmen, so geht auf jeden Fall aus den Messungen hervor, daß die Widerstandsänderungen flüssiger Körper im Magnetfelde außerordentlich klein sind im Vergleich zu denen der festen Körper, so daß damit das negative Resultat bei den Elektrolyten erklärt wäre.

Zusammenfassung.

1. Die Änderung des Widerstandes von Metallen im Magnetfelde hängt stark von der Temperatur ab, so daß man bei möglichst konstanter Temperatur beobachten muß, wofür eine Methode angegeben wird.

2. Elektrolyte erleiden keine Widerstandsänderung in Feldern bis zu 3000 Gauss bei Beobachtung senkrecht zu den

Kraftlinien und bis 1000 Gauss bei Beobachtung parallel zu den Kraftlinien; dieselbe ist kleiner als $^1/_{250}$ Proz. des Widerstandes.

3. In denselben Feldern läßt sich für Quecksilber keine Änderung nachweisen, die bei senkrechter Stellung zu den Kraftlinien größer als $^1/_{25\,000}$ Proz. und bei Stellung parallel zu den Kraftlinien größer als $^1/_{20\,000}$ Proz. ist. Elektrodynamische Einflüsse werden durch genügend enge Kapillaren vermieden.

4. Flüssiges Wismut zeigt senkrecht zu den Kraftlinien bei 3000 Gauss und 365° eine Widerstandsvermehrung um $^1/_{660}$ Proz., die auf elektrodynamische Einwirkungen zurückgeführt wird.

5. Aus den Beobachtungen an den Elektrolyten und dem Quecksilber geht mit großer Wahrscheinlichkeit, aus denen an geschmolzenem Wismut mit Wahrscheinlichkeit hervor, daß flüssige Körper im Magnetfelde keine Widerstandsänderung erleiden.

Cöthen (Anhalt), Physik. Laboratorium des Polytechn.,
Juli 1907.

(Eingegangen 30. Juli 1907.)

8. *Abhängigkeit des Verhaltens Hertzscher Gitter vom Leitvermögen;* *von Cl. Schaefer und M. Laugwitz.*

In den beiden vorhandenen Theorien des Hertzschen Gitters, die von J. J. Thomson[1]) und H. Lamb[2]) herrühren, wird die vereinfachende Annahme gemacht, daß die Leitfähigkeit des Materials, aus dem das Gitter konstruiert ist, unendlich groß sei. Diese Voraussetzung ist in der Tat unter den gewöhnlichen Verhältnissen zulässig, und noch kein Beobachter hat demgemäß einen Unterschied in dem Verhalten von Gittern konstatiert, die in ihren geometrischen Bestimmungsstücken identisch, dagegen dem Material nach verschieden waren.

In den genannten Theorien werden nun noch zwei weitere Voraussetzungen eingeführt: einerseits soll der Drahtradius (c) klein gegen den Drahtabstand (a), andererseits dieser letztere wieder klein gegen die Wellenlänge der auffallenden Strahlung sein. Beide Bedingungen sind bei Hertzschen Gittern als erfüllt anzusehen.

In folgendem sehen wir von der Thomsonschen Theorie ganz ab, deren Unzulänglichkeit in einer früheren Arbeit von uns[3]) nachgewiesen wurde. Dagegen ergab nach den Messungen von G. H. Thomson[4]) und von uns[5]) die Lambsche Theorie eine befriedigende Übereinstimmung mit der Beobachtung. Bei flüchtiger Prüfung sollte man nun erwarten, daß dieser Anschluß um so besser werden würde, je besser die genannten

1) J. J. Thomson, Recent researches in electricity and magnetism p. 425 ff.

2) H. Lamb, Proc. of the London Math. Soc. **29.** 2. Teil, p. 523 ff. 1897/98.

3) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **21.** p. 587. 1906.

4) G. H. Thomson, Straßburger Inaug.-Diss. 1906; auch Ann. d. Phys. **22.** p. 865. 1907.

5) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **23.** p. 599. 1907.

Voraussetzungen erfüllt sind, je kleiner z. B. das Verhältnis c/a ist. *Indessen ist dies keineswegs der Fall.*

Gewisse Überlegungen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, führten uns im Gegenteil zu der Ansicht, daß im Falle *extrem dünner* Drähte sich Abweichungen von der Lambschen Theorie insofern ergeben müßten, als hier die *Individualität* des Materials, d. h. seine Leitfähigkeit (wenn wir von ferromagnetischen Stoffen absehen) zum Vorschein kommen müßte. Je *geringer* in diesem Falle die Leitfähigkeit des Materials wäre, um so stärker müßte sich die Abweichung von der Lambschen Theorie und der verschiedenen Gitter voneinander bemerklich machen.

Einen Anhaltspunkt, wie groß die *Unterschiede* zwischen solchen aus verschiedenem Material bestehenden Gittern ausfallen müßten, liefert die Untersuchung des Verhaltens eines einzelnen zylindrischen Drahtes gegenüber elektrischen Wellen. Die Störung, die ein solcher in einem homogenen Strahlungsfelde hervorruft, ist vollständig berechnet von J. J. Thomson[1]), W. v. Ignatowsky[2]), W. Seitz.[3]) Insbesondere befinden sich unter den von Seitz numerisch berechneten Beispielen zwei, die sehr gut den Unterschied des Verhaltens zwischen dicken und extrem dünnen Drähten hervortreten lassen. So[4]) z. B. absorbiert ein Kupferdraht von 0,1 cm Radius, auf den ebene elektrische Wellen von der Amplitude M und der Länge 30 cm auffallen, praktisch so gut wie *nichts* von der auffallenden Energie, d. h. er verhält sich mit kolossaler Annäherung wie ein Körper mit unendlich großem Leitvermögen. Ganz anders dagegen verhält sich gegenüber dem nämlichen elektrischen Wellenzuge ein Platindraht von 0,0002 cm Radius: er absorbiert pro Schwingung und pro Zentimeter Länge eine Energiemenge vom Betrage $1{,}5\,M^2$.[5]) Hier macht sich also der *endliche* Wert der Leitfähigkeit schon sehr bemerklich.

---

1) J. J. Thomson, l. c. p. 428 ff.
2) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **18**. p. 495. 1905.
3) W. Seitz, Ann. d. Phys. **19**. p. 554. 1906.
4) W. Seitz, l. c. p. 556 ff.
5) W. Seitz, l. c. p. 562 ff.

Leider sind Drähte von der angegebenen Stärke nur für Platin erhältlich, so daß man keine vergleichenden Messungen mit verschiedenem Material machen kann. Dagegen liefert die Firma Hartmann & Braun in Frankfurt a. Main unter der Bezeichnung „Haardrähte" Drähte aus beliebigem Material bis zur Stärke von 0,001 cm Radius herab. Falls der Einfluß der Endlichkeit des Leitvermögens bei dieser Drahtdicke schon merklich war, so konnte man den Versuch wagen, das individuelle Verhalten von Hertzschen Gittern aus verschiedenen Stoffen experimentell nachzuweisen.

Eine sehr wesentliche Schwierigkeit dieser Messungen, nämlich die Inkonstanz des Erregers der elektrischen Wellen, war durch die von dem einen[1]) von uns angegebene Konstruktion von vornherein beseitigt. Diesen Erreger haben wir schon bei unseren früheren Arbeiten benutzt und erprobt; auch bei den vorliegenden Messungen hat er sich durchaus bewährt.

Es handelt sich nun zunächst darum, zu berechnen, welche Energiemengen pro Schwingungsdauer von verschiedenen Drähten, deren Radius 0,0125 mm betrug (diese Drahtstärke wurde zu den endgültigen Versuchen gewählt), absorbiert werden. Die zwar nicht schwierige, aber sehr zeitraubende und mühsame Berechnung hat auf unsere Bitte Hr. cand. phil. Hans Schulz durchgeführt, dem wir auch an dieser Stelle unsern besten Dank aussprechen möchten. Es ergab sich in der Tat das Resultat, daß die Unterschiede groß genug waren, um den Versuch zu rechtfertigen.

Wir bedienten uns dabei derselben Apparate und der gleichen Anordnung, wie wir sie in früheren Arbeiten[2]) beschrieben haben. Erwähnt sei nur, daß bei den Reflexionsversuchen ein *möglichst kleiner* Einfallswinkel (ca. 7°) gewählt wurde, um dem Falle senkrechter Inzidenz möglichst nahe zu kommen. Nur die Herstellung der Gitter bedarf einer besonderen Beschreibung.

1) M. Laugwitz, Physik. Zeitschr. 8. p. 378. 1907.

2) Vgl. z. B. Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 16. p. 106. 1905; Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. 21. p. 587. 1906.

Wegen der geringen Drahtstärke war es nicht angängig, die Drähte frei über einen Holzrahmen zu spannen, da sonst das Gitter zu leicht beschädigt werden kann. Wir entschieden uns daher dafür, sie auf einer Hartgummiplatte von ca. 1 mm Stärke zu befestigen. Aber auch dieses Verfahren hatte zunächst Schwierigkeiten; denn die dünne Platte biegt sich selbst unter dem geringen, durch die Spannung der Drähte verursachten Zuge durch, so daß diese nach einiger Zeit schlaff werden und dadurch das Gitter unbrauchbar wird. Wir mußten daher die Drähte ihrer ganzen Länge nach auf der Unterlage befestigen. Nach mehreren nicht völlig befriedigenden Vorversuchen führte schließlich folgendes Verfahren zum Ziele: Die Hartgummiplatte besaß eine Fläche von 40,5 cm^2. An zwei gegenüberliegenden Rändern war je eine Reihe von Löchern gebohrt, in denen kleine Holzpfrieme, sogenannte „Schusternägel", befestigt wurden. Um diese wurde der Draht herumgeschlungen und straff gezogen. Da die Drähte äquidistant sein sollten, so durften die Lochabstände nicht gleich groß sein, vielmehr mußte auf die Dicke der „Schusternägel" Rücksicht genommen werden. Nachdem die Drähte gespannt waren, betrug ihr Abstand 1,5 cm. Dann wurde mittels eines Zerstäubers eine alkoholische Lösung von Schellack auf die Hartgummiplatte gespritzt; nach deren Eintrocknen waren die Drähte in der richtigen Lage fixiert.

Es handelte sich nun zunächst darum, festzustellen, mit welcher Genauigkeit auf diese Weise ein bestimmtes Gitter reproduziert werden kann. Wir benutzten zu diesem Vergleich zwei Silberdrahtgitter, die nach der obigen Methode angefertigt waren; außerdem hatten wir noch von den Vorversuchen ein Silberdrahtgitter von derselben geometrischen Beschaffenheit, aber weniger sorgfältiger Herstellung zur Verfügung. Die Prüfung auf Reflexionsvermögen und Durchlässigkeit ergab nun, daß nicht nur die beiden guten, sondern auch das schlechtere Gitter innerhalb der Fehlergrenze vollkommen übereinstimmten. Danach kann mit voller Sicherheit behauptet werden, daß nach unserer oben beschriebenen Methode die Gitter mit mehr als ausreichender Exaktheit reproduziert

werden können. Die zur Vergleichung verschiedener Gitter notwendige Identität der geometrischen Beschaffenheit ist somit erfüllt.

Als Gittermaterial wählten wir vier möglichst weit in bezug auf ihr Leitvermögen voneinander abstehende Metalle, nämlich Silber, Platin, Manganin, Kruppin. Die Widerstände für 1 m Draht vom gewählten Radius ($r = 0{,}0125$ mm) sind ungefähr folgende:

Silber: 39 Ω, Platin: 274 Ω, Manganin: 970 Ω, Kruppin: 1620 Ω.

Wir haben bei unseren Versuchen die Wellenlänge der primären Strahlung nicht systematisch variiert, da es uns zunächst nur darauf ankam, überhaupt *Unterschiede* nachzuweisen; die unten mitgeteilten Versuche beziehen sich demgemäß auf eine Wellenlänge von 30 cm. Doch haben wir auch manche Messungen (namentlich Durchlässigkeitsbestimmungen) mit anderen Wellenlängen aus dem Intervalle 10—30 cm ausgeführt, die im wesentlichen zu denselben Ergebnissen führten.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate unserer Beobachtungen niedergelegt (D = Durchlässigkeit, R = Reflexionsvermögen).

Material	R beob.	D beob.	A ber.	$A/\sqrt{\omega}$
Silber . . .	35,5 %	62,1 %	2,4 %	0,38
Platin . . .	32,9	60,6	6,5	0,39
Manganin . .	32,0	57,7	10,3	0,33
Kruppin . .	25,3	55,8	18,9	0,46

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Individualität des Materials sich zwar schwach, aber doch unverkennbar bemerkbar macht. Addiert man ferner R und D, und subtrahiert die Summe von 100, so erhält man die in der Tabelle mit A bezeichneten Werte, die also das *Absorptions*vermögen der Gitter darstellen. Auch hier kommt die Verschiedenheit der Leitfähigkeit deutlich zum Ausdruck. In der letzten Kolumne

endlich sind die Quotienten $A/\sqrt{\omega}$ eingetragen, die nach dem bekannten, aus der Maxwellschen Theorie folgenden Gesetze *konstant* sein sollen. In der Tat sieht man, daß, während die Absorptionen vom 1fachen bis zum 9fachen Werte schwanken, der fragliche Quotient *relativ wenig* variiert. In Anbetracht der Schwierigkeit der Messungen kann diese Schwankung nicht Wunder nehmen; im Gegenteil wird man die Konstanz der Größe $A/\sqrt{\omega}$ wohl als befriedigend bezeichnen dürfen.

Breslau, Physik. Inst. d. Univ., im Juli 1907.

(Eingegangen 20. Juli 1907.)

9. *Versuche über das lichtelektrische Verhalten von Metallen beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand;* *von H. Dember.*

Frühere Versuche von Elster und Geitel[1]) und J. J. Thomson[2]) haben für den Einfluß der Temperatur auf den lichtelektrischen Effekt an Alkalimetallen in stark verdünnten Gasen Resultate ergeben, die mit neueren Arbeiten von E. Ladenburg[3]), Lienhop[4]), W. Mansergh Varley und F. Unwin[5]), sowie von R. A. Millikan und G. Winchester[6]) nicht gut im Einklang stehen.

Elster und Geitel fanden für Kalium im Wasserstoffvakuum bei einer Temperatursteigerung von 25,3° auf 62,9° eine Zunahme des Effektes um mehr als 50 Proz. J. J. Thomson beschreibt einen Versuch, bei dem er an einem Alkalimetall bei Erwärmung bis auf etwa 200° einen sehr starken Anstieg des lichtelektrischen Stromes beobachtete. Hieraus und aus den Versuchen von Elster und Geitel zieht J. J. Thomson den Schluß, daß die Alkalimetalle bei hohen Temperaturen viel empfindlicher sind als bei tiefen.

Der Verfasser benutzte in einer früheren Arbeit[7]), bei deren Verlauf die Zimmertemperatur etwa zwischen 5° und 30° geschwankt hat, eine Legierung von Alkalimetallen im höchsten Vakuum zur Kontrolle der Versuchsbedingungen (Lichtinten-

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 48. p. 625. 1893.

2) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases p. 239. 1903.

3) E. Ladenburg, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 9. p. 166. 1907.

4) A. Lienhop, Ann. d. Phys. 12. p. 281. 1906.

5) W. Mansergh Varley u. F. Unwin, Proc. Edinburg Soc. 27. p. 117. 1907.

6) R. A. Millikan u. G. Winchester, Phil. Mag. 6. p. 188. 1907.

7) H. Dember, Ann. d. Phys. 20. p. 879. 1906.

sität, Entfernungen). Da während der Ausführung der Versuche (ca. 1 Jahr) niemals eine Änderung der Empfindlichkeit dieser Zelle beobachtet wurde, so ließ sich auf das Fehlen einer merklichen Ermüdung an diesen Metallen und auf die Einflußlosigkeit der Temperatur schließen.[1])

Die folgenden Versuche wurden nun über ein größeres Temperaturintervall ausgeführt.

Um leichter diskutierbare Resultate zu erzielen, wurden die hier benutzten Zellen mit einer Toeplerpumpe soweit als möglich evakuiert. Auf diese Weise war der Einfluß des umgebenden Gases (Vermehrung des Druckes bei der Erwärmung und Ionisierung von Gasteilchen durch die vom Licht ausgelösten Elektronen) vermieden. Da die Alkalimetalle imstande sind, große Mengen von Gasen — besonders Wasserstoff — in sich aufzunehmen, so wurden sie stets nach dem Schmelzen im Vakuum lange Zeit erhitzt und zwar soweit, wie es die Glaswände gestatteten, ohne vom äußeren Luftdruck zu stark deformiert zu werden.

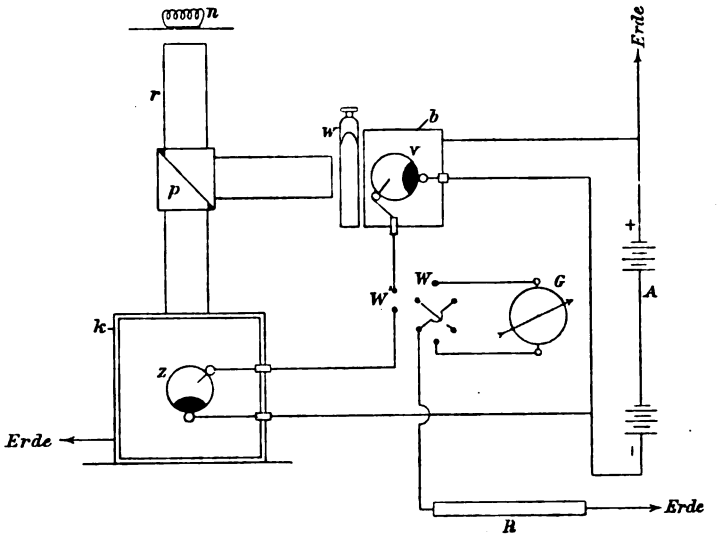
Als Stromquelle für die lichtelektrische Zelle diente eine Hochspannungsbatterie von 120—180 Zellen, deren Spannung hinreichte, daß der Zusatz weiterer Elemente keine Vermehrung des lichtelektrischen Stromes hervorrief.

Zur Beleuchtung wurde eine Nernstlampe verwendet, die von einer Akkumulatorenbatterie gespeist wurde. Trotz der relativ großen Konstanz dieser Lichtquelle war es wegen der Empfindlichkeit der benutzten Metalle erforderlich, eine Vergleichszelle einzurichten. Weil es wesentlich darauf ankam, die Energie des sichtbaren Lichtes zu kontrollieren, so mußte auch hier eine Zelle mit Kalium oder Natrium verwendet werden.

Die folgende Skizze soll die Einzelheiten der Versuchsanordnung zeigen. Die auf einem Schiefersockel befestigte Versuchszelle (z) wurde in den mit Asbest ausgefütterten Blechkasten (k), der von außen geheizt werden konnte, gebracht. Der Heizkasten war mit einem Glimmerfenster zur Beobachtung des Zustandes der Oberfläche und mit einem Thermo-

1) Vgl. auch E. v. Schweidler, Wiener Ber. **115** (IIa). p. 7—9 und p. 11. 1903; K. Bergwitz, Physik. Zeitschr. **8**. p. 373. 1907.

meter versehen. Die Zuführungsdrähte der Elster-Geitelschen Zelle waren durch Quarzröhrchen gegen den geerdeten Kasten isoliert.



n Nernstlampe.	*z* Untersuchte Zelle.
r Blechrohr.	*v* Vergleichszelle.
p Glasplatte.	*b* Blechhülle.
k Heizkasten.	*G* Galvanometer.
w Wassertrog.	*W*, *W'* Wippe und Umschalter.
A Akkumulatoren.	*R* Großer Schutzwiderstand.

Fig. 1.

Das von der Nernstlampe (*n*) kommende wirksame Licht fiel durch eine Glasplatte (*p*) von 0,12 mm Dicke auf die Zelle (*z*). Ein Teil des Lichtes wurde von der gegen die Achse des Rohres (*r*) um 45° geneigten Glasplatte (*p*) auf die Vergleichszelle (*v*) reflektiert. Diese saß ebenfalls in einem geerdeten Blechkasten (*b*) und war durch Asbestschirme und einen im Strahlengang stehenden Wassertrog (*w*) vor den Wärmestrahlen geschützt.

Um der Vergleichszelle eine möglichst hohe Empfindlichkeit zu geben, wodurch die Genauigkeit der Lichtkontrolle gesteigert wird, wurden nach dem Vorgange von Elster und

Geitel Zellen mit einem Wasserstoffvakuum von ca. 0,4 mm Druck hergestellt. Die Empfindlichkeit dieser Gas enthaltenden Zellen war nun von der Temperatur nicht unabhängig und ihre Verwendung machte den Schutz gegen die Wärmestrahlen nötig.

Die Messung des lichtelektrischen Stromes geschah mit einem Deprez-d'Arsonval-Galvanometer, dessen Empfindlichkeit bei 1,95 m Skalenabstand $3{,}4 \cdot 10^{-10}$ Amp./mm betrug. Die Beobachtungen wurden in der Weise vorgenommen, daß zuerst der Effekt an der Vergleichszelle abgelesen wurde, hierauf an der zu untersuchenden Zelle bei Belichtung, dann wieder an der Vergleichszelle und schließlich zur Prüfung der Isolation, insbesondere zur Messung des durch das Leitendwerden des Glases bedingten Stromes, abermals an der Versuchszelle, doch ohne Belichtung.

Die am *Natrium* angestellten Versuche hatten folgenden typischen Verlauf. Bis zu einer Temperatur von etwa 15° oberhalb des Schmelzpunktes, der bei 95,6° liegt (Bunsen), war kein Einfluß der Temperatursteigerung merklich. Zwischen 110° und 135° ist ein geringer bei verschiedenen Zellen mehr oder weniger ausgeprägter Abfall des Hallwachseffektes zu beobachten. Wurde das Erhitzen über 140° ausgedehnt, so stieg die Leitfähigkeit der Glaswände so stark an, daß sie eine Messung des lichtelektrischen Effektes unmöglich machte.

Die folgende Tabelle und Kurve geben ein Bild dieser Versuche.

Natrium im Vakuum.

Temperatur in ° C.	26,2	35,5	45,6	55,1	65,0	75,0	85,2	94,6
Effekt der Versuchszelle / Effekt der Vergleichszelle	3,06	2,97	2,98	3,10	3,00	3,00	3,02	3,10

Festes Metall

Temperatur in ° C.	97,9	101,5	108,4	119,7	130,9	139,5
Effekt der Versuchszelle / Effekt der Vergleichszelle	3,10	3,07	3,10	2,35	2,35	4,27

Flüssiges Metall

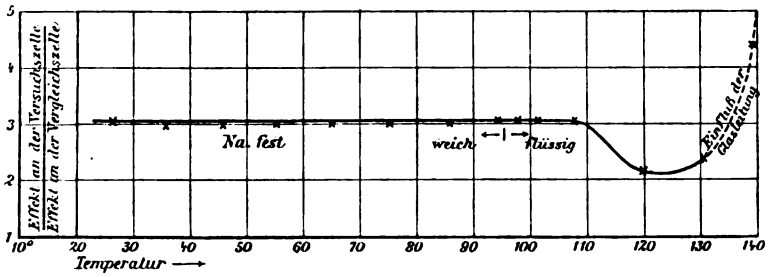


Fig. 2.

Das merkwürdige Verhalten des Natriums etwa 15—30° oberhalb des Schmelzpunktes findet vielleicht darin eine Erklärung, daß während dieses Intervalles die Oberfläche glatter und daher stärker reflektierend wird, während sie beim Schmelzpunkt noch die Erhebungen des erstarrten Metalles behält. Wie schon Aigner[1]) an einer frisch behandelten Zinkplatte bemerkt hat, ist der Hallwachseffekt daran schwächer wie an einer weniger gut reflektierenden. Es wird dieses dadurch verständlich, daß bei der besser reflektierenden Oberfläche nur ein geringerer Teil des wirksamen Lichtes absorbiert wird, d. h. in das Metall eindringt und dort auslösend wirken kann.

Versuche an Kalium im Vakuum.

Temp.	Zustand	Versuchszelle / Vergleichszelle
34,0°	fest	1,40
58,3	flüssig	1,35
62,5		1,33
76,5		1,35
87,5		1,38

Temp.	Zustand	Versuchszelle / Vergleichszelle
28,3°	fest	1,30
50,8		1,30
59,6	flüssig	1,40
67,5		1,38
76,3		1,24
90,5		1,20

Die Untersuchung der Abhängigkeit des Hallwachseffektes von der Temperatur an einer *flüssigen K–Na-Legierung* (äqui-

1) F. Aigner, Wiener Ber. 115 (IIa). p. 1485. 1906.

molekulare Mengen von Kalium und Natrium), deren Schmelzpunkt bei ca. 4,5° liegt, ergab ebenfalls zwischen 20 und 80° keinen Einfluß der Temperatur.

Aus diesen Versuchen folgt nicht nur, daß die Größe des lichtelektrischen Effektes im hohen Vakuum von der Temperatur unabhängig ist, sondern auch daß eine Änderung des Aggregatzustandes weder einen Sprung in der Größenordnung des Effektes hervorruft, noch einen Gang mit der Temperatur bedingt.

Dresden, Physik. Inst. d. techn. Hochschule, Juli 1907.

(Eingegangen 15. Juli 1907.)

10. *Über die Widerstandsänderung von Metalldrähten durch Sauerstoffokklusion; von Guido Szivessy.*

Von Becker[1]) ist zuerst anläßlich einer Untersuchung von Graham über die Okklusion von Wasserstoff durch Palladium gezeigt worden, daß ein Palladiumdraht durch Wasserstoffokklusion seinen elektrischen Widerstand ändert, und zwar besteht diese Änderung in einer Zunahme des Widerstandes. Diese Eigenschaft des sogenannten Palladiumwasserstoffs, sich in bezug auf die elektrische Leitfähigkeit wie eine Legierung zu verhalten, ist dann von Dewar, Knott, Krakau, Brucchieri und Elfresh, neuerdings von F. Fischer[2]) untersucht worden; letzterer fand, daß der Widerstand eines Palladiumdrahtes, welcher Wasserstoff okkludiert hat, sich zu seinem ursprünglichen Widerstand verhält wie 1,69 : 1.

Obgleich auch andere Metalle Gase zu okkludieren vermögen, und eine Beeinflussung der elektrischen Leitfähigkeit durch die Okklusion zu erwarten ist, so liegt hierüber doch nur eine Arbeit von Kimura[3]) vor, in welcher festgestellt wird, daß Eisen infolge elektrolytischer Wasserstoffokklusion eine Zunahme des elektrischen Widerstandes erleidet. Namentlich ist die Widerstandsänderung von Metalldrähten durch Okklusion von Sauerstoff bis jetzt noch nicht beobachtet worden, obgleich eine solche wenigstens bei einigen Metallen eintritt, wie die folgende Untersuchung zeigt, bei welcher der Reihe nach Silber, Gold, Platin und Palladium geprüft wurden.

Um festzustellen, ob ein Metalldraht seinen elektrischen Widerstand infolge Absorption von Sauerstoff ändert, wurde er folgendermaßen behandelt. Zuerst wurde der Draht im Sauerstoffstrome mittels des elektrischen Stromes geglüht, dann wurde so lange Sauerstoff über den Draht geleitet, bis dieser

1) Th. Graham, Pogg. Ann. **136.** p. 325. 1869.
2) F. Fischer, Ann. d. Phys. **20.** p. 503. 1906.
3) S. Kimura, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **20.** p. 203. 1893/94.

vollständig erkaltet war. Der Sauerstoff wurde einer Bombe entnommen und in einer Waschflasche mit Schwefelsäure getrocknet. Der Widerstand des Drahtes wurde vor und nach der Behandlung mit Sauerstoff mittels einer gewöhnlichen Wheatstoneschen Brücke gemessen. Da aber der Widerstand eines Metalldrahtes sich schon durch bloßes Ausglühen ändert, so mußte ich, um die Widerstandsänderung durch Ausglühen einerseits und die durch Sauerstoffaufnahme andererseits auseinanderhalten zu können, den Draht vor der Behandlung mit Sauerstoff so lange ausglühen, bis sein Widerstand nach dem Erkalten einen Grenzwert erreicht hatte, d. h. bis weiteres Ausglühen den Widerstand des Drahtes nicht mehr änderte. Ein solcher Grenzwert ist durch mehrmaliges Erhitzen auf ein und dieselbe hohe Temperatur und Erkaltenlassen auf die Anfangstemperatur praktisch immer zu erreichen.[1])

Um den Widerstand des Drahtes vor und nach der Behandlung mit Sauerstoff unmittelbar vergleichen zu können, wäre es notwendig gewesen, die Widerstandsmessungen bei ein und derselben Temperatur auszuführen. Im allgemeinen waren jedoch diese Temperaturen verschieden. Es mußte deshalb der vor der Okklusion bei der Temperatur t gemessene Widerstand w_t auf diejenige Temperatur τ umgerechnet werden, bei welcher die Widerstandsbestimmung nach der Behandlung mit Sauerstoff geschah, mittels der Formel

$$w_\tau = w_t(1 + \alpha[\tau - t]),$$

wobei α den Temperaturkoeffizienten des Metalldrahtes vor der Okklusion bedeutet. Die Differenz zwischen w_τ und dem bei der Temperatur τ gemessenen Widerstand w'_τ des mit Sauerstoff behandelten Drahtes ergibt die Widerstandsänderung infolge Glühens im Sauerstoffstrome. Den bei der Temperatur t gemessenen Widerstand vor der Okklusion w_t und den bei der Temperatur τ gemessenen Widerstand nach der Okklusion w'_τ auf ein und dieselbe, zwischen t und τ gelegene Mitteltemperatur umzurechnen, wie es wohl wünschenswert gewesen wäre, konnte nicht geschehen, weil der Temperaturkoeffizient des mit Sauerstoff beladenen Drahtes nicht bekannt war und auch nicht be-

1) H. Chevallier, Compt. rend. **130.** p. 120. 1900.

stimmt wurde, da befürchtet werden mußte, daß bei der zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten nötigen Erhitzung ein Teil des aufgenommenen Sauerstoffs hätte entweichen können. Da aber die Differenz $\tau - t$ meist sehr klein war, so konnte diese einseitige Bevorzugung von τ keine Fehler hervorrufen.

Bei der Messung des Widerstandes befand sich der Draht in einer Glasröhre, in welcher sich auch das Thermometer befand, das die Temperaturen t und τ anzeigte. Die Vorrichtung war derart, daß der Draht auch beim Glühen aus der Röhre nicht herausgenommen werden mußte.

1. Silber.

Silber vermag beim Erhitzen in Sauerstoff beträchtliche Mengen dieses Gases aufzunehmen. Gewalztes Silber absorbiert nach Graham[1]) bei Rotglut an der Luft das 1,37fache Volumen Sauerstoff. Gefrittetes Silber nimmt nach Graham[2]) beim Erhitzen das 6,15- bis 8,65fache Volumen Sauerstoff, nach G. Neumann[3]) bei ca. 450° im Sauerstoffstrome das 4,09- bis 5,43fache Volumen Sauerstoff auf. Silberdraht endlich vermag nach Graham[4]) bei Rotglut das 0,745fache Volumen Sauerstoff zu absorbieren, ohne daß sich eine Oxydation bemerkbar macht.

Erster Silberdraht. Der Draht war 0,1 mm stark und bestand aus gewöhnlichem, käuflichem Silber. Zuerst wurde der Draht durch einen Strom von 3,5 Amp. 2 Stunden lang, dann $3^1/_2$ Stunden lang geglüht, wobei die Enden des aufgehängten Drahtes eben beginnende Rotglut zeigten.[5]) Nach dem Erkalten hatte der Draht einen Widerstand erreicht, der durch weiteres Ausglühen an der Luft nicht mehr geändert wurde.

---

1) Th. Graham, Phil. Mag. (4) **32.** p. 527. 1866.

2) l. c. p. 527.

3) G. Neumann, Wiener Ber. **101.** IIb. p. 51. 1892.

4) Th. Graham, l. c. p. 526.

5) Der Widerstand des Drahtes vor dem Ausglühen wurde ebenfalls gemessen, aber hier nicht angegeben, da für diese Arbeit die Widerstandsänderung durch Ausglühen ohne Interesse ist. Es genügt zu bemerken, daß bei sämtlichen Drähten von Silber, Gold, Platin und Palladium durch Ausglühen an der Luft eine Widerstandsabnahme eintrat.

In der folgenden Tabelle bedeutet t die Temperatur der Ablesung, w den Vergleichswiderstand der Wheatstoneschen Brücke in Ohm, w_t den Widerstand des Drahtes in Ohm bei der Temperatur t, $w_t : w$ das am Meßdraht der Brücke abgelesene Widerstandsverhältnis:

w_t	$w_t : w$	w	t
1,0296	507,3 : 492,7	1,0	17,9
1,0297	483,5 : 516,5	1,1	17,9
1,0296	461,8 : 538,2	1,2	17,9
1,0289	441,8 : 558,2	1,3	17,9
1,0292	533,5 : 466,5	0,9	17,9
1,0296	507,3 : 492,7	1,0	17,9
1,0293	483,4 : 516,6	1,1	18,0
1,0296	461,8 : 538,2	1,2	18,0
1,0289	441,8 : 558,2	1,3	18,0
1,0292	533,5 : 466,5	0,9	18,0
Im Mittel: w_t = 1,0294 Ohm			t = 17,9°
Berechnet: w_τ = 1,0298 Ohm[1])			τ = 18,0°

Hierauf wurde der Draht 4 Stunden lang im Sauerstoffstrome bei 3,5 Amp. geglüht; nach dem Erkalten im Sauerstoffstrome wurde der Widerstand wieder gemessen. Er ergibt sich aus der folgenden Tabelle, bei welcher die Bezeichnungen den in der vorigen Tabelle gebrauchten sinngemäß entsprechen.

w_τ'	$w_\tau' : w$	w	τ
1,0355	463,2 : 536,8	1,2	18,2
1,0348	443,2 : 556,8	1,3	18,2
1,0344	424,9 : 575,1	1,4	18,2
1,0355	535,0 : 465,0	0,9	18,0
1,0354	508,7 : 491,3	1,0	18,0
1,0355	484,9 : 515,1	1,1	18,0
1,0350	463,1 : 536,9	1,2	18,0
1,0343	443,1 : 556,9	1,3	18,0
1,0342	534,7 : 465,3	0,9	17,9
Im Mittel: w_τ' = 1,0350 Ohm			τ = 18,0°

Durch das Glühen im Sauerstoffstrome war also der Draht um $w_\tau' - w_\tau = 0{,}0052$ Ohm, d. i. um **0,50 Proz.**, gestiegen.

Zweiter Silberdraht. Der Draht war 0,1 mm stark und von demselben Material wie Draht **1.** Er wurde zuerst

1) Temperaturkoeffizient $\alpha = 0{,}0038$.

5 Stunden lang, dann 14 Stunden lang an der Luft durch 3,3 Amp. geglüht. Weiteres Glühen beeinflußte den Widerstand nicht mehr.

w_t	$w_t : w$	w	t
1,0881	521,1 : 478,9	1,0	19,7
1,0877	497,2 : 502,8	1,1	19,7
1,0892	475,8 : 524,2	1,2	19,8
1,0892	455,9 : 544,1	1,3	19,8
1,0889	437,5 : 562,5	1,4	19,8
1,0876	420,3 : 579,7	1,5	19,9
1,0877	404,7 : 595,3	1,6	20,0
1,0913	577,0 : 423,0	0,8	20,0
1,0917	609,3 : 390,7	0,7	20,0

Im Mittel: $w_t =$ 1,0890 Ohm $t =$ 19,8°

Berechnet: $w_\tau =$ **1,0898 Ohm** $\tau =$ 20,0°

Der Draht wurde nun 5 Stunden lang durch 3,3 Amp. im Sauerstoffstrome geglüht. Nach dem Erkalten ergab sich folgender Wert des Widerstandes:

w'_τ	$w'_\tau : w$	w	τ
1,0921	522,0 : 478,0	1,0	19,8
1,0921	498,2 : 501,8	1,1	19,9
1,0927	476,6 : 523,4	1,2	20,0
1,0936	456,9 : 543,1	1,3	20,0
1,0925	438,3 : 561,7	1,4	20,0
1,0912	421,1 : 578,9	1,5	20,0
1,0914	405,5 : 594,5	1,6	20,1
1,0960	549,1 : 450,9	0,9	20,2
1,0958	578,0 : 422,0	0,8	20,2
1,0963	610,3 : 389,7	0,7	20,3

Im Mittel: $w'_\tau =$ **1,0934 Ohm** $\tau =$ 20,0°

Das Glühen im Sauerstoffstrome hatte also ein Anwachsen des Widerstandes um $w'_\tau - w_\tau = 0{,}0036$ Ohm, d. i. um **0,33 Proz.**, zur Folge.

Dritter Silberdraht. Da die Drähte 1 und 2 nicht aus reinem Silber bestanden, so konnte vermutet werden, daß die Widerstandszunahme durch Glühen im Sauerstoff infolge der Oxydation der Beimengungen eingetreten war. Es wurde deshalb ein von G. Siebert-Hanau als chemisch rein gelieferter Silberdraht auf dieselbe Art untersucht. Der 0,1 mm starke

Draht wurde 24 Stunden lang bei 2,2 Amp. geglüht und hatte dann folgenden Grenzwert des Widerstandes erreicht:

w_t	$w_t : w$	w	t
2,5949	440,2 : 559,8	3,3	21,6
2,5961	447,9 : 552,1	3,2	21,6
2,5975	455,9 : 544,1	3,1	21,7
2,5981	464,1 : 535,9	3,0	21,7
2,6029	473,0 : 527,0	2,9	21,7
2,6023	481,7 : 518,3	2,8	21,7
2,6024	490,8 : 509,2	2,7	21,7
2,6011	500,1 : 499,9	2,6	21,7
2,6020	510,0 : 490,0	2,5	21,7
2,6021	520,2 : 479,8	2,4	21,8

Im Mittel: w_t = 2,5999 Ohm t = 21,7°

Berechnet: w'_τ = 2,5843 Ohm[1]) τ = 20,2°

Nach 6 stündigem Glühen im Sauerstoffstrome bei 2,3 Amp. hatte der Draht folgenden Widerstand:

w'_τ	$w'_\tau : w$	w	τ
2,5979	519,8 : 480,2	2,4	20,5
2,5989	509,7 : 490,3	2,5	20,4
2,6000	500,0 : 500,0	2,6	20,3
2,6004	490,6 : 509,4	2,7	20,3
2,6002	481,5 : 518,5	2,8	20,2
2,6029	473,0 : 527,0	2,9	20,2
2,5981	464,1 : 535,9	3,0	20,2
2,5975	455,9 : 544,1	3,1	20,0
2,5971	448,0 : 552,0	3,2	20,0
2,5971	440,4 : 559,6	3,3	19,8

Im Mittel: w'_τ = 2,5990 Ohm τ = 20,2°

Die Widerstandszunahme durch Glühen im Sauerstoffstrome ergibt sich zu $w'_\tau - w_\tau = 0{,}0147$ Ohm, d. i. zu **0,57 Proz.**

2. Gold.

Während also Silber, und zwar sowohl käufliches als reines, durch Glühen im Sauerstoffstrome eine Zunahme des elektrischen Widerstandes erleidet, besitzt Gold diese Eigenschaft nicht. Nach Graham[2]) vermag Gold überhaupt keinen Sauerstoff aufzunehmen. Dagegen soll es nach G. Neumann[3])

1) Temperaturkoeffizient dieses reinen Drahtes $\alpha = 0{,}004$.

2) Th. Graham, Phil. Mag (4) **32.** p. 525. 1866.

3) G. Neumann, Wiener Ber. **101**, IIb. p. 52. 1892.

bei ca. 450° im Sauerstoffstrome das 32,78 fache, bez. das 48,49 fache Volumen Sauerstoff absorbieren. Die untersuchten Golddrähte wurden ebenso behandelt, wie ich es oben beim Silber beschrieben habe. Von einem Draht seien die Messungsresultate mitgeteilt. Der Draht war 0,1 mm stark und war von G. Siebert-Hanau als chemisch rein bezogen worden. Zuerst wurde der Draht 2 Stunden lang bei 2,15 Amp., dann $10^1/_2$ Stunden lang bei 2,8 Amp. erhitzt, wobei er in schwaches Dunkelrotglühen kam. Der schließlich erreichte, unveränderliche Widerstand war folgender:

w_t	$w_t : w$	w	t
1,6841	402,5 : 597,5	2,5	19,1
1,6844	412,4 : 587,6	2,4	19,2
1,6855	422,9 : 577,1	2,3	19,3
1,6848	433,7 : 566,3	2,2	19,3
1,6845	445,1 : 554,9	2,1	19,4
1,6860	457,4 : 542,6	2,0	19,4
1,6903	470,8 : 529,2	1,9	19,4
1,6890	484,1 : 515,9	1,8	19,5
1,6898	498,5 : 501,5	1,7	19,5
1,6888	513,5 : 486,5	1,6	19,5

Im Mittel: $w_t = 1{,}6867$ Ohm $\quad t = 19{,}36°$

Berechnet: $w_\tau = 1{,}6940$ Ohm [1]) $\quad \tau = 20{,}50°$

Hierauf wurde der Draht 5 Stunden lang durch 2,15 Amp. bei schwacher Dunkelrotglut im Sauerstoffstrome erhitzt. Nach dem Erkalten ergab sich folgender Widerstand:

w'_τ	$w'_\tau : w$	w	τ
1,6897	403,3 : 596,7	2,5	20,5
1,6907	413,3 : 586,7	2,4	20,5
1,6910	423,7 : 576,3	2,3	20,5
1,6924	434,8 : 565,2	2,2	20,5
1,6920	446,2 : 553,8	2,1	20,5
1,6934	458,5 : 541,5	2,0	20,5
1,6971	471,8 : 528,2	1,9	20,5
1,6972	485,3 : 514,7	1,8	20,5
1,6973	499,6 : 500,4	1,7	20,5
1,6969	514,7 : 485,3	1,6	20,5

Im Mittel: $w'_\tau = 1{,}6938$ Ohm $\quad \tau = 20{,}5°$

1) Temperaturkoeffizient $\alpha = 0{,}0038$.

Der Widerstand des Drahtes hatte also durch Glühen im Sauerstoff keine meßbare Änderung erfahren. Ebenso indifferent verhielt sich ein zweiter Golddraht von demselben Material.

8. Platin.

Weit stärker als bei Silber ist dagegen bei Platin die Abnahme des elektrischen Leitvermögens durch Okklusion von Sauerstoff. Platin besitzt in hohem Maße die Fähigkeit, Sauerstoff aufzunehmen, namentlich in fein verteiltem Zustande als Schwamm oder Mohr.[1]) Die Absorptionsfähigkeit glühender Platindrähte für Sauerstoff ist so groß, daß sie als sauerstoffentziehendes Mittel verwendet werden können.[2])

Erster Platindraht. Der 0,1 mm starke Draht von käuflichem Platin wurde zuerst 14 Stunden lang durch 2,15 Amp., dann 9 Stunden lang durch 2 Amp., endlich 12 Stunden lang durch 2 Amp. bei Dunkelrotglut ausgeglüht. Der Widerstand des Drahtes hatte alsdann folgenden konstanten Grenzwert erreicht:

w_t	$w_t : w$	w	t
1,9962	407,7 : 592,3	2,9	19,9
1,9962	416,2 : 583,8	2,8	20,0
1,9972	425,2 : 574,8	2,7	20,0
1,9977	434,5 : 565,5	2,6	20,1
1,9996	444,4 : 555,6	2,5	20,1
2,0004	454,6 : 545,4	2,4	20,2
2,0007	465,2 : 534,8	2,3	20,3
2,0009	476,3 : 523,7	2,2	20,3
2,0016	488,0 : 512,0	2,1	20,3
2,0016	500,2 : 499,8	2,0	20,3

Im Mittel: $w_t = 1{,}9992$ Ohm $t = 20{,}15°$

Berechnet: $w_T = 2{,}0003$ Ohm[3]) $T = 20{,}30°$

$w_\tau = 1{,}9988$ Ohm $\tau = 20{,}10°$

Nach 4stündigem Glühen im Sauerstoffstrome bei Dunkelrotglut durch 2 Amp. hatte sich der Widerstand auf folgenden Wert erhöht:

1) Vgl. L. Mond, W. Ramsay u. J. Shields, Zeitschr. f. phys. Chem. 19. p. 25. 1896.

2) A. Magnus, Physik. Zeitschr. 6. p. 13. 1905.

3) Temperaturkoeffizient $\alpha = 0{,}0038$.

w'_T	$w'_T : w$	w	T
2,0053	408,8 : 591,2	2,9	20,3
2,0060	417,4 : 582,6	2,8	20,3
2,0071	426,4 : 573,6	2,7	20,3
2,0075	435,7 : 564,3	2,6	20,3
2,0077	445,4 : 554,6	2,5	20,3
2,0085	455,6 : 544,4	2,4	20,3
2,0103	466,4 : 533,6	2,3	20,3
2,0089	477,3 : 522,7	2,2	20,3
2,0096	489,0 : 511,0	2,1	20,3
2,0096	501,2 : 498,8	2,0	20,3

Im Mittel: $w'_T = 2{,}0081$ Ohm $T = 20{,}3°$

4 stündiges Glühen im Sauerstoff hatte also eine Widerstandszunahme von $w'_T - w_T = 0{,}0078$ Ohm, d. i. von **0,39 Proz.**, hervorgerufen. Derselbe Draht wurde alsdann abermals im Sauerstoffstrome durch 2,18 Amp. 5 Stunden lang geglüht. Nach dem Erkalten ergab die Messung folgendes weiteres Anwachsen des Widerstandes:

w'_τ	$w'_\tau : w$	w	τ
2,0420	413,2 : 586,8	2,9	20,2
2,0435	421,9 : 578,1	2,8	20,2
2,0435	430,8 : 569,2	2,7	20,0
2,0437	440,1 : 559,9	2,6	20,0
2,0455	450,0 : 550,0	2,5	20,0
2,0453	460,1 : 539,9	2,4	20,1
2,0470	470,9 : 529,1	2,3	20,1
2,0463	481,9 : 518,1	2,2	20,1
2,0453	493,4 : 506,6	2,1	20,1
2,0453	505,6 : 494,4	2,0	20,2

Im Mittel: $w'_\tau = 2{,}0447$ Ohm $\tau = 20{,}1°$

Nach insgesamt 9stündigem Glühen im Sauerstoff betrug die Widerstandszunahme $w'_\tau - w_\tau = 0{,}0459$ Ohm, d. i. **2,30 Proz.**

Zweiter Platindraht. Ein 0,1 mm starker Draht, von demselben Material wie Draht 1, zeigte nach 20-, 15- und wieder

20 stündigem Glühen durch 2 Amp. (Dunkelrotglut) folgende konstanten Widerstand:

w_t	$w_t : w$	w	t
4,0482	447,4 : 552,6	5	18,1
4,0580	453,0 : 547,0	4,9	18,7
4,0594	458,2 : 541,8	4,8	18,7
4,0621	463,6 : 536,4	4,7	18,8
4,0629	469,0 : 531,0	4,6	18,8
4,0615	474,4 : 525,6	4,5	18,8
4,0631	480,1 : 519,9	4,4	18,8
4,0658	486,0 : 514,0	4,3	18,7
4,0628	491,7 : 508,3	4,2	18,7
4,0625	497,7 : 502,3	4,1	18,4

Im Mittel: w_t = 4,0606 Ohm t = 18,65°

Berechnet: w_τ = 4,0506 Ohm τ = 18,0°

5 stündiges Glühen im Sauerstoffstrome durch 2 Amp. bei Dunkelrotglut hatte eine Erhöhung des Widerstandes zur Folge, die sich aus nachstehender Tabelle ergibt:

w'_τ	$w'_\tau : w$	w	τ
4,1996	456,5 : 543,5	5	17,5
4,2045	461,8 : 538,2	4,9	17,6
4,2056	467,0 : 533,0	4,8	17,8
4,2066	472,3 : 527,7	4,7	18,0
4,2073	477,7 : 522,3	4,6	18,1
4,2057	483,1 : 516,9	4,5	18,2
4,2080	494,6 : 505,4	4,3	18,4
4,2097	506,6 : 493,4	4,1	18,4

Im Mittel: w'_τ = 4,2059 Ohm τ = 18,0°

Die durch 5 stündiges Glühen im Sauerstoffstrome erfolgte Widerstandszunahme beträgt $w'_\tau - w_\tau$ = 0,1553 Ohm, d. i. **3,83 Proz.**

Dritter Platindraht. Ein 0,1 mm starker, reiner Platindraht von G. Siebert-Hanau wurde 2 Stunden lang bei Hellrotglut erhitzt, worauf der Widerstand auf folgenden Wert gesunken war:

w_t	$w_t : w$		w	t
8,3124	491,5 : 508,5		8,6	13,8
8,3117	494,4 : 505,6		8,5	13,9
8,3132	497,4 : 502,6		8,4	13,9
8,3188	481,8 : 518,2	bei 12,6°	8,9	14,0
8,3218	484,7 : 515,3		8,8	14,0
8,3228	487,6 : 512,4		8,7	14,0
8,3165	500,5 : 499,5		8,8	14,0
8,3156	503,5 : 496,5		8,2	14,0
8,3134	506,5 : 493,5		8,1	14,1

Im Mittel: $w_t = 8{,}3162$ Ohm $\quad t = 14{,}0°$

Berechnet: $w_\tau = 8{,}4047$ Ohm $\quad \tau = 16{,}8°$

Durch 2 stündiges Glühen bei Hellrotglut im Sauerstoffstrome zeigte sich nach dem Erkalten folgendes Anwachsen des Widerstandes:

w'_τ	$w'_\tau : w$	w	τ
8,5990	491,4 : 508,6	8,9	16,8
8,5914	494,0 : 506,0	8,8	16,8
8,5894	496,8 : 503,2	8,7	16,9
8,5898	499,7 : 500,3	8,6	16,9
8,5888	502,6 : 497,4	8,5	16,9
8,5904	505,6 : 494,4	8,4	16,9
8,5872	508,5 : 491,5	8,3	16,7
8,5894	511,6 : 488,4	8,2	16,7
8,5908	514,7 : 485,3	8,1	16,6
8,5872	517,7 : 482,3	8,0	16,6

Im Mittel: $w'_\tau = 8{,}5903$ Ohm $\quad \tau = 16{,}8°$

Die Widerstandszunahme beläuft sich auf $w'_\tau - w_\tau = 0{,}1856$ Ohm, d. i. zu **2,19 Proz.**

4. Palladium.

Schließlich wurde noch ein Palladiumdraht von 0,1 mm Stärke auf dieselbe Art untersucht. Bereits beim Ausglühen im Bunsenbrenner hatte sich der Draht mit einer matten Oxydschicht beschlagen, die auch durch Erhitzen auf Hellrotglut mittels des elektrischen Stromes nicht mehr zu entfernen war. Durch mehrmaliges Ausglühen an der Luft bei Hellrotglut durch 1,5 Amp. war der Widerstand des Drahtes von 6,4910 Ohm auf 6,4398 Ohm gesunken; $2^1/_2$ stündiges und

nachher $7^1/_2$ stündiges Glühen im Sauerstoffstrome verursachte keine Änderung des Widerstandes. Es konnte nicht festgestellt werden, ob durch die Sauerstoffaufnahme infolge des Glühens an der Luft, auf welche die Oxydschicht unzweideutig schließen ließ[1]), eine Änderung des Widerstandes eingetreten war, da möglicherweise die durch das Glühen erfolgte Widerstandsabnahme größer war als die durch Sauerstoffaufnahme erfolgte Widerstandszunahme.

Demnach steht fest, daß Silber und Platin durch Aufnahme von Sauerstoff eine Abnahme des elektrischen Leitvermögens erleiden. Auffallend ist, daß auch bei Drähten von demselben Material, wie z. B. den Silberdrähten 1 und 2, welche Stücke ein und desselben längeren Drahtes waren, diese Abnahme verschieden ist. Diese Abweichungen rühren wohl von der verschieden langen Dauer des Erhitzens im Sauerstoffstrome, sowie davon her, daß die Drähte vor der Behandlung mit Sauerstoff verschieden lang ausgeglüht wurden. Für Platin gibt Lucas[2]) an, daß die Absorptionsfähigkeit von der erreichten Temperatur, der das Platin ausgesetzt war, abhängig ist. Quantitative Untersuchungen über diese Ursachen bleiben einer späteren Arbeit vorbehalten.

Zum Schlusse spreche ich an dieser Stelle Hrn. Prof. K. R. Koch, auf dessen Veranlassung diese Untersuchung ausgeführt wurde, für sein freundliches Entgegenkommen meinen besten Dank aus.

Stuttgart, Physik. Institut der Technischen Hochschule, im Juli 1907.

1) G. Neumann, Wiener Ber. 101, IIb. p. 53. 1892.
2) R. Lucas, Zeitschr. f. Elektrochemie 11. p. 182. 1905.

(Eingegangen 13. August 1907.)

11. *Bemerkung zur Abhandlung: „Der Inhalt der Gleichung $pv = RT$“; von F. W. Adler.*

In meiner Arbeit „*Über die Formulierung des ersten Hauptsatzes für Gase*“ [1]) habe ich zu zeigen gesucht, daß der Begriff „spezifische Wärme ohne äußere Arbeit“ (C_0) umfassender ist als der Begriff „spezifische Wärme bei konstantem Volumen“ (C_v). C_0 enthält einen Begriff, der früher nicht hervorgehoben worden war, den ich mit C_π bezeichnete.

Hr. Laemmel gibt nun in einer Abhandlung obigen Titels [2]) an, wie er sich die Realisierung dieser von mir eingeführten Größe C_π „vermittelst vieler kleiner hintereinander befindlicher Hähne, die je ein Stück Vakuum abgrenzen“, denkt. Ich will den Nutzen einer derartigen Erläuterung dahingestellt sein lassen, glaube aber die Größe C_π in meiner Abhandlung genügend charakterisiert zu haben, indem ich sagte, daß sie „bei *nichtumkehrbaren* Volumänderungen“ auftritt. Dabei hob ich aber hervor, daß ich diesen Fall als *unwichtigen (weil nichtumkehrbaren)* betrachte, dagegen die wesentliche Bedeutung von C_π darin sehe, daß es als „Bestandteil *jedes* C_p auftritt“.

Hr. Laemmel verbindet nun aber mit seinen Angaben über die Realisierung des C_π kritische Bemerkungen über den Weg, auf dem ich zu dieser Größe gelangte, die ich leider nicht unerwidert lassen kann. Ich will nur kurz folgendes feststellen:

1. Habe ich den Gay-Lussacschen Überströmungsversuch nicht „als neues Element in der Spekulation neben der obigen Gleichung ($p.v = R.T$)“ eingeführt, sondern ist dies bereits durch Clausius [3]) geschehen und wird auch in den modernen

1) F. W. Adler, Ann. d. Phys. **22**. p. 782. 1907.

2) R. Laemmel, Ann. d. Phys. **23**. p. 591. 1907.

3) R. Clausius, Mechan. Wärmetheorie **1**. p. 45. 3. Aufl. Braunschweig 1887.

Darstellungen der Thermodynamik, z. B. bei Planck[1]), daran festgehalten.

2. Die Beziehung

$$U = f(T) + \text{const.}$$

läßt sich *nicht* ohne Zuhilfenahme einer *anderen* Gleichung aus $pv = RT$ deduzieren. Ganz klar geht diese Unmöglichkeit aus der Machschen[2]) und ebenso der Planckschen[3]) Darstellung hervor. Letzterer leitet die Gleichung:

$$c_p - c_v + p\frac{\partial c_p}{\partial p} - v\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{R}{m}$$

ab und sagt über diese: „Mehr läßt sich für ein ideales Gas, wenn nur das Boyle–Gay-Lussac–Avogadrosche Gesetz als gültig vorausgesetzt wird, aus dem ersten Hauptsatz allein nicht schließen. Nun wollen wir die weitere durch die im § 70 beschriebenen Versuche von Thomson und Joule[4]) festgestellte Eigenschaft idealer Gase benutzen, daß ihre innere Energie nur von der Temperatur, nicht vom Volumen abhängt, also nach (19) auf die Masseneinheit bezogen $(\partial u/\partial v)_\vartheta = 0$" etc.

3. Man kann zu dem Satze, daß

$$U = f(T) + \text{const.}$$

für Gase, die der Zustandsgleichung $pv = RT$ entsprechen, ist, auf drei Wegen gelangen:

a) auf Grund des *Experimentes* (des Gay-Lussacschen Überströmungsversuches),

b) auf Grund einer speziellen *Hypothese* aus der kinetischen Gastheorie,

c) auf Grund einer *Deduktion* aus der Zustandsgleichung *und* den beiden Hauptsätzen.

Alle drei Wege wurden bereits früher eingeschlagen, die ersten zwei von Clausius[5]), der dritte von Kirchhoff.[6]) Mir

1) M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik p. 42—45. 53. Leipzig 1897.

2) E. Mach, Prinzipien d. Wärmelehre p. 307. 2. Aufl. Leipzig 1900.

3) M. Planck, l. c. p. 53.

4) Planck erwähnt die Versuche von Thomson und Joule, die auf dem Prinzip des Gay-Lussacschen beruhen, in experimenteller Hinsicht aber gewisse Fehlerquellen vermeiden.

5) R. Clausius, l. c. p. 45—46.

6) G. Kirchhoff, Vorles. üb. d. Theorie d. Wärme p. 75. Leipzig 1894.

schien der erste als der für meine Zwecke geeignetste, Hr. Laemmel benutzt *tatsächlich* in seinen Ausführungen den dritten, während er eine Deduktion aus dem „Inhalt der Gleichung $p.v = R.T$" vorzunehmen meint.

4. Die von Hrn. Laemmel herangezogene Deduktion führt bereits Clausius[1]) an anderer Stelle an. Ich konnte mich aber an diese Ableitung bei der behandelten Frage nicht halten, denn die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\partial p}{\partial T} - p$$

enthält den zweiten Hauptsatz und damit in der Clausiusschen Darstellung *die in Frage stehende Formulierung* des ersten Hauptsatzes für Gase *als Prämisse.*[2])

5. Es genügt nicht, die vorstehende Gleichung als „allgemeingültig" zu bezeichnen, sondern es ist notwendig, um sie zur Deduktion verwenden zu können, zu zeigen, daß sie von dem angestrebten Deduktionsresultat unabhängig erhalten werden kann. Dies wäre möglich, indem die Temperatur als Thomsonsche definiert wird, wie dies in der Kirchhoffschen[3]) Darstellung geschieht. Da aber das Versehen in der Clausiusschen Formulierung in fast allen modernen Darstellungen, die seinen Weg einschlagen — und das tun die meisten — beibehalten wird, war es selbstverständlich, daß ich mich an den Clausiusschen Beweisgang anschloß.

6. Habe ich die Unrichtigkeit in der Clausiusschen Darstellung nicht darin gesehen, daß Clausius die innere Energie „als von T und v abhängig analytisch formuliert", sondern darin, daß er, *nachdem* er an dieser analytischen Formulierung gezeigt hat, daß

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = 0$$

ist, *nicht die Konsequenz* zieht, daß nun anstatt $(\partial U/\partial T)_v$ der vollständige Differentialquotient dU/dT zu schreiben sei.[4])

---

1) R. Clausius, l. c. p. 213.
2) R. Clausius, l. c. p. 85.
3) G. Kirchhoff, l. c. p. 57—58.
4) Vgl. F. W. Adler, l. c. p. 788.

7. Ist es richtig, daß die von Hrn. Laemmel mit (5) bezeichnete Gleichung

$$dU = \frac{dU}{dT} dT$$

eine Identität ist, unrichtig dagegen, daß in meiner Arbeit eine derartige Gleichung *überhaupt auftritt*. Ich verwendete wohl den Ausdruck $(dU/dT)dT$ überall dort, wo Clausius $(\partial U/\partial T)_v dT$ schreibt, um *in strenger Analogie* an die Clausiussche Darstellung zu zeigen, *was unter dem Differentialquotienten* dU/dT zu verstehen sei, verwendete aber nie die Gleichung (5), die Hr. Laemmel angibt.

8. Wenn Hr. Laemmel hätte sagen wollen, es gibt auch einen *anderen* Weg, um zu meinem Resultat zu kommen, so könnte ich dem nur beipflichten, um so mehr, als ich andere Darstellungsmethoden, wie die von Zeuner und Voigt, in meiner Arbeit erwähnt hatte. Dagegen halte ich es nicht für berechtigt, meinen Weg als unrichtig zu bezeichnen und ebensowenig erscheint mir der deduktive Weg als eine Ableitung aus dem „Inhalt der Gleichung $p.v = R.T$".

Ich vermag somit keine der Einwendungen des Hrn. Laemmel gegen meine Darstellung als berechtigt anzuerkennen.

Zürich, Physik. Inst. d. Univ., 11. Juli 1907.

(Eingegangen 25. Juli 1907).

12. *Über die Klangfarbe einiger Orchesterinstrumente;* *von Erich Herrmann-Goldap.*

Unsere Vorstellungen über die Natur der musikalischen Klangfarbe folgen den Anschauungen von Helmholtz. Nach ihm ist die Klangfarbe der Instrumente gegeben durch ein für jede Note desselben Instrumentes gleiches Intensitätsverhältnis der Partialtöne. Die Vokale dagegen nehmen nach Helmholtz eine besondere Stellung unter den Klängen ein, indem „die Stärke ihrer Obertöne nicht nur von der Ordnungszahl derselben, sondern überwiegend von deren absoluter Tonhöhe abhängt".[1]) Daß diese absolute Tonhöhe allein das Wesentliche des Vokalklanges ausmacht, ist in neuerer Zeit von L. Hermann und H. Pipping mit größter Sicherheit bewiesen.[2])

Von diesen allgemein verbreiteten Ansichten weichen, was die Natur der Instrumentklänge anbetrifft, bis jetzt nur die Ergebnisse einer Arbeit von G. Meissner über „Klangaufnahmen an Blasinstrumenten, eine Grundlage für das Verständnis der menschlichen Stimme"[3]) ab. Er fand mit Hilfe des Edisonschen Stanniolphonographen, daß auch für die Zungenpfeifen die feste absolute Lage der hervorragenden Obertöne in der Skala das Charakteristische ist.

Dies nachgelassene Manuskript Meissners ist erst im März dieses Jahres erschienen, als ich eine Arbeit über die Klangfarbe einiger Orchesterinstrumente zum weitaus größten

1) H. v. Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen p. 191. 1896.

2) Dazu möchte ich bemerken, daß in Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, herausgegeben von L. Pfaundler, 1. p. 780. 1905, diese jüngsten entscheidenden Arbeiten nicht erwähnt sind. Hier ist noch immer die Arbeit von Auerbach aus dem Jahre 1876, nach der sowohl absolute Tonhöhen als auch relative Verhältnisse der Partialtöne für die Vokale maßgebend sind, als neuere Untersuchung angeführt.

3) Aus dem Nachlaß Meissners, herausgegeben von R. Wachsmuth, Pflügers Archiv für die ges. Physiologie. 116. p. 543. 1907.

Teile schon beendigt hatte. Die Anregung hierzu habe ich von meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. P. Volkmann,

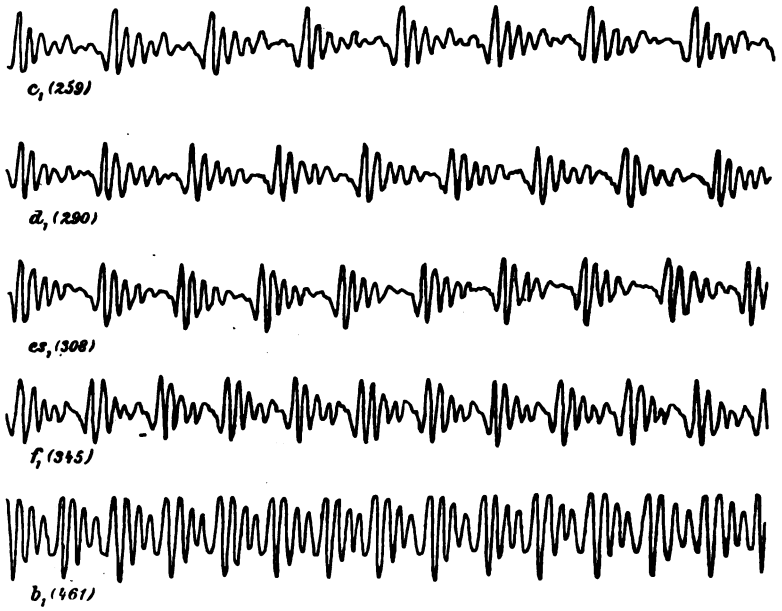


Fig. 1. Trompete in B.

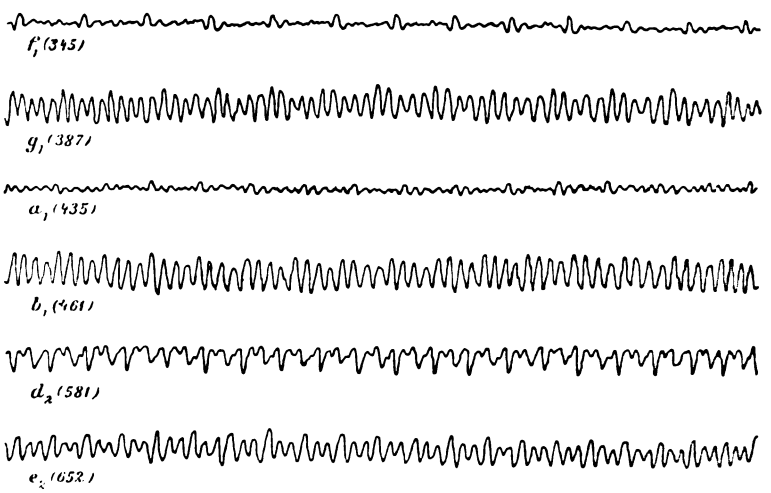


Fig. 2. Oboe.

erhalten. Die Untersuchungen nahm ich im physiologischen Institut der hiesigen Universität vor. Herr Geh. Medizinalrat

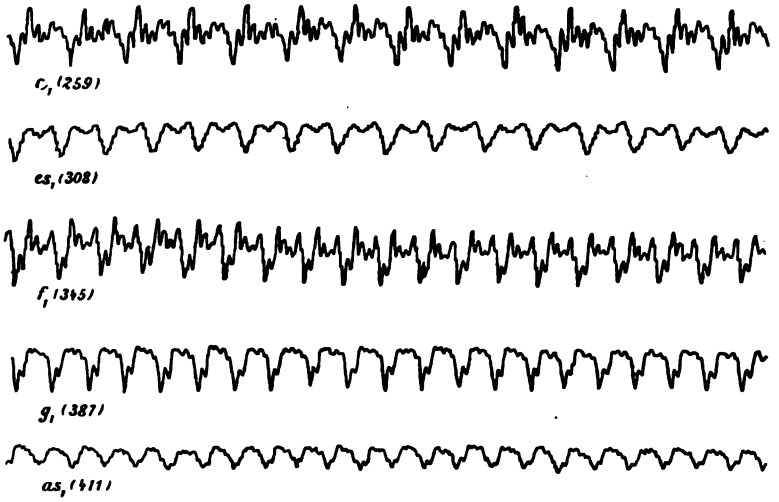


Fig. 3. Waldhorn in F.

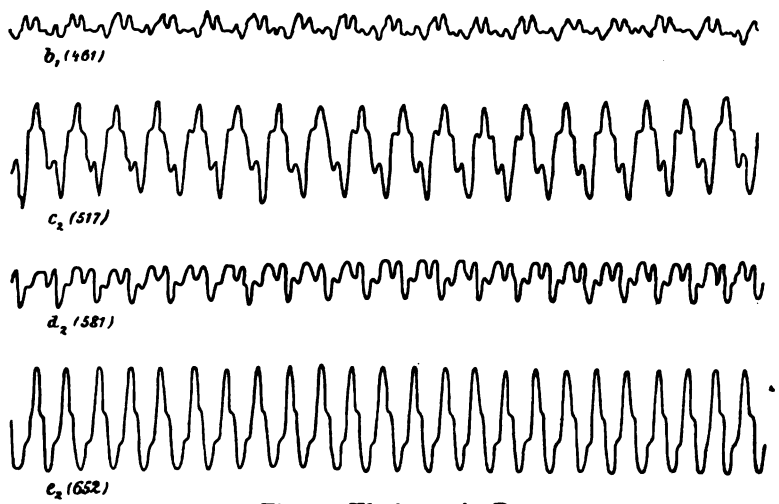


Fig. 4. Klarinette in B.

Prof. Dr. L. Hermann stellte mir die vorhandenen Mittel des Instituts in liebenswürdiger Weise zur Verfügung. Die Resultate dieser Arbeit sollen nun mitgeteilt werden.

Zu den Versuchen benutzte ich ein Verfahren, das L. Hermann zu seinen früheren Untersuchungen über Sprachlaute ausgebildet hat. Es besteht kurz in folgendem: Der betreffende Klang wird auf den Edisonschen Phonographen mit Wachswalze übertragen und zur Kontrolle mit einem Hörschlauch abgehört. In der Furche der Phonographenwalze läßt man nun bei äußerst langsamer Rotation der Walze (hier etwa 80 mal so langsam wie bei der Aufnahme) ein Glasstiftchen schleifen, dessen Bewegungen, durch mehrfache Hebelübertragung vergrößert, auf ein kleines Spiegelchen übertragen werden. Die Bewegungen dieses Spiegels werden in folgender Weise photographisch registriert: Vor dem Spiegelchen befindet sich eine schwache Konvexlinse (1—1 $^1/_2$ Dioptrien), die, vom Licht zweimal durchlaufen, einen vertikalen stark beleuchteten Spalt in einem Abstande von etwa 0,50—1,00 m abbildet. Das vertikale Bild fällt auf einen horizontalen Spalt, und der so entstehende Lichtpunkt wirkt auf einen hinter dem Spaltblech rotierenden, mit Bromsilberpapier überzogenen Zylinder.[1]) — Von den so gewonnenen Kurven geben die beigefügten eine genügende Vorstellung.[2]) — Zur Darstellung der Kurven durch eine Fouriersche Reihe benutzte ich, nachdem ich in einer Periode jeder Kurve 40 äquidistante Ordinaten unter einem Mikroskop mit Fadenkreuz gemessen hatte, das Schablonenverfahren von Hermann[3]), welches die Arbeit bedeutend erleichtert.

Keine der Analysen bestätigte die Helmholtzsche Theorie von dem für alle Noten desselben Klanges konstant bleibenden Intensitätsverhältnis der Partialtöne. Sie ließen vielmehr als *charakteristisch für die Klangfarbe eine Hervorragung von Tönen* bemerken, *deren Höhenlage sich in der Skala nicht ändert*, was

1) Eine ausführliche Beschreibung des ganzen Arrangements findet sich in L. Hermanns Abhandlungen über die Vokale und Konsonanten, Pflügers Archiv für die ges. Physiologie **45.** p. 582. 1889; **53.** p. 1. 1893 und **58.** p. 255. 1894.

2) Von diesen Kurven scheint mir die Waldhornkurve der Note es_1 (308) bei der Kopie nicht ganz geraten zu sein; denn die der Kurve hier deutlich aufgesetzten feinen Zäckchen sind im Original nur sehr undeutlich und bisweilen gar nicht zu erkennen.

3) L. Hermann, Pflügers Archiv **47.** p. 42. 1890.

mir bald, nachdem ich dies Resultat erhalten hatte, durch die vorhin erwähnte Meissnersche Arbeit bestätigt wurde. Die Vokale nehmen also keine besondere Stellung unter den Klängen ein. (Dies konnte man schon aus der großen Ähnlichkeit der Instrumentkurven mit den Vokalkurven vermuten.) — Der bei der harmonischen Analyse als Hervorragung unter den Partialtönen sich geltend machende feste Ton, den L. Hermann in seinen Vokaluntersuchungen als „*Formant*“ bezeichnet hat, zeigt sich schon beim Anblick mancher Kurven mit großer Deutlichkeit, indem er in der Periode des Grundtons schwebungsartig mit einer Anzahl von Schwingungen auftritt, die sich mit Ausnahme ihrer Zackenzahl nicht ändern und deshalb in zahlreichen Fällen in keinem kommensurablen Verhältnis zur Grundtonperiode stehen. In diesen Fällen ist der Formant unharmonisch zum Grundton, und zur Bestimmung dieses unharmonischen Formanten habe ich eine von Hermann eingeführte Berechnungsart, die sogen. Schwerpunktsmethode[1]), angewandt. Bei der Periodenlänge der meisten Trompetenkurven reichten vierzig Ordinaten zur Ermittelung der Partialtonoszillationen nicht ganz aus. Hier ließ sich aber auf einfacherem Wege die Höhe des Formanten aus dem Verhältnis der Länge der Grundtonperiode zur Länge der Formantperiode bestimmen, weil die Länge der Formantperiode ohne weiteres gemessen werden konnte.[2])

Da ich wußte, daß der Klang eines Instrumentes sich in der Höhe und Tiefe seines Umfanges und auch bei verschieden starkem Anblasen ändert, so ließ ich nur eine Tonleiter aus der Mittellage, d. h. aus der bequemsten Lage seines Umfanges, in welcher das Instrument die ihm charakteristische Klangfarbe am zweifellosesten besitzt, von berufsmäßigen Bläsern in den Phonographen blasen, und zwar in der Regel mittelstark (*mf*).

Die nachstehende Tabelle gibt über die Lage des Formanten, sowie über die Amplitudenverhältnisse der Grundtöne und Formanten der untersuchten Instrumente Aufschluß.

---

1) L. Hermann, Pflügers Archiv **47.** p. 358. 1890 und **59.** p. 50. 1893.

2) Siehe über dies von Hermann als „Proportionalausmessung“ bezeichnete Verfahren in Pflügers Archiv. **47.** p. 359. 1890.

Name des Instrumentes	Analysierter Notenbereich	Stärke der geblasenen Klänge	Höhenlage des ersten Formanten	Höhenlage des zweiten Formanten	Weitester Bereich der Grundtonamplituden in Prozenten der ersten Formantamplituden	Weitester Bereich der zweiten Formantamplitudenhöhen in Proz. der ersten Formantamplitudenhöhe
Oboe . . .	f_1—f_2	*mf*	gis_3—h_3	—	0—48	—
Trompete in *B*	b—b_1	*mf*—*f*	h_3—c_4	—	13—30	—
Tenorposaune	$\overset{g}{d_1}$—$\overset{a}{f_1}$	*p*	h_1—d_2	—	57—88	—
Waldhorn in *F*	$\overset{c_1}{es_1}$—as_1	*mf*—*f*	h_1—c_2	g_3—>b_3	57—100	6—62
Große Flöte .	d_2—cis_3	*mf*—*f*	f_3—a_3	—	104—316	—
Klarinette in *B*	a_1—e_2	*mf*	$\overset{>g_3}{<gis_3}$—h_3	—	132—500	—

In dieser Tabelle ist allein die Existenz des Flötenformanten nicht klar erwiesen, weil die Mittellage der Flöte wegen ihrer Höhe im Verhältnis zum Formanten dazu nicht ausreicht. Besitzt die Flöte aber einen Formanten, so liegt er unzweifelhaft in dem angegebenen Bereich. — Sonst ist aus der obenstehenden Tabelle *für die Mittellage der Instrumente* folgendes zu ersehen:

1. Von den angeführten Instrumenten besitzt das Waldhorn allein zwei Formanten. Der höhere von ihnen tritt besonders bei starkem Anblasen hervor (seine Amplitudenhöhe liegt bei starkem Blasen zwischen 40 und 62 Proz., bei mittelstarkem Blasen zwischen 6 und 15 Proz. der Formantamplitudenhöhe), wobei das Horn „knallt", d. h. jenen nicht sehr angenehmen, klirrenden Beiklang annimmt, der nur bei den Blechinstrumenten und besonders leicht beim Waldhorn auftritt (siehe die Kurven der Noten $c_{1\,(259)}$ und $f_{1\,(345)}$.

2. Die Formanten der Holzblasinstrumente (Oboe, Flöte und Klarinette) und der Trompete einerseits, die der Tenorposaune und des Waldhorns andererseits liegen ungefähr in demselben Bereich.

3. Aus der Lage des Formanten allein würde man also keine großen Klangfarbenunterschiede herauslesen können. Die

Instrumente unterscheiden sich aber sonst nur noch durch die Höhen der Grundamplituden. *Man hat daher anzunehmen, daß einen ebenso großen Einfluß wie der Formant der Grundton auf die Klangfarbe hat, und zwar ist ein Klang scharf, wenn die Grundtonamplitude klein gegenüber der Formantamplitude ist (Oboe, Trompete); je mehr sich die Amplitude des Grundtons der des Formanten nähert, desto voller und angenehmer wird der Klang (Waldhorn, Posaune piano geblasen); übersteigt die Höhe der Grundtonamplitude die des Formanten, so wird der Klang weich (große Flöte) zuletzt etwas näselnd (Klarinette in B).*

Eine Bestätigung dieses zuletzt Gesagten scheint mir unter anderem folgendes zu sein: Beim Anblick der Tabelle fällt es auf, daß in den Klängen der piano geblasenen Tenorposaune der Bereich der Grundtonamplitudenhöhen im Verhältnis zu den Formantamplitudenhöhen derselbe ist wie beim Waldhorn. Der Formantbereich ist bei beiden Instrumenten ebenfalls derselbe. Sind also Grundton und Formant das für die Klangfarbe Wesentliche, so muß eine piano geblasene Tenorposaune dieselbe Klangfarbe haben wie ein mittelstark angeblasenes Waldhorn. Daß dies wirklich so ist, wird jeder Musiker aus eigener Erfahrung bestätigen können.

Weiteres will ich dieser kurzen Mitteilung nicht hinzufügen. Ich bin dabei, diese Untersuchungen weiterzuführen und vor allem die Klänge der Streichinstrumente zu analysieren, und werde später darüber Mitteilung machen. Dann gedenke ich auch die Ansichten anderer Autoren und die meinige über die Theorie der Klänge anzuführen.

Königsberg i. Pr., Physiolog. Inst., 25. Juli 1907.

(Eingegangen 27. Juli 1907.)

13. *Über die Möglichkeit einer Nutzanwendung des Wilsoneffektes;* von *L. Baumgardt.*

Die Ergebnislosigkeit aller experimentellen Versuche, die Frage zu beantworten, ob bei der Rotation eines Magnetstabes (etwa kreisförmigen Querschnittes) um seine Achse irgendwelche elektromotorisch oder elektrisierend wirksame Zustandsänderung im von den Kraftlinien durchsetzten Mittel eintritt[1]), war eine Folge der Meinung, daß die Substanz der induzierten Körper bei der Magnetoinduktion keine Rolle spiele. Alle einschlägigen Versuche — durchgeführt bei nahezu ausnahmsloser Verwendung *leitender* Körper, auf welche allein jene Meinung zutrifft — erfuhren die gleiche Anfechtung, es könne das Resultat ebensogut die Folge der Einwirkung eines ruhenden Magnetfeldes auf den bewegten Versuchsteil wie des etwa bewegten Magnetfeldes auf den ruhenden Teil der Versuchsanordnung sein. Dies galt nicht nur für die zahlreichen Versuche mit geschlossenen Strömen[2]), sondern auch für die Bemühungen, eine

1) Um der Beanstandung vorzubeugen, welche der gewöhnlich gebrauchte Ausdruck „Mitrotieren der Kraftlinien" in der letzten Zeit verschiedenerseits erfahren hat, formuliere ich die Frage so, wie im Text vermerkt. Jene Beanstandung (die Kraftlinien seien lediglich ein bequemes Mittel zur geometrischen und quantitativen Veranschaulichung des Magnetfeldes, der Begriff „Mitrotieren der Kraftlinien" schwebe daher in der Luft — M Abraham, Theorie der Elektrizität **1.** § 87. 1904/05) ist wohl formell richtig, den Kern der Sache trifft sie nicht. Die Kraftlinien geben über den *Zustand* des von ihnen durchsetzten Mittels beschränkte Auskunft; a priori ist es deshalb keineswegs als ausgeschlossen anzusehen, daß bei gleichbleibender Verteilung, Gestaltung und Anzahl dieser Linien die Rotation des Magnetes, dem sie zugehören, irgendwelche elektromotorisch oder elektrisierend wirksame *Zustandsänderung* im Kraftlinienmittel herbeiführt. Ist eine solche Wirkung vorhanden, so könnte sie auf dem in dieser Mitteilung dargelegten Wege eindeutig kenntlich gemacht werden.

2) G. R. Olshausen, Ann. d. Phys. **6.** p. 722. 1901.

etwa vorhandene freie elelektrische Ladung an der Magnetoberfläche nachzuweisen, wenn der Magnet ohne Vorhandensein einer äußeren Leitung rotiert. Gerade von diesen Bemühungen erhoffte man die endgültige Lösung des Problems, sobald es gelingen würde, die Schwierigkeiten zu beheben, welche mit der sicher induktionsfreien Erdung an irgend einem von der Achse des rotierenden Magnetes entfernten Punkt desselben verknüpft sind.[1]) Die Maxwell-Hertzsche Theorie[2]), die Theorie von Lorentz-Abraham[3]), diejenige von Kohl[4]) (ebenso wohl auch die Deformationstheorie von Jaumann[5])) führen jedoch übereinstimmend zu dem Resultat, daß elektrische Spannungen auf dem rotierenden Magneten auftreten müssen (beim Fehlen äußerer Leitung), *ganz unabhängig davon, ob das Magnetfeld als ruhend oder als mitrotierend angesehen wird.* Danach würden selbst die einwandsfreiesten Nachweisungen über den wirklichen elektrischen Zustand der Oberfläche eines rotierenden Magneten keine Antwort auf unsere Frage geben können — vorausgesetzt, daß die von der Theorie geforderte Einflußlosigkeit der Feldbewegung experimentell erwiesen werden könnte.

Die Sachlage ist jedoch durchaus geändert, seitdem durch den Wilsoneffekt die von der Lorentzschen Theorie geforderte *Abhängigkeit der in bewegten Isolatoren induzierten elektromotorischen Kraft von der Dielektrizitätskonstante* bewiesen ward. Diese Eigenschaft bewegter Dielektrika liefert die Möglichkeit, das alte magnetische Problem eindeutig zu lösen:

Beeinflußt die Achsendrehung eines zur Elektrizitätsleitung nicht mitbenutzten (zylindrischen) Magnetstabes die elektrische Spannung zwischen den Belegungen eines unabhängig vom Magneten rotierenden dielektrischen Hohlzylinders, dann ist die eingangs erwähnte Frage zu bejahen; das Elektrometer zeigt dann im Unterschied der Ausschläge bei ruhendem und bei rotierendem Magnet die Differenz der verschiedenartigen Einwirkungen der Magnetrotation auf den rotierenden dielek-

1) E. Lecher, Wied. Ann. **54.** p. 291. 1895.
2) M. Abraham, l. c.
3) M. Abraham, l. c. 2. § 36.
4) E. Kohl, Ann. d. Phys. **20.** p. 27. 1906.
5) G. Jaumann, Ann. d. Phys. **19.** p. 904. 1906.

trischen Hohlzylinder und auf den übrigen Teil der Versuchsanordnung an.

Zeigt sich kein Einfluß der Magnetrotation, dann ist klargestellt, daß durch die Achsendrehung des Magnetes keine solche Zustandsänderung im von den Kraftlinien durchsetzten Mittel eintritt, welche eine elektromotorische oder elektrisierende Kraft auslöst.[1])

Frankfurt a. M., 29. Juni 1907.

---

1) *Zusatz bei der Korrektur:* In der vor wenigen Wochen erschienenen deutschen Ausgabe des Lodgeschen Buches „*Elektronen*" ist der von Wilson experimentell dargetane wesentliche Unterschied zwischen induzierten Leitern und Nichtleitern merkwürdigerweise nicht berücksichtigt (p. 8), trotzdem die Literatur mehrfach bis 1906 — also zwei Jahre nach Wilsons Publikation — herangezogen wird. Und doch ist dieser Unterschied geeignet, unserer Kenntnis der Induktionserscheinungen eine neue Richtung zuzuweisen: Nicht allein von der *Substanz* der im Magnetfeld bewegten Körper hängt für eine Klasse von Materialien die elektromotorische Kraft der Induktion ab, sondern auch vom *Zug bez. Druck* und von der *Temperatur*, welche die Dielektrizitätsziffer mitbestimmen.

Die von der Elektronentheorie gelieferte und als zutreffend erwiesene Formulierung des Einflusses der Dielektrizitätsziffer D auf die in einem bewegten Nichtleiter induzierte elektromotorische Kraft $E = E_i \cdot \frac{D-1}{D}$ (worin E_i diejenige elektromotorische Kraft darstellt, welche unter sonst gleichen Umständen in einem gleichgeformten Leiter induziert würde) macht es angängig, von einem „*Magnetoinduktionsvermögen*" der einzelnen Substanzen zu sprechen. Für alle Leiter ist diese Größe gleich Eins, für Nichtleiter mit sehr kleiner Dielektrizitätsziffer strebt sie Null zu. So ist sie z. B. für hartes graues Zelluvert ($D = 1{,}19$ nach Elsass, Wied. Ann. **44**. p. 654. 1891) nur noch 0,16. Ob nicht durch das Anwachsen von technischen Anlagen mit immer höher getriebener Primärspannung (25 000 bis 50 000 V.) und durch die damit verbundene Erhöhung der Isolierfähigkeit bestimmter Zubehörteile jetzt Materialien hergestellt werden, deren Dielektrizitätsziffer noch näher an Eins heranreicht, deren Magnetoinduktionsvermögen also sehr nahe Null ist, dürfte einer Prüfung wert erscheinen.

(Eingegangen 1. Juli 1907.)

14. *Die Mitführung des Lichtes durch bewegte Körper nach dem Relativitätsprinzip; von M. Laue.*

Da die Einsteinsche, auf dem Relativitätsprinzip fußende Elektrodynamik [1]) mit der (älteren) Lorentzschen Theorie übereinstimmt, sofern man sich auf die erste Potenz der Verhältnisse aller Körpergeschwindigkeiten zur Lichtgeschwindigkeit beschränkt, so ist es selbstverständlich, daß auch sie den Fresnelschen Mitführungskoeffizienten als erste Annäherung richtig zu berechnen gestattet. Doch findet sich nirgends in der Literatur ein Hinweis, wie viel leichter das Relativitätsprinzip dies Problem zu lösen vermag, als die andere Theorie selbst in der Vereinfachung, welche Hr. Lorentz erst vor kurzem angegeben hat. [2])

Es handelt sich hier nämlich nur um ein Beispiel für das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Es sollen sich zwei Koordinatensysteme mit parallelen Achsen, das „gestrichene" und das „ungestrichene", mit der Geschwindigkeit v längs der X-Richtung gegeneinander verschieben. Einer Geschwindigkeit w', bezogen auf das gestrichene System, deren Richtung mit der X'-Achse den Winkel ϑ' bildet, entspricht dann, bezogen auf das ungestrichene System, die Geschwindigkeit

$$w = \frac{\sqrt{v^2 + w'^2 + 2 v w' \cos\vartheta' - \frac{1}{c^2} v^2 w'^2 \sin^2\vartheta'}}{1 + \frac{1}{c^2} v w' \cos\vartheta'}. \quad [3])$$

Ruht nun im gestrichenen System ein Körper von dem Brechungsindex n, so ist die Phasengeschwindigkeit des Lichtes im gestrichenen System

$$w' = \frac{c}{n}.$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.
2) H. A. Lorentz, Naturw. Rundsch. 21. p. 487. 1906.
3) l. c. p. 906.

Die entsprechende Geschwindigkeit im ungestrichenen System ist daher

$$w = \frac{\sqrt{v^2 + \frac{c^2}{n^2} + 2v\frac{c}{n}\cos\vartheta' - \frac{v^2}{n^2}\sin^2\vartheta'}}{1 + \frac{v}{cn}\cos\vartheta'}.$$

Fallen wie bei dem Fresnelschen Versuch die Richtungen der Geschwindigkeiten v und c/n zusammen, so ist $\cos\vartheta' = \pm 1$ und

$$w = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{cn}}$$

$$= \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left\{\pm v - \frac{v^2}{cn} \pm \frac{v^3}{(cn)^2} - \frac{v^4}{(cn)^3} \pm \cdots\right\}.$$

Ist dagegen z. B. $\vartheta' = \pm \pi/2$, so wird

$$w = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} + v^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{c}{n} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{nc}(n^2 - 1)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{v^4}{nc^3}(n^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\frac{v^6}{nc^5}(n^2 - 1)^3 \ldots$$

Bei dispergierenden Substanzen ist natürlich für n der Wert einzusetzen, welcher der Schwingungszahl im gestrichenen System entspricht.

Für die Gruppengeschwindigkeit gilt genau dasselbe, wenn man den Brechungsindex n durch den Ausdruck $n + \nu(dn/d\nu)$ (ν Schwingungszahl) ersetzt.

Nach dem Relativitätsprinzip wird also das Licht vom Körper *vollkommen* mitgeführt, aber gerade deswegen ist seine Geschwindigkeit relativ zu einem Beobachter, der die Bewegung des Körpers nicht mitmacht, nicht gleich der Vektorsumme aus seiner Geschwindigkeit gegen den Körper und der des Körpers gegen Beobachter. Der Notwendigkeit, einen „Äther" in die Optik einzuführen, welcher die Körper durchdringt, ohne an ihrer Bewegung teilzunehmen, sind wir auf diese Weise enthoben.

Berlin, Juli 1907.

(Eingegangen 30. Juli 1907.)

15. *Zur Cohnschen Elektrodynamik;* *von M. Laue.*

In einer Abhandlung „Zur Elektrodynamik in bewegten Medien" gestaltet Hr. Gans[1]) die Cohnsche Theorie atomistisch aus, insbesondere sucht er eine Dynamik des Elektrons auf sie zu gründen. Er integriert zu diesem Zweck die Grundgleichungen für die gleichförmige, geradlinige Bewegung eines kugelförmigen, starren Elektrons, berechnet die Energie des dabei entstehenden elektromagnetischen Feldes und leitet aus ihr die Größe der longitudinalen Masse ab. In der Schlußbemerkung behauptet er auch die Existenz einer transversalen Masse.

Mir scheint nun gegen den Begriff der elektromagnetischen Masse auf Grund der genannten Elektrodynamik ein Bedenken vorzuliegen, welches freilich, wie ich sogleich hinzufügen will, vielleicht durch eine eingehendere Untersuchung gehoben werden kann. Bei dem jetzigen Stande der Frage ist es mir aber nicht sicher, daß sich die Masse als eine das Elektron allein charakterisierende Größe definieren läßt, falls es sich in einem äußeren elektromagnetischen Felde bewegt; vielmehr ist es mir zunächst wahrscheinlich, daß sie von der Stärke des äußeren Feldes abhängig wird. Damit verlöre dieser Begriff aber jede Bedeutung; die Analogie zur hergebrachten Mechanik hörte dann völlig auf.

Um diesen Einwand zu begründen, gehen wir auf die Differentialgleichungen des Problems zurück; sie lauten, bezogen auf ein im Äther ruhendes Koordinatensystem:[2])

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho, \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **16**. p. 516. 1905.

2) l. c. Gleichung (39), (40), (35'), (36'). Die Bezeichnungen sind von dort unverändert übernommen.

$$c\,\mathrm{rot}\left\{\mathfrak{H}+\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}\,\mathfrak{D}\right]\right\}=\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,.\,\mathfrak{w},$$

$$-c\,\mathrm{rot}\left\{\mathfrak{E}-\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}\,\mathfrak{B}\right]\right\}=\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t};$$

dabei ist[1])

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{E}-\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}\,\mathfrak{H}\right],\quad \mathfrak{B}=\mathfrak{H}+\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}\,\mathfrak{E}\right].$$

Das äußere Feld soll aus einem homogenen elektrischen und einem homogenen magnetischen Felde mit den Feldstärken $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ bestehen; dann sind im Unendlichen die Gleichungen

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0,\quad \mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0$$

zu erfüllen. Die Grenzbedingungen für die Oberfläche des Elektrons lassen sich aus den Differentialgleichungen durch den üblichen Grenzübergang ableiten.

Dies Problem läßt sich in zwei Teilprobleme zerlegen: Einmal setzt man $\mathfrak{E}_0=\mathfrak{H}_0=0$, und findet das Eigenfeld des Elektrons; das andere Mal setzt man $\varrho=0$. Durch Addition beider Lösungen genügt man dann allen Bedingungen.

Nun überzeugt man sich an den für die Oberfläche des Elektrons bestehenden Grenzbedingungen leicht, daß das zweite Teilproblem nicht durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0,\quad \mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0$$

zu lösen ist; z. B. wäre dabei die Flächendivergenz des Vektors $\mathfrak{D}$ nicht, wie verlangt ist, Null. Auszunehmen ist nur der Fall, daß beide Feldstärken $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ parallel sind. Sonst deformiert das Elektron, abgesehen von dem Einfluß seiner Ladung, allein durch seine Geschwindigkeit das äußere Feld.[2]) Nun ist doch bis zum Beweise des Gegenteils anzunehmen, daß sich dabei die Energie ändert, um so mehr, als der Cohnsche Energieausdruck die Geschwindigkeit explizit enthält. Ihr (positiver oder negativer) Zuwachs ist Funktion der Geschwindigkeit, und daher als kinetische Energie des „ladungsfreien" Elektrons zu deuten. Er ist zugleich von den Feldstärken $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ abhängig. Der Ein-

1) l. c. Gleichung (37), (38).

2) An anderer Stelle erwähnt Hr. Gans die hieraus entspringende Schwierigkeit, die Kaufmannschen Versuche zu deuten.

fluß der letzteren auf die kinetische Energie kann aber auch bei der Addition der beiden Teillösungen, d. h. bei Berücksichtigung der Ladung, nicht fortfallen, und er überträgt sich unmittelbar auf die longitudinale Masse.

Aus diesem Grunde scheint mir auf Grund der Cohnschen Theorie die Möglichkeit einer Dynamik des Elektrons nur für den Fall bewiesen zu sein, daß sich das Elektron im longitudinalen elektrischen und magnetischen Felde bewegt.

Berlin, Juli 1907.

(Eingegangen 30. Juli 1907.)

16. *Über die Analogie zwischen absoluter Temperatur und elektrischem Potential (Erwiderung an F. W. Adler);* von *G. Lippmann.*

1. Im 22. Bande dieser Annalen hat Hr. F. W. Adler einen Aufsatz[1]) veröffentlicht, in welchem er die von E. Mach und später von mir hervorgehobene Analogie zwischen absoluter Temperatur und elektrischem Potential bestreitet.

„Die Mach-Lippmannsche Analogie"[2]), sagt Hr. Adler, „zeigt eine merkwürdige Unsymmetrie, die mir einer Erklärung zu bedürfen scheint. Während nach ihr im zweiten Hauptsatz die Temperatur dem Potential entspricht,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \frac{W_1}{W_2} = \frac{V_1}{V_2},$$

entspricht in den Energieänderungen des ersten Hauptsatzes die Temperatur T dem *Quadrat* des Potentials V

$$c\,T, \quad C\,V^2."$$

Ich möchte mir erlauben obigen Einwand hier zu beantworten.

Die zwischen den Produkten $c\,T$ und $C\,V^2$ hervorgehobene Unsymmetrie ist nur eine scheinbare, weil die zwischen T und V^2 bestehende Unsymmetrie durch die zwischen den Koeffizienten c und C andererseits bestehende Unsymmetrie kompensiert wird, welch letztere von Hrn. Adler nicht beachtet worden ist.

Durch die Gleichheit der Benennung (Kapazität) darf man nämlich sich nicht dazu verleiten lassen, c und c' als korrespondierende Größen zu betrachten. c ist gleich dem Differentialquotienten $\partial Q/\partial T$, während C gleich ist dem Differentialquotienten $\partial m/\partial V$. Nun bedeutet aber Q Energie, während m (Elektrizitätsmenge) nicht Energie bedeutet; sondern müßte m

1) F. W. Adler, Ann. d. Phys. 22. p. 587. 1907.
2) F. W. Adler, l. c. p. 588.

erst mit V multipliziert werden, um Energie vorzustellen. Wenn man jenen verdeckten Faktor V in Betracht zieht, so wird die Symmetrie der Formeln evident.

Die thermische und die elektrische Energie, Q und W, sind korrespondierende Größen. Dem Quotienten $Q/T = S$ (Entropie) entspricht der Quotient $W/V = m$ (Elektrizitätsmenge). Dem Differentialquotienten $\partial m/\partial V = C$ entspricht folglich der Differentialquotient $\partial S/\partial T = \gamma$; dieser trägt in der Physik keinen besonderen Namen, hat aber eine bestimmte Bedeutung; übrigens ist $\gamma = c/T$.

Innerhalb solcher Grenzen, wo man die Koeffizienten C und γ als Konstanten betrachten kann, ist die Zunahme der Energie

$$\tfrac{1}{2}\gamma T^2, \quad \tfrac{1}{2} C V^2.$$

2. Die Analogie zwischen thermischen und elektrischen Vorgängen ist zwar eine rein formelle; die oben gemachte Bemerkung hat aber den besonderen Nutzen, daß sie auf einen Satz aufmerksam macht, der in der Elektrizitätslehre dieselbe Rolle spielt, wie der Carnot-Clausiussche Satz in der Wärmelehre. Letzterer wird bekanntlich durch die Gleichung ausgedrückt

$$\int dS = 0$$

für einen geschlossenen umkehrbaren Kreisprozeß; folglich muß dS ein vollständiges Differential sein.

Dem entspricht für Elektrizität der Satz

$$\int dm = 0$$

für einen geschlossenen umkehrbaren Kreisprozeß; statt des Satzes der Erhaltung der Entropie hat man den Satz der Erhaltung der Elektrizitätsmenge aufzustellen. In jedem besonderen Problem hat man die Integrabilitätsbedingungen für dm auszudrücken. Analytisch besteht also zwischen dem zweiten Hauptsatze der Wärmelehre und jenem Satze der Erhaltung der Elektrizität ein vollkommener Parallelismus mit ganz analogen Anwendungen.

Im allgemeinen hat diese Analyse denselben Nutzen wie in der Wärme: sie erlaubt es, wenn ein umkehrbarer Vorgang gegeben ist, aus demselben die Existenz und auch die Größe

eines zweiten, dem ersteren reziproken Vorgang abzuleiten. So läßt sich z. B. aus den Änderungen der Kapillarspannung des Quecksilbers bei Polarisation die Strombildung bei Vergrößern der Quecksilberfläche vorherberechnen.

Es sei mir erlaubt an ein zweites Beispiel zu erinnern. Man denke sich einen Kondensator, dessen Dielektrikum nicht aus Glas oder Luft, sondern aus einer senkrecht zur Achse geschnittenen Quarz- oder Turmalinplatte, also aus einer piezoelektrischen Substanz gebildet sei. Ein solcher Kondensator arbeitet nicht allein als Kondensator, sondern als Elektrizitätsquelle, da bei variierendem Drucke — und zwar variiert derselbe schon durch die gegenseitige Anziehung der Metallplatten — Piezoelektrizität entwickelt wird. Es ist also nicht unbedingt selbstverständlich, daß $\int dm$ gleich Null sein soll, wenn man diesen Satz nicht als Prinzip aufgestellt hat.

Tut man dies, so gelangt man zu folgendem Schlusse. Die Dimensionen des Kristalles verändern sich im elektrischen Felde. Es findet Verlängerung statt in der Richtung der Achse in dem Falle, wo dasjenige Ende der Achse, welches sich beim Zusammendrücken des Kristalles positiv laden würde, dem positiven Belage am nächsten steht. Es findet Verkürzung statt im entgegengesetzten Falle. Die Größe der Verkürzung läßt sich übrigens berechnen. Bekanntlich ist es P. Curie gelungen, diese Schlüsse nachträglich durch den Versuch qualitativ und quantitativ zu verifizieren.

Durch diese und durch andere Beispiele[1]) scheint es mir bewiesen, daß die von Hrn. Adler bestrittene Analogie nicht allein bestehe, sondern daß dieselbe, obgleich nur rein formell, zu Schlüssen führt, welche ihr einen gewissen Wert verleihen.

1) Annales de Physique et Chimie. 1881.

(Eingegangen 2. August 1907.)

17. *Erwiderung auf Bemerkungen des Hrn. Stark zu meinen Arbeiten über den Dopplereffekt; von F. Paschen.*

Hr. Stark meint, seine Einstellung auf die Spitzen des Dopplerstreifen ergäbe das richtige Intensitätsmaximum, meine photometrische Schwärzungskurve sei im Maximum gestört durch Diffusion des Lichtes an den Bromsilberkörnern und durch Reflexion des Lichtes an den Grenzschichten der Glasplatte. Letzteres wäre sehr vermindert bei Films, mit denen ich stets die gleichen Resultate erhielt. Durch beide Umstände hätten scharfe intensive Linien unscharf werden müssen. Soweit diese eine Unschärfe nicht zeigen, was leicht an den Ruhelinien auf der von mir beigegebenen Tafel beurteilt werden kann, ist sicherlich im Dopplerstreif das Maximum durch die photographische Schwärzung richtig wiedergegeben. Innerhalb der Fehler meiner Methode zeigte sich das Maximum des Dopplerstreifs bei allen Linien der Wasserstoffserie auf der Skale der Werte $\Delta\lambda/\lambda$ identisch verschoben. Nie erhielt ich eine Andeutung für Hrn. Starks Behauptung.

Meine Tab. I läßt keine solche Verwertung zu, wie Hr. Stark p. 801, Abs. 1 meint, sondern nur den Schluß, daß kein Anhaltspunkt für die Behauptung des Hrn. Stark vorhanden ist.

Der Aufforderung des Hrn. Stark, die Spitzen zu messen, habe ich nachzukommen versucht, muß aber gestehen, daß mir diese Einstellung bei meinen Dopplerstreifen außerordentlich schwierig scheint, weil die Streifen keine scharfen Spitzen haben. Wo die Spitzen scharf sind, ist der Dopplerstreif eine genügend scharfe Linie, so daß man ihn in der Mitte, der Stelle richtiger Abbildung direkt einstellen kann. Das ist z. B. geschehen bei der Aufnahme Tab. I 690 Volt, 30 mm dunkelr. Länge, dann ergibt die okulare Einstellung dasselbe Resultat wie die photometrische. Bei der Einstellung auf unscharfe Spitzen weichen die Resultate so voneinander ab und

erscheinen so unsicher, daß sie kaum für Hrn. Starks Behauptung verwertet werden können. Diese Behauptung, und damit natürlich auch die hauptsächlichste Stütze für die Hypothese über den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Leuchtintensität ist doch wohl nur durch exakte Beweise zu halten. Ob die Messungen des Hrn. Stark an den Spitzen der Linien als solche aufzufassen sind, scheint doch recht fraglich, besonders da meine Methode, welche mir bedeutend objektiver und richtiger erscheint, keinen Anhaltspunkt dafür gibt. Die Spitzenmessung bedürfte jedenfalls für den vorliegenden Fall einer eingehenden Untersuchung. Bei meinen Linien entspricht nur die Mitte der exakten Abbildung durch das Objektiv, die Spitzen aber nicht mehr. Sie sind auch wegen der Farbenfehler des Objektivs für verschiedene Wellenlängen nicht mehr untereinander vergleichbar.

Die Verwertung meiner photometrischen Schwärzungskurven p. 250 zu der Betrachtung p. 801, Abs. 2 ist deshalb unzulässig, weil die Ordinaten den Intensitäten nicht proportional sind.

Meine Schlüsse betr. des Sauerstoffs gründen sich nicht auf ein rein negatives Resultat. Erstens glaube ich durch sehr sorgfältige viel variierte Versuche mit Sicherheit gefunden zu haben, daß die Serienlinien bis 30000 Volt keinen Dopplereffekt. haben. Dies ist nachgewiesen mit Hilfe eines wahrscheinlich bedeutend lichtstärkeren Spektrographen als Hr. Siegl hatte. Denn ich bedurfte nur halb so langer Expositionen als dieser. Zweitens habe ich den Dopplereffekt zu Messungen geeignet photographiert an den Flaschenfunken-Linien des Sauerstoffs. Das ist ein positives Ergebnis, von dem Hr. Siegl merkwürdigerweise nichts berichtet.

Nach Hrn. Siegl sollen die Serienlinien bei niederem Gasdruck heller werden. Nach meinen Beobachtungen nehmen sie mit vermindertem Gasdruck im Gegenteil stark ab. Heller werden dann gerade die Flaschenfunken-Linien. Hr. Siegl hat sehr mit der Entladungsröhre und der Reinheit des Gases zu kämpfen. Meine Beobachtungen begannen erst, als dies überwunden war, und beziehen sich auf konstanten Gasdruck und außerordentlich reines Gas. Verunreinigungen durch Quecksilber, Wasserstoff, Stickstoff sind völlig vermieden. Die

Farbe der Kanalstrahlen ist in reinem Sauerstoff nicht weiß, wie Hr. Siegl schreibt, sondern bei niederen Potentialen fleischrot und erhält mit höheren Potentialen in dem Maße eine mehr bläuliche Färbung, wie das Flaschenfunken-Spektrum heller und das Serienspektrum lichtschwächer wird.

Hr. Siegl beschreibt den Dopplereffekt an den Serientriplets bei 4773, 4673, 4590, 4523 so: „Bei diesen Triplets war die erste gegen Rot liegende Linie scharf, die nach Violett folgenden flossen ineinander und waren gegen Violett verwaschen, indem sich die verwaschenen Streifen des Dopplereffektes der einzelnen Linien übereinander lagerten. Wegen der geringen Lichtstärke des Dopplereffektes und wegen der großen Zahl der eng aneinander stehenden Linien erwies es sich als unmöglich, die Größe des Effektes genau zahlenmäßig zu bestimmen."

Es fehlen hier die stärkeren Triplets bei 4968 und 4803. Nichts wird gesagt über die noch stärkeren, sichtbaren bei 5437, 5330, 5020, welche ich okulariter beobachten konnte. Es ist unwahrscheinlich, daß die äußerst schwachen Triplets bei 4590 und besonders 4523 beobachtet sind, wenn die bei 4968 und 4803 fehlen. Bei 4591,6 liegt eine sehr starke Linie des Flaschenfunken-Spektrums, welche nach mir einen intensiven Dopplereffekt hat. Von ihr erwähnt Hr. Siegl nichts. Die vier Triplets 5330, 5020, 4968, 4803 habe ich wiederholt photographiert. Ihre nach Violett liegenden zwei Linien sind völlig scharf. Nicht die Spur eines Dopplereffektes liegt auf und neben ihnen.

Nach dem Vorstehenden vermag ich Hrn. Stark nicht zu folgen, der Hrn. Siegls Resultate meinen eingehenden, mit wahrscheinlich erheblich besseren und lichtstärkeren Anordnungen gewonnenen Beobachtungen gegenüberstellt. Solange Hr. Siegl nur einen solchen Dopplereffekt an den Serienlinien beobachtet, wie er beschreibt, halte ich den Effekt für nicht erwiesen. Und solange Hr. Siegl den Dopplereffekt an den Flaschenfunken-Linien nicht beobachtet, sondern statt dessen an den Serienlinien, und solange er behauptet, daß die Triplet-Serienlinien im Vergleich zu den übrigen Linien mit wachsendem Dunkelraum und steigender Spannung stärker hervortreten, liegt sogar die Möglichkeit einer Verwechselung der

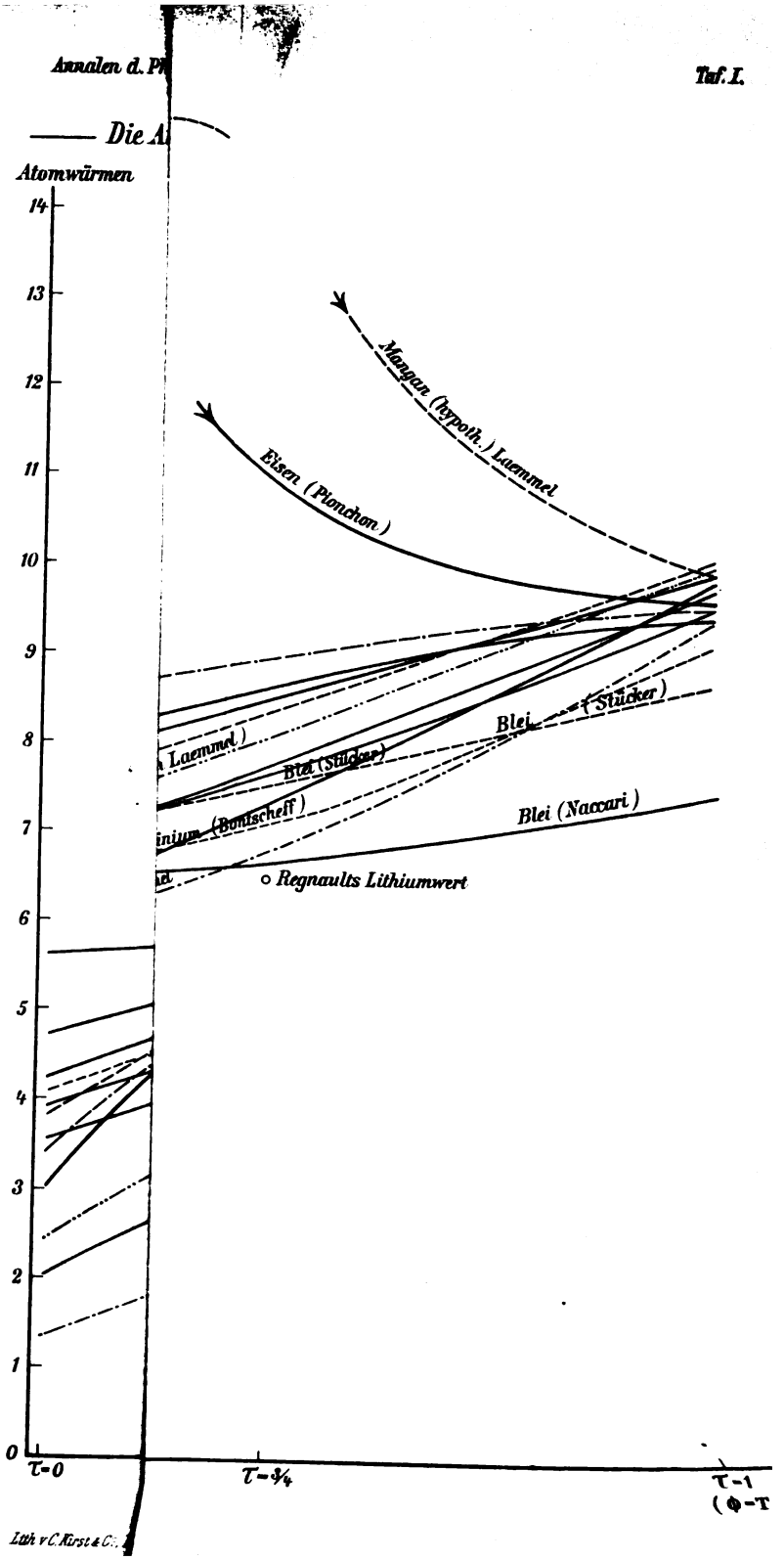
Spektren vor. Die von ihm angeführten Wellenlängen sind der Abhandlung von Runge und mir entnommen.

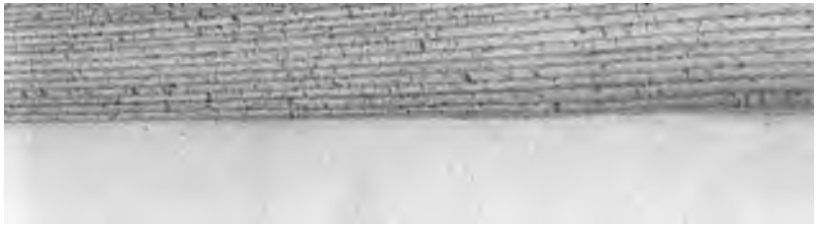
Gegenüber den Bemerkungen des Hrn. Stark in 4. halte ich meine Beobachtungen an Sauerstoff für die einzig zuverlässigen, welche existieren und bleibe bei den Schlüssen, welche aus dem von mir beobachteten positiven Resultate folgen, daß die Serienlinien keinen, dafür aber die Flaschenfunken-Linien einen deutlichen Dopplereffekt zeigen.

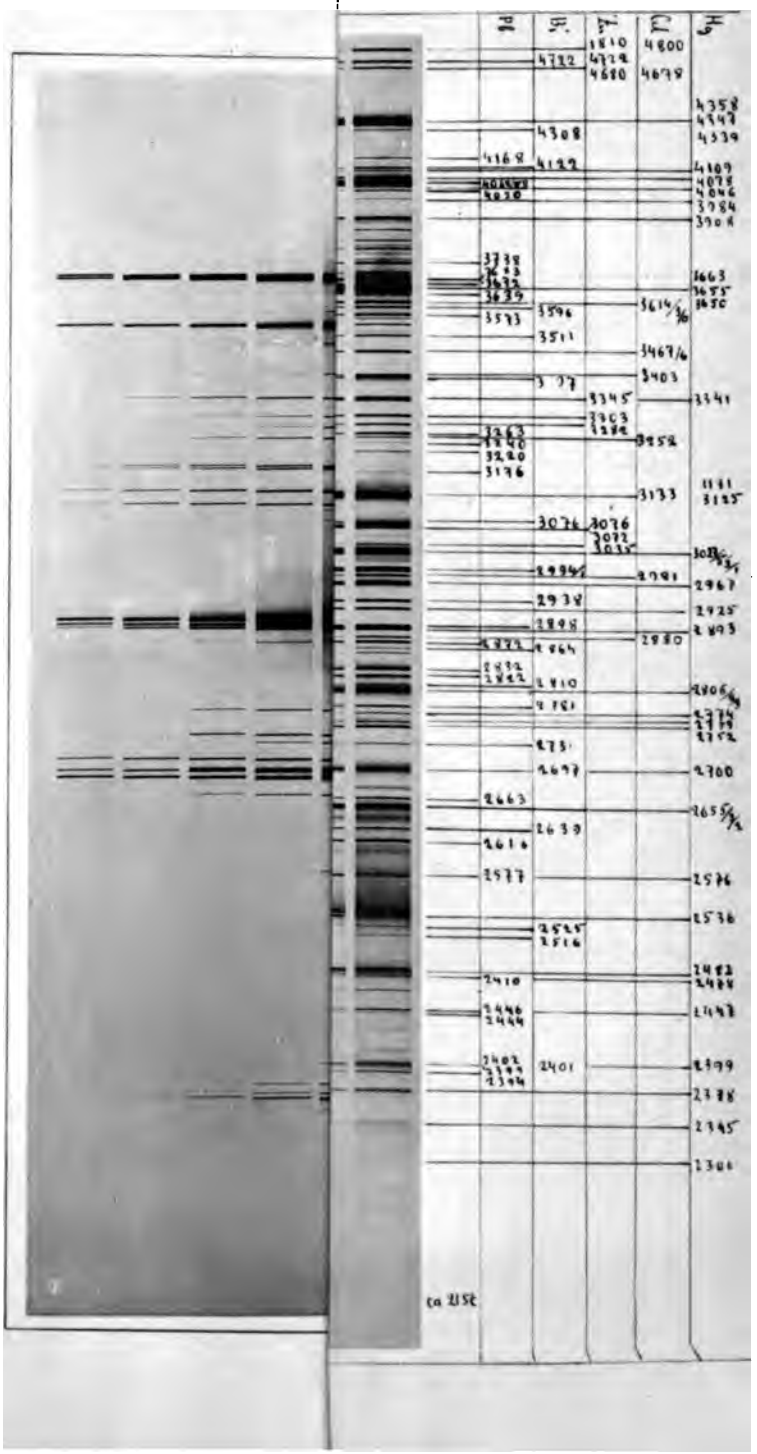
Nachdem Hr. Rau den Dopplereffekt an den Heliumlinien nachgewiesen hat, ist erwiesen, daß Helium sich nicht verhält wie Sauerstoff.

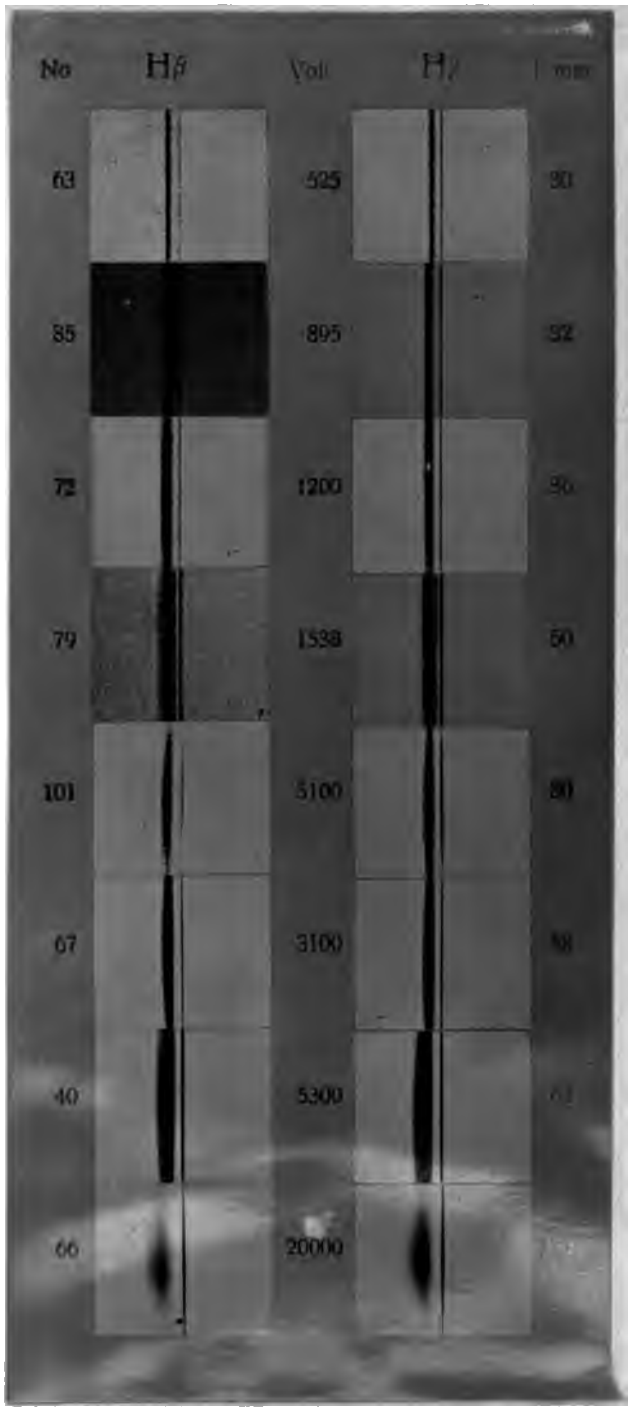
(Eingegangen 8. August 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.


Die A
Atomwärmen
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Mangan (hypoth.) Laemmel
Eisen (Pionchon)
Blei (Stücker)
Blei (Stilcker)
Blei (Naccari)
Regnaults Lithiumwert
τ-0
τ-¼
τ-1
(Φ-T
Lith v C. Kirst & C.




Pd
Sn
Sr
Cd
Ag
4732
4800
4679
4308
4192
4169
3596
3511
3345
3133
3076
2938
2898
2663
2639
2614
2577
2516
2410
2401
2344
ca 215t


No
Hβ
Volt
Hγ
63
525
85
895
72
1200
79
1538
101
5100
67
3100
40
5300
66
20000

F. Paschen.

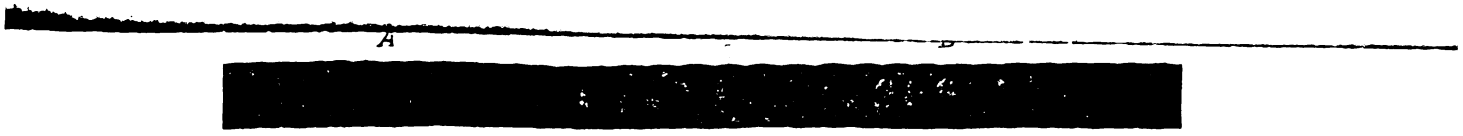
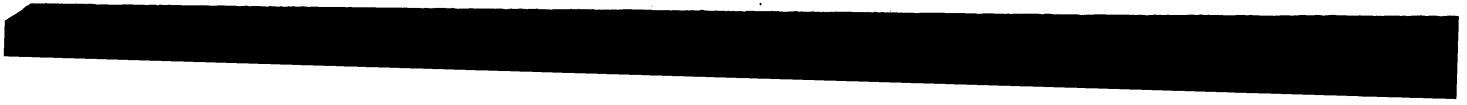
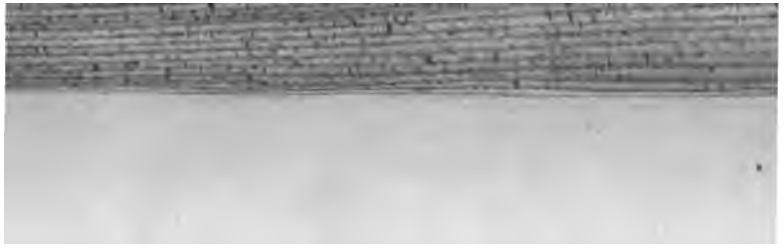


Fig. 8. Zwei Gabeln von 297,3 und 100,0 Schwingungen. (Der Maßstab ist ungleichmäßig; der Abstand zwischen zwei starken Ringen entspricht 0,01 Sekunden.)





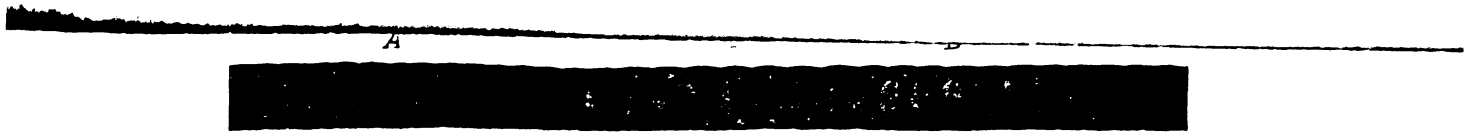
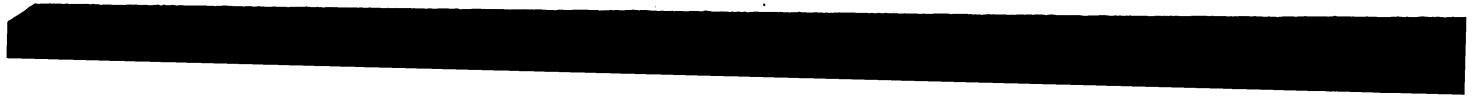


Fig. 8. Zwei Gabeln von 297,3 und 100,0 Schwingungen. (Der Maßstab ist ungleichmäßig; der Abstand zwischen zwei starken Ringen entspricht 0,01 Sekunden.)



907. № 6.

Stanford University Library JUL 18 1907

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 23. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 328. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ZWEI TAFELN.

LEIPZIG, 1907.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 28. Mai 1907.)

Inhalt

		Seite
1.	M. Laue. Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln	1
2.	F. Harms. Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender zylindrischer Hülle	44
3.	Rudolf Laemmel. Bemerkungen über die spezifischen Wärmen fester Grundstoffe. (Hierzu Taf. I.)	61
4.	Arthur Szarvassi. Über die unipolare Induktion	73
5.	H. Baerwald. Über die Adsorption von Gasen durch Holzkohle bei tiefen Temperaturen	84
6.	W. Wilson. Lichtelektrische Entladung und durch Bestrahlung erzeugtes Leitvermögen	107
7.	H. Zahn. Über adiabatischen und isothermen Halleffekt in Wismut	131
8.	Max Laugwitz. Über den Durchgang elektrischer Wellen durch nicht-metallische Gitter	148
9.	Clemens Schaefer. Über die Wirkung dielektrischer Zylinder auf elektrische Wellen	163
10.	Leo Arons. Eine Amalgamlampe mit reichem Linienspektrum. (Hierzu Taf. II, Nr. I u. II.)	176
11.	K. Uller. Über den Verdrängungswiderstand fester Körper in Gasen und Flüssigkeiten. Erste Mitteilung	179
12.	A. Einstein. Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips	197
13.	A. van den Broek. Das α-Teilchen und das periodische System der Elemente	199
14.	Paul Ehrenfest. Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz	204
15.	A. Einstein. Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. Paul Ehrenfest: „Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz"	206

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren geführt. Den wissenschaftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** [illegible] an welchen auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in [illegible] den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den [illegible] beizulegen (nicht in das Manuskript [illegible]). Da die Figuren fortan möglichst in den [illegible] werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau [illegible].

Zitate [illegible] auf den Seiten des Manuskriptes [illegible] möglichst in der in den „Fortschritten [illegible]. Ferner bei Angabe des Namens und Vornamens, [illegible] anzuführen.

[illegible] namentlich zwischen [illegible] bis [illegible]

Peggendorff's Annalen

[illegible] auch ungetauscht

Johann Ambrosius Barth.

Schrank mit 200 Zellen in Ladeschaltung.

Hochspannungs-Akkumulatoren

nach Prof. Zehnder (Ann. d. Phys., 49. p. 549. 1893; 60. p. 47. 1897).

Beste Isolation jeder einzelnen Zelle von Erde.

Leichte Auswechselbarkeit der Platten.

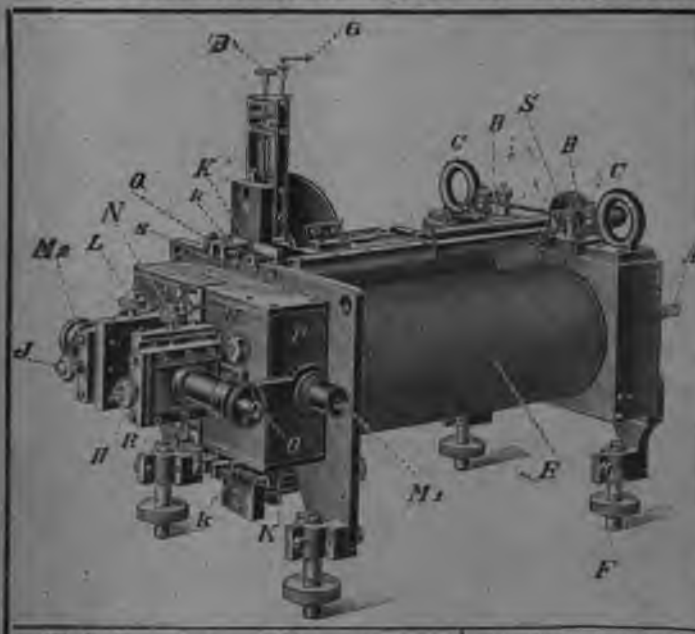
Übersichtliche Anordnung.

Billige Anschaffungskosten.

Geringer Raumbedarf.

Illustrierte Preisliste zu Diensten.

FR. KLINGELFUSS & Co., Basel.



■ ■ Saitengalvanometer (nach Einthoven) ■ ■

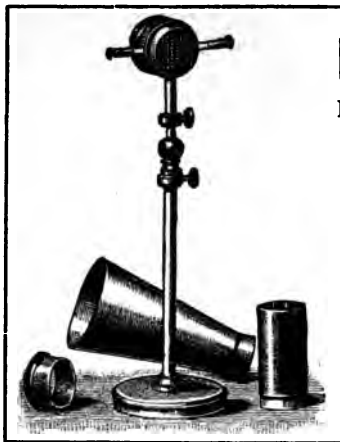
Edelmann-München

Illustrierte Preisliste gratis und franko

SIEMENS & HALSKE A.-G.

Wernerwerk, Berlin-Nonnendamm.

...ur Bestimmung der Induktions-
...s Energieverlustes von Wechsel-
... Präzisionsnormale der Selbst-
...ons-Wattmeter für Drehstrom
... der 3 Zweige. - Präzisions-
... und - Amperemeter für
... Spiegel- u. Panzergalvano-
... Kompensations-
... Widerstände, Dekaden-
... Kondensatoren.



Leppin & Masche

Berlin SO. Engelufer 17.

Fabrik

wissenschaftlicher Instrumente.

Spezialität:

Anfertigung sämtlicher physikalischer und chemischer Apparate, sowie Ausrüstung kompletter Laboratorien.

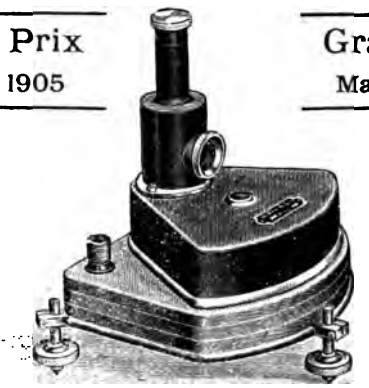
RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Quecksilberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft. Elektroskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M. Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscala etc. etc.

Grand Prix
Lüttich 1905

Grand Prix
Mailand 1906



Höchste Präzision

Bewährte Konstruktion

Zeiger- und Spiegelgalvanometer.

Compensatoren nach Franke.

— Eich- und Regulier-Widerstände. —

Land- und Seekabelwerke A.-G. Cöln-Nippes.

E. LEITZ

Optische und mechanische Werke

Wetzlar

Mikroskope, Mikrotome.

Mikrophotographische Apparate.

Universal-Projektions-Apparate

für diaskopische, mikroskopische u. episkopische Projektionen.

Photogr. Objektive und Cameras.

Zweiggeschäfte:

Berlin NW. [illegible] 45 — **Frankfurt a. M.**, Kaiserstr. 61

London W., [illegible] — **St. Petersburg**, Woskress. 11

New-York, [illegible] — **Chicago**, 82–88 Clark Str.

Vertreter für München: **Dr. A. Schwalm**, Sonnenstr. 10

Vertreter für Breslau: **Fr. Tiessen's Nachf. E. Schultz**, Schmiedebrücke 30/32.

Man verlange gratis: Katalog Nr. 42 A

Hartmann & Braun, A.-G., Frankfurt a. M.

Elektrische und magnetische Meßinstrumente und Hilfsapparate.

Königl. Preußische Goldene Staatsmedaille.

Kompensationsapparat mit Kurbelschaltung.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

LEHMANN, Dr. **O.**, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe, **Flüssige Kristalle und die Theorien des Lebens.** 8°. 55 S. Mit 30 Fig. M. 1.20

Die Vorträge, aus denen der vorliegende Druck entstanden ist, haben auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart großes Aufsehen erregt, wie alle Zeitungsstimmen berichten. Gilt doch Geheimrat Lehmann als Pfadfinder auf dem neuen Gebiete der flüssigen Kristalle, die eine Übergangsform bilden ebenso wie die kolloiden Lösungen, über die jetzt viel gesprochen wird.

Die vortrefflich ausgeführten 30 Abbildungen ersetzen die vorgezeigten Lichtbilder und Projektionen auf das Beste.

ZSIGMONDY, Dr. **R.**, Jena, **Über Kolloidchemie** mit besonderer Berücksichtigung der anorganischen Kolloide. 8°. 46 S. u. 2 Taf. M. 2.—

In der vorliegenden Publikation werden einige Fundamentalfragen der Kolloidforschung ausführlicher behandelt, als es in einem Vortrage von 40 Minuten Dauer möglich war. Die Wiedergabe der in der Versammlung demonstrierten Abbildungen in Dreifarbendruck bitte ich besonders zu beachten.

Dr. H. Geissler Nachf. Franz Müller,
Bonn a. Rhein.
Wissenschaftliche Glasapparate und Präcisionsinstrumente.
Specialität:
Elektrische Röhren nach *Geissler, Crookes, Puluj, Hittorff, Arons, Lecher etc.* — **Spectralröhren** (Argon- u. Helium-Röhren).
Röntgen-Röhren. Braun'sche Kathodenstrahlröhren.
Tesla-Röhren. — **Luftpumpen** nach *Geissler* und *Töpler-Hagen.*
Rowland's Diffractionsgitter und Photogramme.
Feine Thermometer.
Kataloge auf Verlangen.

Physikalische Revue

begründet von **Prof. Dr. P. v. Siloff**

herausgegeben von **Prof. Dr. G. de Metz**

Kiew, Theaterstrasse 33.

Achter Jahrgang.

Die Physikalische Revue ist eine Zeitschrift der Physik gewidmet, sie behandelt in leichtfaßlicher Form alle wissenschaftlich und pädagogisch wichtigen Fragen und erscheint in russischer Sprache sechsmal jährlich in Heften von ca. 60 Seiten in 8°.

Die Physikalische Revue ist vom Unterrichtsministerium zu Petersburg approbiert.

Abonnementspreis ist M. 7.— pro Jahr.

Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Die Aufstellung von Maschinen für elektrische Stromerzeuger.

Ein Handbuch für Elektrotechniker

von H. Spyri Basel.

Mit 100 Text- und auf Einschalttafeln 1967

gebunden M. 6.60.

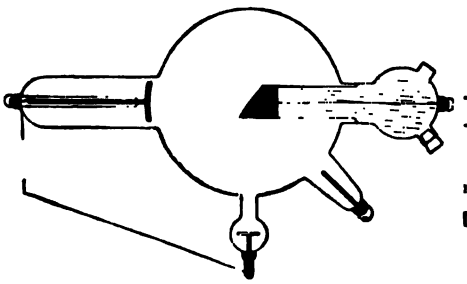
Ein Blick bei Maschinen [illegible] Augen [illegible] Sie [illegible] für [illegible] geeignet. Bald aber [illegible] starkstromanlagen [illegible] die [illegible] Ab [illegible] sollte, anzupassen

C. H. F. MÜLLER, Hamburg

Bremerreihe 24.

Telegr.-Adr.: Florenzius Hamburg. **Fernsprecher Amt III, 687.**

Spezial-Fabrik für Röntgenröhren



Neukonstruktion:

Wasser-kühlröhre

No. 14 L

nach Prof. **Dr. Walter.**

D. R.-P. 113430. 176003, 161514

U. S. P. u. Engl. Pat.

In **allen Stellungen** verwendbar! Geeignet für Durchleuchtungen **von unten** für operative und diagnostische Zwecke.

(Albers-Schönberg: Die Röntgentechnik. II. Auflage.)

Illustrierte Preisliste, enthaltend verschiedene Neuerungen, bitte einzufordern!

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in Leipzig.

Für jeden Gelehrten von großem Werte ist

Professor Ascherson's

Deutscher Universitäts-Kalender

mit amtlicher Unterstützung

herausgegeben von

Dr. **Th. Scheffer** und Dr. **G. Zieler.**

71. Ausgabe.

Sommer-Semester 1907. (Soeben erschienen.)

Der Kalender besteht aus zwei Teilen:

I. Teil: **Universitäten im Deutschen Reich.**
II. Teil: **Universitäten im benachbarten Auslande.**

Jeder Teil kostet broschiert M. 2.—.
Beide Teile in einem Band gebunden M. 4.80.

Die Herausgeber des Kalenders haben es sich angelegen sein lassen, durch eine sehr ins einzelne gehende Fragestellung in praktischer Beziehung sehr und mehr zu erhöhen. Die Vorlesungen aller Dozenten sind mit der Angabe der Stundenzahl ungekürzt angegeben. Die Gehaltsverhältnisse der Dozenten sind, soweit erreichbar, sämtlich aufgeführt. Eine Chronik und Statistik der Universitäten, eine Übersicht über die akademische Presse, eine Zusammenstellung aller studentischen Vereinigungen an den Universitäten im Inlande und denen des deutschsprachigen Auslandes und ein Verzeichnis der in den Universitätsstädten liegenden Gymnasien ist beigefügt. Der Umfang des Kalenders ist soweit wie an die Grenze des Möglichen erhöht. Da das gesamte Material amtlich ist, so ist auch eine weitgehende Zuverlässigkeit garantiert. Die Praktikabilität des Kalenders ist von der Kritik immer rühmend hervorgehoben worden. Das handliche Format und der saubere Druck zeichnen ihn vorteilhaft vor ähnlichen Unternehmungen aus.

Durch alle Buchhandlungen zu beziehen. Die Verlagsbuchhandlung liefert bei Vorherein endung des Betrages portofrei.

E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS.

Grands-Prix { Paris 1889 — Anvers 1894 / Bruxelles 1897 — Paris 1900 / St. Louis 1904 — Liège 1905
Expositions Universelles

Cabinets de Physique complets (Catalogues illustrés).

Appareils de Mesures électriques.

Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet garantie pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard**, type 1906, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquence.

Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.

Transformateur électrolytique de Faria, redresseur des Courants alternatifs.

Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren, Compensationspendel.

Grand Prix: Paris 1900 / St. Louis 1904

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente

Nesselwang u. München.

Gegründet 1841.

Illustrirte Preislisten gratis.

Paul Bunge, Hamburg, Ottostr. 13.

Mechanisches Institut, gegründet 1866.

Ältestes Konstruktionsbureau für kurzarmige Wagen, empfiehlt

seine Originalkonstruktionen in physikalischen und analytischen Wagen in vorzüglicher Ausführung und in allen Preislagen.

Nur erste Preise auf sämtl. beschickten Ausstellungen.

Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von Fr. 500.—. Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix. Weltausstellung St. Louis 1904 — Grand Price.

Preislisten in drei Sprachen kostenfrei.

Meiser & Mertig, Dresden-N. 6.

[illegible] Präzisionsmechanik.

Physikalische Apparate

[illegible] und eleganter Ausführung.

[illegible] Hochspannungsapparate. — **Apparate für** [illegible] Röntgenapparate. — **Chemische Geräte.**

[illegible] Auszeichnungen und Anerkennungen.

[illegible] *Neue Preisliste kostenlos.*

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und -Optik.

Gegründet 1890.

Größte Spezial-Fabrik für Luftpumpen

zu wissenschaftlichen Zwecken.

Neu! Rotierende **Neu!**

Quecksilberpumpe höchster Leistung

neuester eigener Konstruktion, System Pfeiffer.

Ohne Glas, ohne Porzellan, vollkommen unzerbrechlich!

Leistung: Röntgenröhre (samt Trockenröhre usw.) von ca. 2 l Inhalt wurde in **70 Sekunden** von 5 mm Hg-Druck auf **hartes Röntgenvakuum** (15 cm Parallelfunkenstrecke setzt ein!)
und **130 Sekunden** von **Atmosphärendruck** auf **hartes Röntgenvakuum** (15 cm Parallelfunkenstrecke setzt ein!) evakuiert.

Vollkommenste und **widerstandsfähigste** Pumpe
für

höchste Verdünnungen!

Komplette Pump-Einrichtung für Hand- und Motorbetrieb auf fahrbarem Tisch (1/6 P.S.).

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung
zur Fabrikation der

Geryk-Öl-Luftpumpen

Patent Fleuss, D.R.P.
in Deutschland.

Neu! **Präzisions- o o o o o Vakuummeter**

D.R.G.M. nach Reiff.

Ohne Gummi! Ganz aus Glas!

(Physik. Zeitschr. 8, p. 124, 1907.)

KEISER & SCHMIDT, Berlin N.,

Johannisstrafse 20.

Neues hochempfindliches Spiegelgalvanometer, Präzisionswiderstände, Meſsbrücken, Kompensationsapparate, Präzisions-Ampère- und Voltmeter für Laboratorien und Schalttafeln, **Galvanometer, Funkeninduktoren, Kondensatoren, Rubenssche Thermosäulen, Pyrometer** bis 1600° C., **Elemente, Kohlensäurebestimmungsapparate.**

Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

— Darmstadt. —

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate. Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und Böhmische Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.

R. Burger & Co., Berlin N. 4.

Chausseestrasse 8.

Telephon: Amt III 171.

Telegramm-Adr.: Vakuumglas Berlin.

Spezialfabrik

für physikalische Glasapparate und Instrumente.

Transportbehälter für flüssige Luft.

Preisliste gratis und franko.

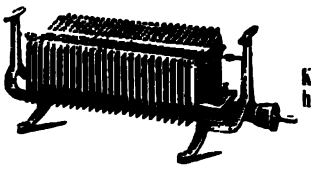
Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante elektromotorische Kraft.

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.



Keine Dämpfe kein Geruch.

Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.

Betriebsstörungen ausgeschlossen.

Alleiniger Fabrikant: Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstr. 72/73.

SOCIETE GENEVOISE

pour la Construction

D'INSTRUMENTS DE PHYSIQUE ET DE MECANIQUE

Genf. 5 Chemin Gourgas.

Kreis- und Längentheilmaschinen, Comparatoren, Kathetometer, Mikrometrische Schrauben, Normalmaasse,

Normalmeter

in verschiedenen Längen, aus Nickelstahl (Invar), Nickel, Bronze, in der H-Form, 5 Meter lang in Invar.

Höchste Garantie der sauberen Ausführung der exaktesten Arbeiten.

Astronomische, optische, elektrische Instrumente.

Vollständige Ausstattung für Universitäten.

Funkentelegraphische Apparate (hohe Frequenz), nach Tesla, Oudin etc.

Kataloge zur Verfügung.

Günther & Tegetmeyer, Braunschweig.

Werkstatt für wissenschaftliche und technische Präzisions-Instrumente.

Weltausstellung St. Louis 1904 Goldene Medaille.

Transportable Apparate zur [illegible] nach **Exner**. Elektroskope mit innerer Isolation [illegible], Natriumtrocknung und Einrichtung zum parallaxenfreien Ablesen [illegible]. Apparate zur Messung der Elektrizitätszerstreuung in der Luft. Zum [illegible] Messungs-Ionisationsapparate (D.R.G.M.). Instrumente [illegible] Radioaktivation Luft- und Bodenproben. Quadrantelektrometer [illegible] (Neukonstruktion). Wasserstralldupliktatoren nach **Elster** und **Geitel** [illegible] sowie (**Braun**sche Prinzip) mit innerer Isolation [illegible] nach Elster und **Geitel**. Transportable Elektroskop-Aspirationsapparate nach **Ebert** mit Ersatz durch saboratorium zur Bestimmung [illegible] Luft nach der Methode **Mache**. [illegible] **Harms** zur Bestimmung [illegible]

Wilh. Spoerhase vorm. C. Staudinger & Co.

Giessen, Hessen.

Gegründet 1842.

Präzisionswagen und Gewichte

zu physikalischen, chemischen und technischen Zwecken.

Mit höchsten Preisen ausgezeichnet auf sämtlichen beschickten Ausstellungen.

Spezialität:

Analysenwagen, Probierwagen.

Neuheit! Ungleicharmige Präzisionstarirwage

nach Dr. Mach, für rasch auszuführende Wägungen.

Nach kurzer Übung sehr beschleunigte Arbeiten.

Siehe auch Chemiker-Ztg. 1903. S. 22.

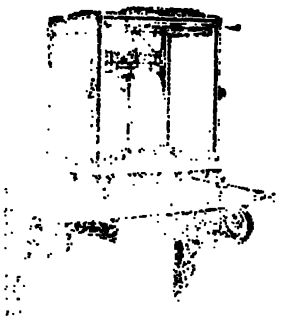
Illustrierte Kataloge in deutsch, französisch und englisch kostenfrei.

F. SARTORIUS

Vereinigte Werkstätten für wissenschaftliche Instrumente

vorm. F. Sartorius, A. Becker und Ludwig Tesdorpf

Göttingen



Wagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

Analysenwagen

eigener bewährtester Konstruktion.

Man verlange ausdrücklich [illegible] Sartorius-Wagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

[illegible] beschickten Ausstellungen [illegible] Diplome d'honneur und Preis[illegible]

[illegible] Goldene Medaille.

[illegible] Vertreter in allen Ländern.

Ferdinand Ernecke.

Hoflieferant Sr. Majestät des Deutschen Kaisers und Königs.

Mechanische Präzisionswerkstätten.

Eigene Maschinentischlerei, Schlosserei, Lackiererei, Façondreherei usw. mit Elektromotorenbetrieb.

Seit August 1905 im eigenen Fabrikneubau.

Ringbahnstr. 4. Berlin-Tempelhof Ringbahnstr. 4.

Älteste Spezialfabrik

zur Herstellung physikalischer Unterrichts-Apparate.

Bau-Abteilung:

Vollständige Einrichtung physikalischer und chemischer Lehrsäle, Laboratorien, Vorbereitungs- und Sammlungszimmer.

Preisliste Nr. 19

über Einrichtungsgegenstände, sowie ausführliche Voranschläge auf Wunsch kostenlos.

Durch geschultes Personal und jahrelange Erfahrung bin ich in der Lage, auch auf diesem Gebiete das denkbar Vollkommenste zu leisten.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente.

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890

Präzisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1889, Januar 1890, Nov.-Dezember 1895.)

Normalwiderstände von 100000—0,00001 Ohm für genaue Widerstandsvergleichungen und für Strommessungen b. 10000 Amp. **Rheostaten, Wheatstonesche Brücken, Thomsonsche Doppelbrücken** für alle Meßbereiche mit Stöpsel- od. Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — **Kompensationsapparate** für genaue Spannungsmessungen. — **Kompensationsapparat zugleich Wheatstonesche Brücke. — Normalelemente,** beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präzisionswiderstände beglaubigt. — Verkaufslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

Illustrierte Preisliste.

MAX KOHL, Chemnitz i. S

Werkstätte für Präzisionsmechanik,

liefert als langjährige Spezialität:

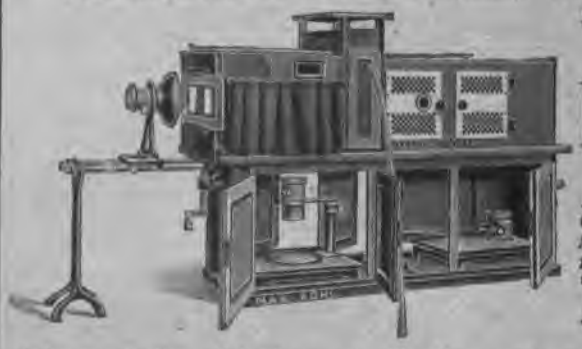
Physikalische und **chemische Einrichtungsgegenstände** für Schulen, wie z. B. **mentiertische** n. Prof. Dr. Weinhold u. Prof. Arendt, **Fensterverdunkelung lichtverdunkelungen** für Elektromotor- u. Handbetrieb, **Abzugsnischen** mit Gas- leitungsciubau, **Wandtafelgestelle, Projektionsrollschirm** mit oder ohne Elektro-

Vollständige Einrichtungen von physikalischen und chemischen Aud

in gediegener, zweckmäfsiger Ausführung.

Derartige komplette Einrichtungen wurden jetzt u. a. für das I. Chemische Institut der Berlin, Hofmann-Haus Berlin, Laborat. f. angew. Chemie der Universität Leipzig, Phys. Universität Leipzig, Ecole d. Mines du Hainaut, Mons (Belgien), Kommerzschule Riga. Technolog. Institut Tomsk (Sibirien), höhere Masch.-Bauschule Stettin u. v. a. m. g

Im Auftrage des Reichs-Kommissars habe ich den Hörsaal der Deutschen Unterrichts- St. Louis für das Preuß. Kultus-Ministerium ausgestattet. Prämiert mit dem Gra



Neu!

Kohl

Megadia

D.R.G.M

Apparat zur Pr
im auffallenden
fallenden Licht,
projektion, zur P
mikroskop. Präp
Polarisation, S
Analyse, Interfe
Beugung des

Vollkommenster Apparat der Gegenwart. ✲ Man verlange Spezial-Pro

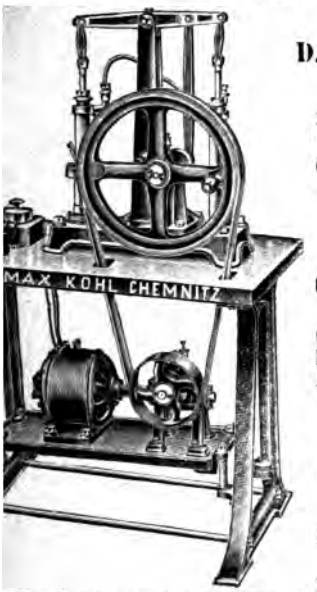
MAX KOHL, Chemnitz i. S.

ts-(Praktikanten-)Tische

nöglichen Ausführungen, ganz den je-n örtlichen Verhältnissen angepaßt.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten die Verwendung des Stromes städtischer Centralen bis 110, 160, 220 Volt u. 20 oder 30 Amp. für alle im Experimentalunterricht vorkommende Arbeiten. Die Schalttafeln sind für kleine und grofse Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,3 bis 110 resp. 220 Volt zu verwenden. Höhere Spannungen als wie eingestellt, treten auch bei Stromunterbrechung nicht auf. — Es ist damit also einem wirklichen, langgefühlten Bedürfnis abgeholfen. Ia. Referenzen. ***Man verlange Spezial-Prospekt!***



mbromid von überraschender — Wirkung; — **isch rein.** Preis auf Anfrage.

D. D. Thermoskope nach Kolbe

in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu!

Öl-Luftpumpen

System Kohl, D.R.P. 169180.

Allein-Vertrieb

und Alleinberechtigung zur Fabrikation

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm und **verspritzt während des Pumpens kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum Auspumpen von Röntgen-Röhren**

Man verlange Spezial-Prospekt!

Neue rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P. angemeldet.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum, geringe Wartung, einfachste Handhabung.

Hochvakuum-Pumpen liefern Vakua bis zu 0,00015 mm in 14 Minuten in einem Raum von 300 ccm.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!

stellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,

in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

rondiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. Düsseldorf 1898.

Goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900. Aussig 1902, Athen 1904.

mit ausführlichen Kostenanschlägen, Referenzen, Broschüren etc. gerne gratis und franko.

E. Leybold's Nachfolger

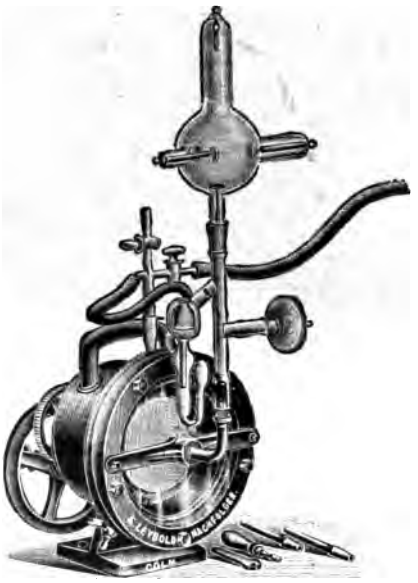
Cöln a. Rh.

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung zur Fabrikation der

Neuen Hoch-Vakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet. **D. R. P. angemeldet.**



Garantiertes Vakuum: 0,00004 mm.

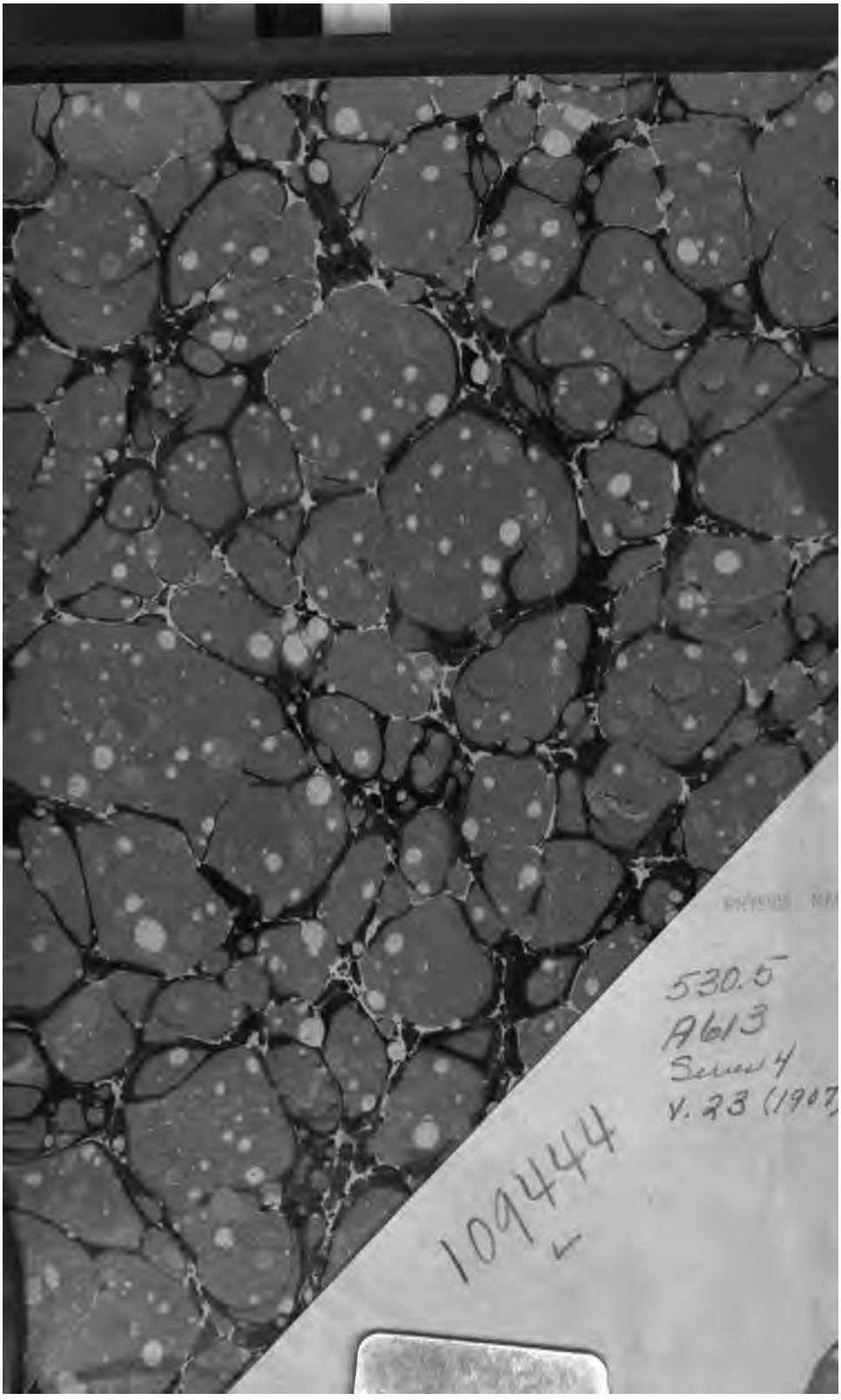
Die Pumpe evakuiert in 2½ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck auf Röntgenvakuum und ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

Preis ohne Quecksilber M. 330. –.

Alleinige Inseratenannahme durch: **Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.**

Druck von Oscar Brandstetter & Wittekind in Leipzig.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below


530.5
A613
Series 4
v. 23 (1907)
109444